UFAS Sétif 1. Département de Mathématiques. Faculté des Sciences. 14 Mai 2018. Durée : 1h 30 mn. Examen du module : Problème conique. Enseignant M. Achache

Exercice 1 (3 pts) *Soit $\mathcal{L}^{n+1}$ le cône propre de Lorentz c.à.d*

$$\mathcal{L}^{n+1} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \ : \ \|x\|_2 \leq t\}.$$

Montrer que $\mathcal{L}^{n+1}$ est auto-duale.

Exercice 2 (8.5 pts) *Considérons le programme linéaire conique primale sur le cône de Lorentz suivant :*

$$(\mathcal{P}) \ : \quad p^* = \min_{(x_1,x_2,x_3)} x_1 \ \textbf{\textit{s.c.}} \ x_2 + x_3 = 0, -x_1 \leq 10, \ \|(x_1,x_2)\|_2 \leq x_3, \ x_3 \geq 0.$$

1. (3pts) Montrer que $\mathcal{P}$ est solvable.
2. (3 pts) Déterminer son duale $\mathcal{D}$ et montrer qu'il est solvable.
3. (0.5 pt) Déduire que $p^* \neq d^*$ avec d^* est la valeur maximale de $\mathcal{D}$.
4. (2 pts) Quel hypothèse qui manque dans les deux problèmes $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ pour assurer la dualité forte?

Exercice 3 (8.5 pts) *(Fonctions auto-concordantes et méthode de Newton) Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :*

$$f(x) = x^2 - \frac{1}{2}\ln x, \ x \in dom f = \{x \in \mathbb{R} \colon x > 0\}.$$

1- (2.5 pts) Montrer que f est une fonction $k-$auto-concordante sur son $dom f$.
2- (2 pts) On veut calculer approximativement l'unique minimum x^* tel que :

$$f(x^*) = \min_{x \in dom f} f(x)$$

par l'algorithme de Newton tout en démarrant par les points initiaux suivants :

$$x^0 = 0.45, \ x^0 = 0.54 \quad et \quad x^0 = 1$$

D'après vous quels sont les points initiaux acceptables pour démarrer l'algorithme?
3- (4 pts) Effectuer une itération de Newton pour les choix acceptables de x^0 et déduire.

Correction partielle de l'examen

Exercice 1.
$\mathcal{L}^{n+1}$est auto-duale si et seulement si :

$$\mathcal{L}^{n+1} = (\mathcal{L}^{n+1})^*,$$

ou

$$(\mathcal{L}^{n+1})^* = \left\{(y,s) : \ y^T x + st \geq 0 \ \forall (x,t) \in \mathcal{L}^{n+1}\right\}.$$

Soit $(y,s) \in \mathcal{L}^{n+1}$et pour tout $(x,t) \in \mathcal{L}^{n+1}$ on a :

$$\|y\|_2 \leq s \text{ et } \|x\|_2 \leq t.$$

Alors par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il s'ensuit que :

$$y^T x + st \geq -\|x\|_2 \|y\|_2 + st \geq 0. \tag{1}$$

Ce qui montre que $(y,s) \ \in (\mathcal{L}^{n+1})^*$. Inversement, soit $(y,s) \ \in (\mathcal{L}^{n+1})^*$ alors

$$y^T x + st \geq 0 \ \forall (x,t) \in \mathcal{L}^{n+1}.$$

Il suffit donc de prendre

$$x = -y \ \text{ et } t = \|y\|_2$$

et il découle que :

$$-\|y\|_2^2 + s\|y\|_2 \geq 0 \Rightarrow \|y\|_2 \leq s \Rightarrow (y,s) \ \in \mathcal{L}^{n+1}. \tag{2}$$

Finalement, de (**1**) et (**2**), on déduit que $\mathcal{L}^{n+1}$est un cône auto-duale.

Exercice 2.
1- On a :

$$(\mathcal{P}) \quad p^* = \min_{(x_1,x_2,x_3)} x_1 \ \textbf{s.c.} \ \ x_2 + x_3 = 0, -x_1 \leq 10, \ \|(x_1,x_2)\|_2 \leq x_3, \ x_3 \geq 0.$$

Alors l'écriture matricielle de $\mathcal{P}$ est comme suit :

$$p^* = \min c^T x \quad \textbf{s.c.} \quad Ax = b, \ \|(x_1,x_2)\|_2 \leq x_3, \ x_3 \geq 0$$

where

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \end{pmatrix} \text{ et } c = (1,0,0,0)^T.$$

L'ensemble réalisable de $\mathcal{P}$ est donné par :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\mathcal{P}) &= \left\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 :\ x_2+x_3=0, -x_1\leq 10,\ \|(x_1,x_2)\|_2\leq x_3,\ x_3\geq 0\right\} \\
&= \left\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 :\ x_2+x_3=0, x_4=10+x_1,\ \text{et}\ x_1^2+x_2^2\leq x_3^2,\ x_3,x_4\geq 0\right\}
\end{aligned}$$

ou x_4 est un variable d'écart. Alors :

$$\mathcal{F}(\mathcal{P})=\{(0,x_2,-x_2,10): x_2\in\mathbb{R}\}.$$

Par conséquent le problème $\mathcal{P}$,est minoré par 0 et réalisable. Il est donc solvable c.à.d $p^*=0$ est atteinte pour

$$x^*=(0,1,-1,10)^T.$$

2- Le duale $\mathcal{D}$ de $\mathcal{P}$ est donné par :

$$(\mathcal{D})\ \max_{(y,z)} b^Ty=-10y_2 \text{ s.c. } A^Ty+z=c,\ \|(z_1,z_2)\|_2\leq z_3, z_3, z_4\geq 0.$$

