N°03

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Sétif 1

Algèbre 2

2017/2018 (Semestre 2)
1ère Année L.M.D – Maths-Info.
Matière : Algèbre 2

Par l'enseignant: F. Gherbi
الأستاذ : ف. غربي

Exercices corrigés

Applications linéaires.

Exercice nº 01:

Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

$f : IR^3 \to IR$ $(x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = x+y+z$	$g : IR^2 \to IR^3$ $(x,y) \mapsto g(x,y) = (y, x, x-2y)$	$h : IR^2 \to IR$ $(x,y) \mapsto h(x,y) = xy$
$k : IR^2 \to IR$ $(a,b) \mapsto k(a,b) = a\sin x + b\cos y$	$\ell : IR_2[X] \to IR^3$ $P \mapsto \ell(P) = \big(P(1), P'(1), P''(1)\big)$	$p : IR^2 \to IR^2$ $(x,y) \mapsto p(x,y) = (x+y, x+1)$

Exercice nº 02:

1) Montrer que si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$, alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$.

2) Soient E, F et G trois e.v. sur IK; et soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ surjective et $g : F \to G$ une application.
Montrer que si $g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$, alors $g \in \mathcal{L}(F,G)$.

3) Montrer que la réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme.

Exercice nº 03:

Soit $f : IR^3 \to IR^3$ une application linéaire définie par $f(x,y,z) = (y+z, x+y+z, x)$.

1) Déterminer $Kerf$ et $\operatorname{Im} f$.

2) Est-ce que f est un isomorphisme ? Déterminer le rang de f.

3) Montrer que $IR^3 = Kerf \oplus \operatorname{Im} f$.

Exercice nº 04:

Soit $f : IR^3 \to IR^2$ une application définie par $f(x,y,z) = (-2x+y+z, x-2y+z)$.

1) Montrer que f est une application linéaire.

2) Déterminer le noyau et l'image de f.

3) Donner une base de $Kerf$ et $\operatorname{Im} f$.

4) f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice nº 05:

Soit $f : IR^3 \to IR^3$ une application linéaire définie par $f(x,y,z) = (x-z, 2x+y-3z, -y+2z)$.

1) Calculer $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$; où $\{e_1, e_2, e_3\}$ est la base canonique de IR^3.

2) Déterminer une base de $Kerf$; et une base de $\operatorname{Im} f$.

3) f est-elle bijective ? Déterminer le rang de f.

Exercice n° 06:

Soit $f : IR^4 \to IR^4$ une application linéaire définie par $f(x, y, z, t) = (x - 2y, x - 2y - 3z, 0, x - y - z - t)$.

1) Déterminer le noyau et l'image de f.

2) A-t-on $IR^4 = Kerf \oplus \operatorname{Im} f$?

Exercice n° 07:

Soit $E = IR_2[X]$; et soit $f : E \to E$ une application définie par $f(P) = -\frac{1}{2}(X+1)^2 P'' + (X+1)P'$.

(où P' est la dérivée première de P; et P'' est la dérivée seconde de P).

1) Montrer que f est un endomorphisme de E; et que $f \circ f = f$.

2) Déterminer $Kerf$ et $\operatorname{Im} f$; et donner leurs bases.

3) Montrer que $E = Kerf \oplus \operatorname{Im} f$.

Exercice n° 08:

Soient E et F deux IK -espaces vectoriels; et soit $f : E \to F$ une application linéaire.

Montrer que si $E = Vect(v_1, v_2, .., v_n)$, alors $\operatorname{Im} f = Vect\big(f(v_1), f(v_2), .., f(v_n)\big)$.

Exercice n° 09:

Soient E et F deux e.v. sur IK, $\{v_1, v_2, v_3\}$ une base de E et $\{u_1, u_2, u_3\}$ une famille de vecteurs de F.

Soit $f : E \to F$ une application linéaire qui vérifie $f(v_1) = u_1$, $f(v_2) = u_2$ et $f(v_3) = u_3$.

1) Montrer que : f est injective $\Leftrightarrow \{u_1, u_2, u_3\}$ est une famille libre.

2) Montrer que : f est surjective $\Leftrightarrow F = Vect(u_1, u_2, u_3)$.

3) Montrer que : f est bijective $\Leftrightarrow \{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de F.

Exercice n° 10:

Soit E un IK -espace vectoriel; et soient f, g deux endomorphismes de E.

1) Montrer que : $Kerf^{\,2} = Kerf \Leftrightarrow Kerf \cap \operatorname{Im} f = \{o_E\}$.

2) En déduire que : $f^2 = f \Rightarrow E = Kerf \oplus \operatorname{Im} f$.

3) Montrer que : $\operatorname{Im} g \subset Kerf \Leftrightarrow f \circ g = 0$.

4) Montrer que : $Ker(g \circ f) = f^{-1}\big(Kerg \cap \operatorname{Im} f\big)$.

Exercice n° 11:

Soit E un e.v. On définit un projecteur de E; tout endomorphisme p de E vérifiant $p \circ p = p$.

1) Montrer que : p est un projecteur de $E \Leftrightarrow Id_E - p$ est un projecteur de E.

2) Montrer que si p est un projecteur de E, alors : $\operatorname{Im} p = Ker(Id_E - p)$ et $Kerp = \operatorname{Im}(Id_E - p)$.

3) Montrer que si p est un projecteur de E, alors : $E = \operatorname{Im} p \oplus Kerp$.

Rappel: Soient E et F deux e.v. sur le même corps IK; et soit $f : E \to F$ une application.

La composée de deux applications linéaires est une application linéaire.

- f est une **application linéaire** تطبيق خطي $\overset{\text{déf.}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \cdot\ \forall u,v \in E:\ f(u+v) = f(u) + f(v) \\ \cdot\ \forall \lambda \in IK, \forall v \in E:\ f(\lambda v) = \lambda f(v) \end{cases}$

  $\overset{\text{Pro.}}{\Leftrightarrow}\ \forall \lambda,\mu \in IK, \forall u,v \in E:\ f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v).$
- On désigne $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E vers F (qui est un e.v. sur IK).
- Si $E = F$, alors on désigne $\mathcal{L}(E)$ au lieu $\mathcal{L}(E,E)$.
- Toute application linéaire est un homomorphisme (donc on peut parler du noyau et de l'image..).
- Si $f : E \to F$ est une application linéaire, alors on a $f(o_E) = o_F$ (la réciproque est fausse).
- Si $f(o_E) \neq o_F$, alors $f : E \to F$ n'est pas une application linéaire.
- Attention; si $f : E \to F$ est linéaire et $v \in E$, alors : $f(v) = o_F \not\Rightarrow v = o_E$ (en général).

