Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Sétif 1

Algèbre 2

2018/2019 (Semestre 2)
1ère Année L.M.D – Maths-Info.
Matière : Algèbre 2

Par l'enseignant: F. Gherbi
الأستاذ : ف. غربي

Quelques démonstrations

Applications linéaires.

Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps IK (de dimensions finies).
Soit $f : E \to F$ une application linéaire.

❶ Le noyau de f; i.e. $Ker f = \{v \in E \,/\, f(v) = o_F\}$ est un s.e.v. de E; en effet :

- Puisque $f(o_E) = o_F$, alors $o_E \in Ker f$; d'où $Ker f \neq \phi$.
- Soient $u, v \in Ker f$; donc $u, v \in E$ tels que $f(u) = o_F$ et $f(v) = o_F$.
  Par suite $u + v \in E$ et $f(u+v) = f(u) + f(v) = o_F + o_F = o_F$; d'où $u + v \in Ker f$.
  On a montré donc que $\forall u, v \in Ker f : u + v \in Ker f$.
- Soit $\lambda \in IK$ et soit $v \in Ker f$; donc $v \in E$ tel que $f(v) = o_F$.
  Par suite $\lambda v \in E$ et $f(\lambda v) = \lambda f(v) = \lambda o_F = o_F$; d'où $\lambda v \in Ker f$.
  On a montré donc que $\forall \lambda \in IK, \forall v \in Ker f : \lambda v \in Ker f$.

Finalement; $Ker f$ est un sous-espace vectoriel de E.

❷ L'image de f; i.e. $\mathrm{Im} f = \{f(v) \,/\, v \in E\}$ est un s.e.v. de F; en effet :

- Puisque $o_F = f(o_E)$, alors $o_F \in \mathrm{Im} f$; d'où $\mathrm{Im} f \neq \phi$.
- Soient $u, v \in \mathrm{Im} f$; il existe donc $u', v' \in E$ tels que $u = f(u')$ et $v = f(v')$.
  Par suite $u + v = f(u') + f(v') = f(u' + v')$; avec $u' + v' \in E$, d'où $u + v \in \mathrm{Im} f$.
  On a montré donc que $\forall u, v \in \mathrm{Im} f : u + v \in \mathrm{Im} f$.
- Soit $\lambda \in IK$ et soit $v \in \mathrm{Im} f$; il existe donc $v' \in E$ tel que $v = f(v')$.
  Par suite $\lambda v = \lambda f(v') = f(\lambda v')$; avec $\lambda v' \in E$, d'où $\lambda v \in \mathrm{Im} f$.
  On a montré donc que $\forall \lambda \in IK, \forall v \in \mathrm{Im} f : \lambda v \in \mathrm{Im} f$.

Finalement; $\mathrm{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F.

❸ Si $\dim E = \dim F$, alors : f est injective $\Leftrightarrow$ f est surjective; en effet :

- ($\Rightarrow$) : Supposons que f soit injective; donc $Ker f = \{o_E\}$, d'où $\dim(Ker f) = 0$.
  Du Théorème du rang; i.e. $\dim E = \dim(Ker f) + \dim(\mathrm{Im} f)$, on déduit que $\dim(\mathrm{Im} f) = \dim E$.
  Puisque $\dim E = \dim F$ (Par hypothèse), alors $\dim(\mathrm{Im} f) = \dim F$; or $\mathrm{Im} f \subset F$, donc $\mathrm{Im} f = F$.
  D'où f est surjective.
- ($\Leftarrow$) : Supposons que f soit surjective; donc $\mathrm{Im} f = F$, d'où $\dim(\mathrm{Im} f) = \dim F$.
  Du Théorème du rang; i.e. $\dim E = \dim(Ker f) + \dim(\mathrm{Im} f)$, on a donc $\dim E = \dim(Ker f) + \dim F$.
  Par suite $\dim(Ker f) = \dim E - \dim F = 0$ (car $\dim E = \dim F$ par hypothèse); d'où $Ker f = \{o_E\}$ et donc f est injective.

Fin