L'ensemble réalisable de $\mathcal{D}$ est défini par :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\mathcal{D}) &= \left\{\begin{array}{c}(y,z)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^4 : \begin{pmatrix}0&1\\1&0\\1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\\z_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\\ z_1^2+z_2^2\leq z_3^3, z_3, z_4\geq 0\end{array}\right\} \\
&= \left\{\begin{array}{c}(y,z)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^4 : y_2+z_1=1,\ y_1+z_2=0,\ y_1+z_3=0,\ z_4-y_2=0,\\ z_1^2+z_2^2\leq z_3^3, z_3, z_4\geq 0\end{array}\right\} \\
&= \left\{(y,z)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^4 : z_1=0,\ y_1=-z_2=-z_3,\ y_2=z_4=1\ \right\} \\
&= \{(y_1,y_2)=(a,1): a\leq 0\}.
\end{aligned}$$

Le problème duale $\mathcal{D}$ est majoré par -10 et réalisable donc il est solvable c.à.d il existe un $y^*=(a,1)$ tel que $d^*=-10$.
3- Le saut de dualité entre $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ n'est pas nul car $p^*\neq d^*$.
4- Comme les deux problèmes ne satisfient pas l'hypothèse de stricte faisabilité alors la dualité forte n'est pas assurée.

Exercice 3.

1- Soit $f(x)=x^2-\frac{1}{2}\ln x$, et ces trois dérivées successives sont données par :

$$f'(x)=2x-\frac{1}{2x},\ f''(x)=\frac{1}{2x^2}\left(4x^2+1\right)>0 \text{ et } f'''(x)=-\frac{1}{x^3}.$$

On a :

$$\frac{\left|f'''(x)\right|^2}{(f''(x))^3} = \frac{\dfrac{1}{x^6}}{\frac{1}{8x^6}\left(4x^2+1\right)^3} = \frac{8}{\left(4x^2+1\right)^3} \leq 8,\ \forall x \geq 0,$$

et par conséquent on déduit que :

$$\left|f'''(x)\right| \leq 2\sqrt{2}(f''(x))^{3/2}, \forall x \geq 0,$$

ce qui montre que f est ($\kappa = \sqrt{2}$)−auto-concordante sur son $domf$.

2- Les points initiaux x^0 pour démarrer l'algorithme de Newton sont acceptables si la **proximité** :

$$\lambda(x) = \sqrt{g^2(x)H^{-1}(x)} = \frac{|4x^2-1|}{\sqrt{8x^2+2}}$$

vérifie la condition :

$$\lambda(x^0) \leq \frac{1}{3\kappa} = \frac{1}{3\sqrt{2}} = 0.2357.$$

Pour $x^0 = 0.45$ alors $\lambda(0.45) = 9.986\,2 \times 10^{-2} < 0.2357$ donc $x^0 = 0.45$ est acceptable.

Pour $x^0 = 0.54$ alors $\lambda(0.54) = 7.994\,1 \times 10^{-2} < 0.2357$ donc $x^0 = 0.54$ est acceptable.

Pour $x^0 = 1$ alors $\lambda(1) = \frac{3}{\sqrt{10}} = 0.94868 > 0.2357$ donc $x^0 = 1$ n'est pas acceptable.

Calcul d'une itération par l'algorithme de Newton en démarrant par le point initial $x^0 = 0.45$ .On a :

$$x^1 = x^0 + \Delta x^0 = 0.49275$$

avec

$$\Delta x^0 = -H^{-1}(x^0)g(x^0) = 4.723\,8 \times 10^{-2},$$

est la direction de Newton au point x^0.

Pour $x^0 = 0.54$,on a :

$$\begin{aligned} x^1 &= x^0 - H^{-1}(x^0)g(x^0) \\ &= 0.54 - \frac{0.15407}{3.7147} = 0.54 - 4.147\,6 \times 10^{-2} = 0.498\,52. \end{aligned}$$

En utlisant le test d'arrét la proximité $\lambda(x^k)$ pour comparer ces deux résultas liés à chaque point initiale.
Pour $x^1 = 0.49275,$ associe à $x^0 = 0.45$, on a :

$$\lambda_{0.45}(x^1) = \frac{|4(x^1)^2 - 1|}{\sqrt{8(x^1)^2 + 2}} = 0.0145.$$

Pour $x^1 = 0.498\,52,$ associe à $x^0 = 0.54$, on a :

$$\lambda_{0.54}(x^1) = \frac{|4(x^1)^2 - 1|}{\sqrt{8(x^1)^2 + 2}} = 0.000296.$$

Il est claire qu'avec le deuxième choix de x^0,on obtient une bonne approximation de l'optimum de f car :

$$\lambda_{0.54}(x^1) < \lambda_{0.45}(x^1).$$

Remarque : Le minimum exacte de f sur son domaine est tel que $f'(x) = 0$. Alors :

$$x^* = 0.5$$

et on déduit aussi que $x^1 = 0.498\,52$, est une bonne approximation de x^*.