  Mais; si f est injective, alors : $f(v) = o_F \Rightarrow v = o_E$ (car $f(v) = o_F \Leftrightarrow f(v) = f(o_E)$).
- Toute application linéaire $f : E \to E$ est appelée « **endomorphisme** de E ».
- Toute application linéaire $f : E \to F$ bijective est appelée « **isomorphisme** ».
- Tout endomorphisme de E bijectif est appelé « **automorphisme** de E ».
- Toute application linéaire $f : IR^n \to IR^m$ est définie de manière unique comme suit : $\begin{cases} 1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n \end{cases}$

  $f(x_1,..,x_n) = \big(a_{11}x_1 + \cdot\cdot + a_{1n}x_n,\ a_{21}x_1 + \cdot\cdot + a_{2n}x_n, ..,\ a_{m1}x_1 + \cdot\cdot + a_{mn}x_n\big)$; où $a_{ij} \in IR$ pour tous i, j.
- Le **noyau** de $f : E \to F$ linéaire est la partie $\boxed{Kerf = \{v \in E /\ f(v) = o_F\}}$ qui est un **s.e.v.** de E.
- L'**image** de $f : E \to F$ linéaire est la partie $\boxed{\operatorname{Im} f = \{f(v) / v \in E\}}$ qui est un **s.e.v.** de F.
- Si $f : E \to F$ est l'application linéaire nulle (i.e. $f(v) = o_F;\ \forall v \in E$), alors $Kerf = E$ et $\operatorname{Im} f = \{o_F\}$.
- L'application identité de E; i.e. Id_E, est linéaire; où $Ker(Id_E) = \{o_E\}$ et $\operatorname{Im}(Id_E) = E$.
- Si $f : E \to F$ est linéaire, alors : $\dim(Kerf) \le \dim E$ et $\dim(\operatorname{Im} f) \le \dim F$.
- Si $f : E \to F$ est linéaire, alors : $E = Vect(v_1, v_2, .., v_n) \Rightarrow \operatorname{Im} f = Vect\big(f(v_1),\ f(v_2), ..,\ f(v_n)\big)$.

  En pratique; on utilise la base canonique de E; donc on a en particulier :
  - Si $f : IR^n \to F$ est linéaire et $\{e_1, e_2, .., e_n\}$ est la base canonique de IR^n, alors on a :

    $\operatorname{Im} f = Vect\big(f(e_1),\ f(e_2), ..,\ f(e_n)\big)$; où $e_1 = (1,0,..,0),\ e_2 = (0,1,..,0), ...,\ e_n = (0,..,0,1)$.
  - Si $f : IR_n[X] \to F$ est linéaire et $\{1, X, X^2, .., X^n\}$ est la base canonique de $IR_n[X]$, alors on a :

    $\operatorname{Im} f = Vect\big(f(1),\ f(X), ..,\ f(X^n)\big)$.
- Si f est linéaire; le nombre $\dim(\operatorname{Im} f)$ est appelé « **le rang** de f »; et on le note $rg(f)$; i.e. مرتبة f

  $\boxed{rg(f) = \dim(\operatorname{Im} f)}$.
- Si $f : E \to F$ est linéaire, alors : $\begin{cases} \boxed{f \text{ est injective } \Leftrightarrow Kerf = \{o_E\} \Leftrightarrow \dim(Kerf) = 0}. \\ \boxed{f \text{ est surjective } \Leftrightarrow \operatorname{Im} f = F \Leftrightarrow \dim(\operatorname{Im} f) = \dim F}. \end{cases}$
- Si $f : E \to F$ est linéaire, alors : $\boxed{\dim E = \dim(Kerf) + \dim(\operatorname{Im} f)}$ (**Théorème du rang**).
- Si $f : E \to F$ est linéaire; avec $\dim E = \dim F$, alors : f injective $\Leftrightarrow$ f surjective $\Leftrightarrow$ f bijective.

  En pratique; on utilise ce résultat si $E = F$; i.e. si f est un endomorphisme.

Kernel ↔ Noyau ↔ نواة

C'est une conséquence du théorème du rang.

Corrigés

Pour bien comprendre, j'ai rédigé les solutions des exercices proposés de manière très détaillée. Je ne vous demande pas de rédiger de la même manière dans les examens, mais au minimum que ce que vous écriviez ait un sens !

للفهم الجيد، كتبت حلول التمارين المعروضة بطريقة جد مفصلة. لا أطلب منكم التحرير بنفس الطريقة في الامتحانات، و لكن في الحد الأدنى كل ما تكتبونه يكون له معنى!

Exercice nº 01:

❶ On verra si l'application $f : IR^3 \to IR$ définie par $f(x,y,z) = x + y + z$ est linéaire ou non.

D'abord; il est clair que les deux ensembles de départ et d'arrivée sont des espaces vectoriels sur IR.

• Soient $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in IR^3$; on a :

$$\begin{aligned} f\big((x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)\big) &= f(x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ z_1+z_2) \\ &= (x_1+x_2)+(y_1+y_2)+(z_1+z_2) \\ &= (x_1+y_1+z_1)+(x_2+y_2+z_2) \\ &= f(x_1,y_1,z_1)+f(x_2,y_2,z_2). \end{aligned}$$

• Soient $\lambda \in IR$ et $(x,y,z) \in IR^3$; on a :

$$\begin{aligned} f\big(\lambda(x,y,z)\big) &= f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \\ &= (\lambda x)+(\lambda y)+(\lambda z) \\ &= \lambda(x+y+z) \\ &= \lambda f(x,y,z). \end{aligned}$$

D'où f est une application linéaire.

❷ On verra si l'application $g : IR^2 \to IR^3$ définie par $g(x,y) = (y, x, x-2y)$ est linéaire ou non.

D'abord; il est clair que les deux ensembles de départ et d'arrivée sont des espaces vectoriels sur IR.

• Soient $(x,y), (x',y') \in IR^2$; on a :

$$\begin{aligned} g\big((x,y)+(x',y')\big) &= g(x+x',\ y+y') \\ &= \big(y+y',\ x+x',\ (x+x')-2(y+y')\big) \\ &= \big(y+y',\ x+x',\ (x-2y)+(x'-2y')\big) \\ &= (y,\ x,\ x-2y)+(y',\ x',\ x'-2y') \quad (\text{car } (\alpha,\beta,\gamma)+(\alpha',\beta',\gamma')=(\alpha+\alpha',\ \beta+\beta',\ \gamma+\gamma')). \\ &= g(x,y)+g(x',y'). \end{aligned}$$

• Soient $\lambda \in IR$ et $(x,y) \in IR^2$; on a :

$$\begin{aligned} g\big(\lambda(x,y)\big) &= g(\lambda x, \lambda y) \\ &= \big(\lambda y,\ \lambda x,\ (\lambda x)-2(\lambda y)\big) \\ &= \big(\lambda y,\ \lambda x,\ \lambda(x-2y)\big) \\ &= \lambda(y,\ x,\ x-2y) \\ &= \lambda g(x,y). \end{aligned}$$

D'où g est une application linéaire.

❸ On verra si l'application $h : IR^2 \to IR$ définie par $h(x,y) = xy$ est linéaire ou non.

D'abord; il est clair que les deux ensembles de départ et d'arrivée sont des espaces vectoriels sur IR.

On remarque pour $\lambda \in IR$ et $(x,y) \in IR^2$; qu'on a :

$$h(\lambda(x,y)) = h(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)(\lambda y) = \lambda^2 xy = \lambda^2 h(x,y) \neq \lambda h(x,y).$$

D'où h n'est pas une application linéaire.

Remarque:

On a aussi; pour $(x,y),(x',y') \in IR^2$, que :
$$\begin{aligned} h((x,y)+(x',y')) &= h(x+x',\, y+y') \\ &= (x+x')(y+y') \\ &= xy + xy' + x'y + x'y' \\ &= h(x,y) + h(x,y') + h(x',y) + h(x',y') \\ &\neq h(x,y) + h(x',y'). \end{aligned}$$

Remarque:

L'application $h: IR^2 \to IR$ n'est pas linéaire; car $h(x,y) \neq \alpha x + \beta y$ (où $\alpha, \beta \in IR$).

❹ On verra si l'application $k: IR^2 \to IR$ définie par $k(a,b) = a\sin x + b\cos y$ est linéaire ou non.

D'abord; il est clair que les deux ensembles de départ et d'arrivée sont des espaces vectoriels sur IR.

Soient $\lambda, \mu \in IR$ et $(a,b),(a',b') \in IR^2$; on a :

$$\begin{aligned} k(\lambda(a,b) + \mu(a',b')) &= k((\lambda a, \lambda b) + (\mu a', \mu b')) \\ &= k(\lambda a + \mu a', \lambda b + \mu b') \\ &= (\lambda a + \mu a')\sin x + (\lambda b + \mu b')\cos y \\ &= \lambda a \sin x + \mu a' \sin x + \lambda b \cos y + \mu b' \cos y \\ &= (\lambda a \sin x + \lambda b \cos y) + (\mu a' \sin x + \mu b' \cos y) \\ &= \lambda(a \sin x + b \cos y) + \mu(a' \sin x + b' \cos y) \\ &= \lambda.k(a,b) + \mu.k(a',b'). \end{aligned}$$

D'où k est une application linéaire.

Remarque:

ou bien $k(x,y) = \alpha x + \beta y$

L'application $k: IR^2 \to IR$ est linéaire; car $h(a,b) = \alpha a + \beta b$ (où $\alpha = \sin x$ et $\beta = \cos y$ sont réels).

❺ On verra si l'application $\ell: IR_2[X] \to IR^3$ définie par $\ell(P) = (P(1), P'(1), P''(1))$ est linéaire ou non.

D'abord; il est clair que les deux ensembles de départ et d'arrivée sont des espaces vectoriels sur IR.

Soient $\lambda, \mu \in IR$ et $P_1, P_2 \in IR_2[X]$; on a :

$$\begin{aligned} \ell(\lambda P_1 + \mu P_2) &= ((\lambda P_1 + \mu P_2)(1), (\lambda P_1 + \mu P_2)'(1), (\lambda P_1 + \mu P_2)''(1)) \\ &= ((\lambda P_1(1) + \mu P_2(1), \lambda P_1'(1) + \mu P_2'(1), \lambda P_1''(1) + \mu P_2''(1)) \\ &= (\lambda P_1(1), \lambda P_1'(1), \lambda P_1''(1)) + (\mu P_2(1), \mu P_2'(1), \mu P_2''(1)) \\ &= \lambda(P_1(1), P_1'(1), P_1''(1)) + \mu(P_2(1), P_2'(1), P_2''(1)) \\ &= \lambda \ell(P_1) + \mu \ell(P_2). \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \cdot\ (\lambda P_1 + \mu P_2)(1) = \lambda P_1(1) + \mu P_2(1) \\ \cdot\ (\lambda P_1 + \mu P_2)'(1) = \lambda P_1'(1) + \mu P_2'(1) \\ \cdot\ (\lambda P_1 + \mu P_2)''(1) = \lambda P_1''(1) + \mu P_2''(1) \end{cases}$$

propriétés des fonctions dérivables

D'où ℓ est une application linéaire.

❻ On verra si l'application $p: IR^2 \to IR^2$ définie par $p(x,y) = (x+y, x+1)$ est linéaire ou non.

D'abord; il est clair que les deux ensembles de départ et d'arrivée sont des espaces vectoriels sur IR.

On remarque que $p(0,0) = (0,1) \neq (0,0)$; d'où p n'est pas linéaire.

Exercice n° 02:

1) Supposons que $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$; et montrons que $g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & F \subset F \arrow[r, "g"] & G \end{tikzcd}$$

donc $g \circ f : E \to G$ définie par $(g \circ f)(v) = g\big(f(v)\big)$

• Soient $u, v \in E$. On a : $(g \circ f)(u+v) = g\big(f(u+v)\big)$

$$\begin{aligned} &= g\big(f(u)+f(v)\big) \quad (\text{car } f \text{ est linéaire}) \\ &= g\big(f(u)\big)+g\big(f(v)\big) \quad (\text{car } g \text{ est linéaire}) \\ &= (g \circ f)(u)+(g \circ f)(v). \end{aligned}$$

• Soient $\lambda \in IK$ et $v \in E$. On a : $(g \circ f)(\lambda v) = g\big(f(\lambda v)\big)$

$$\begin{aligned} &= g\big(\lambda f(v)\big) \quad (\text{car } f \text{ est linéaire}) \\ &= \lambda g\big(f(v)\big) \quad (\text{car } g \text{ est linéaire}) \\ &= \lambda (g \circ f)(v). \end{aligned}$$

D'où $g \circ f$ est une application linéaire de E vers G; i.e. $g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$.

2) Soient E, F et G trois e.v. sur IK; et soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ surjective et $g : F \to G$ une application.

Supposons que $g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$; et montrons que $g \in \mathcal{L}(F,G)$.

• Soient $u, v \in F$; or $f : E \to F$ est surjective, donc il existe $u', v' \in E$ tels que $u = f(u')$ et $v = f(v')$.

On a : $g(u+v) = g\big(f(u')+f(v')\big)$ (car $u = f(u')$ et $v = f(v')$)

$$\begin{aligned} &= g\big(f(u'+v')\big) \quad (\text{car } f \text{ est linéaire}) \\ &= (g \circ f)(u'+v') \\ &= (g \circ f)(u')+(g \circ f)(v') \quad (\text{car } g \circ f \text{ est linéaire}) \\ &= g\big(f(u')\big)+g\big(f(v')\big) \\ &= g(u)+g(v) \quad (\text{car } u = f(u') \text{ et } v = f(v')). \end{aligned}$$

• Soient $\lambda \in IK$ et $v \in F$; or $f : E \to F$ est surjective, donc il existe $v' \in E$ tel que $v = f(v')$.

On a : $g(\lambda v) = g\big(\lambda f(v')\big)$ (car $v = f(v')$)

$$\begin{aligned} &= g\big(f(\lambda v')\big) \quad (\text{car } f \text{ est linéaire}) \\ &= (g \circ f)(\lambda v') \\ &= \lambda (g \circ f)(v') \quad (\text{car } g \circ f \text{ est linéaire}) \\ &= \lambda g\big(f(v')\big) \\ &= \lambda g(v) \quad (\text{car } v = f(v')). \end{aligned}$$

D'où $g : F \to G$ est une application linéaire; i.e. $g \in \mathcal{L}(F,G)$.

3) Supposons que f soit isomorphisme; et montrons que f^{-1} est isomorphisme.

Supposons donc que $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est bijective; et montrons que $f^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$ est bijective.

Mais on sait que si $f : E \to F$ est bijective, alors $f^{-1} : F \to E$ est bijective (résultat très connu). pour les applications bijectives

Donc on montre seulement que $f^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$; en effet, soient $\lambda, \mu \in IK$ et $u, v \in F$.

Puisque $f : E \to F$ est bijective et $u, v \in F$, alors il existe $\underset{\text{uniques}}{u', v'} \in E$ tels que $u = f(u')$ et $v = f(v')$.

Par suite : $f^{-1}(\lambda u+\mu v)= f^{-1}\big(\lambda f(u')+\mu f(v')\big)$

$= f^{-1}\big(f(\lambda u'+\mu v')\big)$ (car $\lambda f(u')+\mu f(v')= f(\lambda u'+\mu v')$; puisque $f\in \mathcal{L}(E,F)$)

$=(f^{-1}\circ f)(\lambda u'+\mu v')$

$=Id_E(\lambda u'+\mu v')$ (car $f^{-1}\circ f=Id_E$; où $Id_E:E\to E$ définie par $Id_E(x)=x$)

$=\lambda u'+\mu v'$ (car $Id_E(\lambda u'+\mu v')=\lambda u'+\mu v'$)

$=\lambda Id_E(u')+\mu Id_E(v')$ (car $Id_E(u')=u'$ et $Id_E(v')=v'$)

$=\lambda(f^{-1}\circ f)(u')+\mu(f^{-1}\circ f)(v')$ (car $f^{-1}\circ f=Id_E$)

$=\lambda f^{-1}\big(f(u')\big)+\mu f^{-1}\big(f(v')\big)$

$=\lambda f^{-1}(u)+\mu f^{-1}(v)$ (car $u=f(u')$ et $v=f(v')$).

D'où $f^{-1}:F\to E$ est une application linéaire; i.e. $f^{-1}\in \mathcal{L}(F,E)$.

Exercice nº 03:

Soit $f:IR^3\to IR^3$ une application linéaire définie par $f(x,y,z)=(y+z,\ x+y+z,\ x)$.

1) On détermine $Kerf$ et $\operatorname{Im} f$ (i.e. on les écrit comme des sous-espaces engendrés par des vecteurs).

• On a : $Kerf=\{(x,y,z)\in IR^3/\ f(x,y,z)=(0,0,0)\}$

$=\{(x,y,z)\in IR^3/\ (y+z,\ x+y+z,\ x)=(0,0,0)\}$

$=\{(x,y,z)\in IR^3/\ y+z=0 \text{ et } x+y+z=0 \text{ et } x=0\}$

$=\{(x,y,z)\in IR^3/\ y+z=0 \text{ et } y+z=0 \text{ et } x=0\}$

Autrement dit; on résoudra le système : $\begin{cases} y+z=0\\ x+y+z=0\\ x=0\end{cases}$

$=\{(x,y,z)\in IR^3/\ y+z=0 \text{ et } x=0\}$

$=\{(x,y,z)\in IR^3/\ y=-z \text{ et } x=0\}$

$=\{(0,-z,z)/\ z\in IR\}$

$=\{z(0,-1,1)/\ z\in IR\}$

$=Vect\big((0,-1,1)\big)$.

• On a : $\operatorname{Im} f=\{f(x,y,z)/\ (x,y,z)\in IR^3\}$

$=\{(y+z,x+y+z,x)/\ x,y,z\in IR\}$

$=\{(0,x,x)+(y,y,0)+(z,z,0)/\ x,y,z\in IR\}$

$=\{x(0,1,1)+y(1,1,0)+z(1,1,0)/\ x,y,z\in IR\}$

$=Vect\big((0,1,1),(1,1,0),(1,1,0)\big)$

$=Vect\big((0,1,1),(1,1,0)\big)$.

deuxième méthode

Ou bien; par un résultat, comme $f:IR^3\to IR^3$, alors $\operatorname{Im} f=Vect\big(f(e_1),\ f(e_2),\ f(e_3)\big)$; où $\{e_1,e_2,e_3\}$ est la base canonique de IR^3.

Avec : $\begin{cases} f(e_1)=f(1,0,0)=(0,1,1)\\ f(e_2)=f(0,1,0)=(1,1,0)\\ f(e_3)=f(0,0,1)=(1,1,0)\end{cases}$

Par suite : $\operatorname{Im} f=Vect\big((0,1,1),(1,1,0),(1,1,0)\big)=Vect\big((0,1,1),(1,1,0)\big)$.

2) • On verra si f est un isomorphisme; i.e. si elle est bijective.

Comme $Kerf = Vect\big((0,-1,1)\big) \neq \{(0,0,0)\}$, alors f n'est pas injective; d'où f n'est pas bijective.

Par suite; f n'est pas un isomorphisme.

• Le rang de f est par définition : $rg(f) = \dim(\operatorname{Im} f)$.

On a $Kerf = Vect\big((0,-1,1)\big)$; or $(0,-1,1)$ est libre, donc $\{(0,-1,1)\}$ est une base de $Kerf$; d'où $\dim(Kerf) = 1$.

Par suite; d'après le Théorème du rang, on a $\dim(\operatorname{Im} f) = \underbrace{\dim IR^3}_{\text{l'espace de départ de } f} - \dim(Kerf) = 3 - 1 = 2$; d'où $rg(f) = 2$.

deuxième méthode

Ou bien; comme $\operatorname{Im} f = Vect\big((0,1,1), (1,1,0)\big)$; où les deux vecteurs $(0,1,1)$ et $(1,1,0)$ sont libres; car :

$\forall \alpha, \beta \in IR$: $\alpha(0,1,1) + \beta(1,1,0) = (0,0,0) \Leftrightarrow (\beta, \alpha+\beta, \alpha) = (0,0,0) \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$.

On a donc $\{(0,1,1), (1,1,0)\}$ est une base de $\operatorname{Im} f$; d'où $\dim(\operatorname{Im} f) = 2$; i.e. $rg(f) = 2$.

3) Montrons que $IR^3 = Kerf \oplus \operatorname{Im} f$ (i.e. $IR^3 = Kerf + \operatorname{Im} f$ et $Kerf \cap \operatorname{Im} f = \{(0,0,0)\}$).

D'abord; dans ce cas, le noyau et l'image sont des s.e.v. du même espace vectoriel.

• $\boxed{IR^3 = Kerf + \operatorname{Im} f}$: On a d'après **(1)**; que : $Kerf = Vect\big((0,-1,1)\big)$ et $\operatorname{Im} f = Vect\big((0,1,1), (1,1,0)\big)$.

Par suite : $Kerf + \operatorname{Im} f = Vect\big((0,-1,1), (0,1,1), (1,1,0)\big)$.

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in IR$. On a : $\alpha(0,-1,1) + \beta(0,1,1) + \gamma(1,1,0) = (0,0,0) \Leftrightarrow (\gamma, -\alpha+\beta+\gamma, \alpha+\beta) = (0,0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ -\alpha+\beta+\gamma = 0 \\ \alpha+\beta = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ -\alpha+\beta = 0 \\ \alpha+\beta = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Ceci signifie que les vecteurs $(0,-1,1), (0,1,1), (1,1,0)$ sont libres.

La famille $\{(0,-1,1), (0,1,1), (1,1,0)\}$ forme donc une base de $Kerf + \operatorname{Im} f$; d'où $\dim(Kerf + \operatorname{Im} f) = 3$.

Finalement; comme $Kerf + \operatorname{Im} f \subset IR^3$ et $\dim(Kerf + \operatorname{Im} f) = \dim IR^3$, alors $IR^3 = Kerf + \operatorname{Im} f$.

• $\boxed{Kerf \cap \operatorname{Im} f = \{(0,0,0)\}}$: On a : $\dim(Kerf \cap \operatorname{Im} f) = \underbrace{\dim(Kerf) + \dim(\operatorname{Im} f)}_{= \dim IR^3 \text{ (Théorème du rang)}} - \underbrace{\dim(Kerf + \operatorname{Im} f)}_{= 3 \text{ (d'après ce qui précède)}}$.

Théorème de la dimension

Par suite : $\dim(Kerf \cap \operatorname{Im} f) = 3 - 3 = 0$; d'où $Kerf \cap \operatorname{Im} f = \{(0,0,0)\}$.

d'après ce qui précède

Ou bien; $Kerf = Vect\big((0,-1,1)\big)$ et $\operatorname{Im} f = Vect\big((0,1,1), (1,1,0)\big)$; où $(0,-1,1), (0,1,1), (1,1,0)$ sont libres.

deuxième méthode

Toute partie d'une famille libre est libre

Par suite $(0,-1,1)$ est libre; et $(0,1,1), (1,1,0)$ sont libres.

Ceci signifie que $\{(0,-1,1)\}$ est une base de $Kerf$; et $\{(0,1,1), (1,1,0)\}$ est une base de $\operatorname{Im} f$.

D'où $\dim(Kerf \cap \operatorname{Im} f) = \dim(Kerf) + \dim(\operatorname{Im} f) - \dim(Kerf + \operatorname{Im} f) = 1 + 2 - 3 = 0$.

Exercice n° 04:

Soit $f : IR^3 \to IR^2$ une application définie par $f(x,y,z) = (-2x + y + z, x - 2y + z)$.

1) Montrons que f est linéaire; en effet :

D'abord; il est clair que les deux ensembles; de départ et d'arrivée, sont des espaces vectoriels sur le même corps IR.

• Soient $(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)\in IR^3$; on a :

$$\begin{aligned} f\big((x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)\big) &= f(x_1+x_2,\, y_1+y_2,\, z_1+z_2) \\ &= \big(-2(x_1+x_2)+(y_1+y_2)+(z_1+z_2),\, (x_1+x_2)-2(y_1+y_2)+(z_1+z_2)\big) \\ &= \big(-2x_1-2x_2+y_1+y_2+z_1+z_2,\, x_1+x_2-2y_1-2y_2+z_1+z_2\big) \\ &= \big((-2x_1+y_1+z_1)+(-2x_2+y_2+z_2), (x_1-2y_1+z_1)+(x_2-2y_2+z_2)\big) \\ &= \big(-2x_1+y_1+z_1,\, x_1-2y_1+z_1\big)+\big(-2x_2+y_2+z_2,\, x_2-2y_2+z_2\big) \\ &= f(x_1,y_1,z_1)+f(x_2,y_2,z_2). \end{aligned}$$

• Soient $\lambda\in IR$ et $(x,y,z)\in IR^3$; on a :

$$\begin{aligned} f\big(\lambda(x,y,z)\big) &= f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \\ &= \big(-2(\lambda x)+(\lambda y)+(\lambda z),\, (\lambda x)-2(\lambda y)+(\lambda z)\big) \\ &= \big(\lambda(-2x+y+z),\, \lambda(x-2y+z)\big) \\ &= \lambda\big(-2x+y+z,\, x-2y+z\big) \\ &= \lambda f(x,y,z). \end{aligned}$$

D'où f est une application linéaire.

2) On détermine $Kerf$ et $\operatorname{Im} f$ (i.e. on les écrit comme des sous-espaces engendrés par des vecteurs).

• On a :
$$\begin{aligned} Kerf &= \{(x,y,z)\in IR^3 /\ f(x,y,z)=(0,0)\} \\ &= \{(x,y,z)\in IR^3 /\ (-2x+y+z,\, x-2y+z)=(0,0)\} \\ &= \{(x,y,z)\in IR^3 /\ -2x+y+z=0 \text{ et } x-2y+z=0\}. \end{aligned}$$

On résout donc le système $\begin{cases} -2x+y+z=0 \cdots\ (i) \\ x-2y+z\ =0 \cdots (ii) \end{cases}$

De (i); on a $z=2x-y$, puis on le remplace dans (ii); on obtient $x-2y+(2x-y)=0$; i.e. $3x-3y=0$, d'où $\boxed{x=y}$. Par suite $z=2x-y=2y-y=y$; i.e. $\boxed{z=y}$.

On a donc :
$$\begin{aligned} Kerf &= \{(x,y,z)\in IR^3 /\ x=y \text{ et } z=y\} \\ &= \{(y,y,y)/\ y\in IR\} \\ &= \{y(1,1,1)/\ y\in IR\} \\ &= Vect\big((1,1,1)\big). \end{aligned}$$

• Comme $f: IR^3\to IR^2$, alors $\operatorname{Im} f = Vect\big(f(e_1),\, f(e_2),\, f(e_3)\big)$; où $\{e_1,e_2,e_3\}$ est la base canonique de IR^3, avec : $\begin{cases} f(e_1)=f(1,0,0)=(-2,1) \\ f(e_2)=f(0,1,0)=(1,-2) \\ f(e_3)=f(0,0,1)=(1,1) \end{cases}$ ◄ $f(x,y,z)=(-2x+y+z,\, x-2y+z)$

Par suite : $\operatorname{Im} f = Vect\big((-2,1),(1,-2),(1,1)\big)$.

3) • Une base de $Kerf$:

car il est non nul ↓ donc $\dim(Kerf)=1$

Comme $Kerf = Vect\big((1,1,1)\big)$ et le vecteur $(1,1,1)$ est libre, alors $\{(1,1,1)\}$ est une base de $Kerf$.

• Une base de $\operatorname{Im} f$:

D'abord; comme $f: IR^3\to IR^2$, alors d'après le Théorème du rang; on a $\dim IR^3 = \dim(Kerf)+\dim(\operatorname{Im} f)$.

D'où $\dim(\operatorname{Im} f)=\dim IR^3-\dim(Kerf)=3-1=2$; i.e. $\boxed{\dim(\operatorname{Im} f)=2}$.

Maintenant; comme $\operatorname{Im} f = Vect\big((-2,1),(1,-2),(1,1)\big)$ et $\dim(\operatorname{Im} f) = \mathbf{2}$, alors chaque **deux** vecteurs libres parmi les trois $(-2,1),(1,-2),(1,1)$; forment une base de $\operatorname{Im} f$.

Rappel: Soit E un espace vectoriel où $\dim E = n$; et soient $v_1, v_2, .., v_n \in E$.
Alors : $\{v_1, v_2, .., v_n\}$ est une base de $E \Leftrightarrow E = Vect(v_1, v_2, .., v_n) \Leftrightarrow v_1, v_2, .., v_n$ sont libres.

Par exemple; pour les deux vecteurs $(1,-2)$ et $(1,1)$, on a :

$$\forall \alpha, \beta \in IR:\ \alpha(1,-2) + \beta(1,1) = (0,0) \Leftrightarrow (\alpha+\beta, -2\alpha+\beta) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta = 0 \\ -2\alpha+\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\beta \\ -2\alpha+\beta = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\beta \\ -2(-\beta)+\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\beta \\ 3\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\beta \\ \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

Donc $(1,-2),(1,1)$ sont libres; d'où $\{(1,-2),(1,1)\}$ forme une base de $\operatorname{Im} f$.

4) • Puisque $Kerf = Vect\big((1,1,1)\big) \neq \{(0,0,0)\}$, alors f n'est pas injective.

• Puisque $\operatorname{Im} f \subset IR^2$ (car $f : IR^3 \to IR^2$) et $\dim(\operatorname{Im} f) = \dim IR^2$, alors $\operatorname{Im} f = IR^2$; d'où f est surjective.

• Puisque f n'est pas injective, alors elle n'est pas bijective.

Exercice n° 05:

Soit $f : IR^3 \to IR^3$ une application linéaire définie par $f(x,y,z) = (x-z, 2x+y-3z, -y+2z)$.

1) On calcule $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$; où $\{e_1, e_2, e_3\}$ est la base canonique de IR^3.

On a : $\begin{cases} f(e_1) = f(1,0,0) = (1,2,0) \\ f(e_2) = f(0,1,0) = (0,1,-1) \\ f(e_3) = f(0,0,1) = (-1,-3,2) \end{cases}$

2) • On cherche une base de $Kerf$:

On a : $Kerf = \{(x,y,z) \in IR^3 /\ f(x,y,z) = (0,0,0)\}$
$= \{(x,y,z) \in IR^3 /\ (x-z, 2x+y-3z, -y+2z) = (0,0,0)\}$
$= \{(x,y,z) \in IR^3 /\ x-z = 0$ et $2x+y-3z = 0$ et $-y+2z = 0\}$
$= \{(x,y,z) \in IR^3 /\ x = z$ et $2x+y-3z = 0$ et $y = 2z\}$
$= \{(x,y,z) \in IR^3 /\ x = z$ et $2(z)+(2z)-3z = 0$ et $y = 2z\}$
$= \{(x,y,z) \in IR^3 /\ x = z$ et $z = 0$ et $y = 2z\}$
$= \{(0,0,0)\}$.

Autrement dit; on résout le système : $\begin{cases} x-z = 0 \\ 2x+y-3z = 0 \\ -y+2z = 0 \end{cases}$

Ceci signifie que $Kerf$ n'a pas de base (mais par convention $\dim(Kerf) = 0$).

• On cherche une base de $\operatorname{Im} f$:

On a : $\operatorname{Im} f = Vect\big(f(e_1), f(e_2), f(e_3)\big) \overset{\text{d'après } \mathbf{(1)}}{=} Vect\big((1,2,0),(0,1,-1),(-1,-3,2)\big)$.

Mais; d'après le Théorème du rang, on a $\dim(\operatorname{Im} f) = \dim IR^3 - \dim(Kerf) = 3 - 0 = 3$; d'où la famille de vecteurs $\{(1,2,0),(0,1,-1),(-1,-3,2)\}$ est une base de $\operatorname{Im} f$.

3) • Puisque $Kerf = \{(0,0,0)\}$, alors f est injective.

• Puisque $\operatorname{Im} f \subset \underset{\text{l'espace d'arrivée}}{IR^3}$ et $\dim(\operatorname{Im} f) = \dim IR^3$, alors $\operatorname{Im} f = IR^3$; d'où f est surjective.

• Puisque f est injective et surjective, alors elle est bijective.

• $rg(f) = \dim(\operatorname{Im} f) = 3.$

Exercice n° 06:

Soit $f : IR^4 \to IR^4$ une application linéaire définie par $f(x,y,z,t) = (x-2y,\, x-2y-3z,\, 0,\, x-y-z-t).$

1) • On a :
$$\begin{aligned}
Kerf &= \left\{(x,y,z,t)\in IR^4 /\ f(x,y,z,t) = (0,0,0,0)\right\}\\
&= \left\{(x,y,z,t)\in IR^4 /\ (x-2y,\, x-2y-3z,\, 0,\, x-y-z-t) = (0,0,0,0)\right\}\\
&= \left\{(x,y,z,t)\in IR^4 /\ x-2y=0 \text{ et } x-2y-3z=0 \text{ et } 0=0 \text{ et } x-y-z-t=0\right\}\\
&= \left\{(x,y,z,t)\in IR^4 /\ x=2y \text{ et } x-2y-3z=0 \text{ et } x-y-z-t=0\right\}\\
&= \left\{(x,y,z,t)\in IR^4 /\ x=2y \text{ et } (2y)-2y-3z=0 \text{ et } (2y)-y-z-t=0\right\}\\
&= \left\{(x,y,z,t)\in IR^4 /\ x=2y \text{ et } z=0 \text{ et } y-z-t=0\right\}\\
&= \left\{(x,y,z,t)\in IR^4 /\ x=2y \text{ et } z=0 \text{ et } y-t=0\right\}\\
&= \left\{(x,y,z,t)\in IR^4 /\ x=2y \text{ et } z=0 \text{ et } t=y\right\}\\
&= \left\{(2y,y,0\,y) /\ y\in IR\right\}\\
&= \left\{y(2,1,0,1) /\ y\in IR\right\}\\
&= Vect\big((2,1,0,1)\big).
\end{aligned}$$

Autrement dit; on résout le système : $\begin{cases} x-2y = 0\\ x-2y-3z=0\\ x-y-z-t=0\end{cases}$

l'espace de départ

• On a : $\operatorname{Im} f = Vect\big(f(e_1),\ f(e_2),\ f(e_3),\ f(e_4)\big)$; où $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ est la base canonique de l'espace IR^4.

Avec : $\begin{cases} f(e_1) = f(1,0,0,0) = (1,1,0,1)\\ f(e_2) = f(0,1,0,0) = (-2,-2,0,-1)\\ f(e_3) = f(0,0,1,0) = (0,-3,0,-1)\\ f(e_4) = f(0,0,0,1) = (0,0,0,-1)\end{cases}$

Par suite : $\operatorname{Im} f = Vect\big((1,1,0,1),\,(-2,-2,0,-1),\,(0,-3,0,-1),\,(0,0,0,-1)\big).$

2) On verra si $IR^4 = Kerf \oplus \operatorname{Im} f$; i.e. si $IR^4 = Kerf + \operatorname{Im} f$ et $Kerf \cap \operatorname{Im} f = \{(0,0,0,0)\}.$

D'abord; dans ce cas, $Kerf$ et $\operatorname{Im} f$ sont des s.e.v. du **même espace vectoriel** IR^4 (car $f : IR^4 \to IR^4$).

$\boxed{IR^4 = Kerf + \operatorname{Im} f}$ **?**

• Une base de $Kerf$:

car il est non nul

Comme $Kerf = Vect\big((2,1,0,1)\big)$ et le vecteur $(2,1,0,1)$ est libre, alors $\{(2,1,0,1)\}$ est une base de $Kerf$.

On a donc $\dim(Kerf) = 1.$

• Une base de $\operatorname{Im} f$:

On a : $\operatorname{Im} f = Vect\big((1,1,0,1),\,(-2,-2,0,-1),\,(0,-3,0,-1),\,(0,0,0,-1)\big).$

D'abord; d'après le Théorème du rang, on a : $\dim(\operatorname{Im} f) = \dim IR^4 - \dim(Kerf) = 4-1 = 3.$

Donc; chaque **trois vecteurs libres** parmi les quatre vecteurs $(1,1,0,1), (-2,-2,0,-1), (0,-3,0,-1), (0,0,0,-1)$ forment une base de $\operatorname{Im} f$. On verra si les trois vecteurs $(1,1,0,1), (0,-3,0,-1), (0,0,0,-1)$ sont libres.

Soient $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \in IR$. Alors on a : par exemple

$$\begin{aligned}
\lambda_1(1,1,0,1)+\lambda_2(0,-3,0,-1)+\lambda_3(0,0,0,-1) = (0,0,0,0) &\Leftrightarrow (\lambda_1,\, \lambda_1-3\lambda_2,\, 0,\, \lambda_1-\lambda_2-\lambda_3) = (0,0,0,0)\\
&\Leftrightarrow \lambda_1 = 0 \text{ et } \lambda_1 - 3\lambda_2 = 0 \text{ et } \lambda_1-\lambda_2-\lambda_3 = 0\\
&\Leftrightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3 = 0.
\end{aligned}$$

Par suite $(1,1,0,1), (0,-3,0,-1), (0,0,0,-1)$ sont libres; d'où $\{(1,1,0,1), (0,-3,0,-1), (0,0,0,-1)\}$ forme une base de $\operatorname{Im} f$.

• Une base de $Kerf + \operatorname{Im} f$:

les vecteurs de la base

Comme $Kerf = Vect((2,1,0,1))$ et $\operatorname{Im} f = Vect((1,1,0,1), (0,-3,0,-1), (0,0,0,-1))$, alors on a :

$Kerf + \operatorname{Im} f = Vect((2,1,0,1), (1,1,0,1), (0,-3,0,-1), (0,0,0,-1))$.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in IR$; on a : $\lambda_1(2,1,0,1) + \lambda_2(1,1,0,1) + \lambda_3(0,-3,0,-1) + \lambda_4(0,0,0,-1) = (0,0,0,0)$

$$\Leftrightarrow (2\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3, 0, \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4) = (0,0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = -2\lambda_1 \\ \lambda_1 + (-2\lambda_1) - 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + (-2\lambda_1) - \lambda_3 - \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = -2\lambda_1 \\ -\lambda_1 - 3\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 - \lambda_3 - \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = -2\lambda_1 \\ \lambda_3 = -\frac{1}{3}\lambda_1 \\ -\lambda_1 - (-\frac{1}{3}\lambda_1) - \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = -2\lambda_1 \\ \lambda_3 = -\frac{1}{3}\lambda_1 \\ -\frac{2}{3}\lambda_1 - \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

quelconque

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = -2\lambda_1 \\ \lambda_3 = -\frac{1}{3}\lambda_1 \\ \lambda_4 = -\frac{2}{3}\lambda_1 \end{cases}$$ (Le système admet donc une infinité de solutions; où $\lambda_1 \in IR$)

$$\not\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0.$$

Par suite; les vecteurs $(2,1,0,1), (1,1,0,1), (0,-3,0,-1), (0,0,0,-1)$ sont **liés**; donc $\dim(Kerf + \operatorname{Im} f) < 4$.

Ceci signifie que $IR^4 \neq Kerf + \operatorname{Im} f$; d'où IR^4 n'est pas somme directe de $Kerf$ et $\operatorname{Im} f$.

<u>Remarque:</u>

Puisque $\dim(Kerf + \operatorname{Im} f) < 4$, alors $\boxed{\dim(Kerf + \operatorname{Im} f) \leq 3}$. De plus; comme $\operatorname{Im} f \subset Kerf + \operatorname{Im} f$, alors $\dim(\operatorname{Im} f) \leq \dim(Kerf + \operatorname{Im} f)$; or $\dim(\operatorname{Im} f) = 3$, donc $\boxed{3 \leq \dim(Kerf + \operatorname{Im} f)}$.

Par suite $\dim(Kerf + \operatorname{Im} f) = 3$; d'où $Kerf + \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f$. Ceci signifie que $Kerf \subset \operatorname{Im} f$.

Si F et G deux s.e.v., alors:
$\begin{cases} .\ F + G = F \Leftrightarrow G \subset F \\ .\ F + G = G \Leftrightarrow F \subset G \end{cases}$

$IR_2[X]=Vect(1,X,X^2)=\{a_0+a_1X+a_2X^2/\ a_0,a_1,a_2\in IR\}$

Exercice n° 07:

Soit $E=IR_2[X]$; et soit $f:E\to E$ une application définie par $f(P)=-\frac{1}{2}(X+1)^2P''+(X+1)P'$.

1) • Montrons que f est un endomorphisme de E; i.e. f est une application linéaire.

On a utilisé des propriétés sur les fonctions dérivables.

Soient $P,Q\in E$; on a : $f(P+Q)=-\frac{1}{2}(X+1)^2(P+Q)''+(X+1)(P+Q)'$

$$=-\tfrac{1}{2}(X+1)^2(P''+Q'')+(X+1)(P'+Q')$$
$$=-\tfrac{1}{2}(X+1)^2P''-\tfrac{1}{2}(X+1)^2Q''+(X+1)P'+(X+1)Q'$$
$$=\left(-\tfrac{1}{2}(X+1)^2P''+(X+1)P'\right)+\left(-\tfrac{1}{2}(X+1)^2Q''+(X+1)Q'\right)$$
$$=f(P)+f(Q).$$

Soient $\lambda\in IR$ et $P\in E$; on a : $f(\lambda P)=-\frac{1}{2}(X+1)^2(\lambda P)''+(X+1)(\lambda P)'$

$$=-\tfrac{1}{2}(X+1)^2(\lambda P'')+(X+1)(\lambda P')$$
$$=\lambda\left(-\tfrac{1}{2}(X+1)^2P''+(X+1)P'\right)$$
$$=\lambda f(P).$$

D'où f est une application linéaire.

• Montrons que $f\circ f=f$; i.e. $\forall P\in E:(f\circ f)(P)=f(P)$.

donc $P^{(k)}=0;\forall k\ge 3$

Soit $P\in E$; donc $P=a_0+a_1X+a_2X^2$ où $a_0,a_1,a_2\in IR$ ($\Rightarrow P'=a_1+2a_2X$ et $P''=2a_2$).

On a : $(f\circ f)(P)=f\big(f(P)\big)$

$$=f\left(-\tfrac{1}{2}(X+1)^2P''+(X+1)P'\right)$$
$$=-\tfrac{1}{2}(X+1)^2\left(-\tfrac{1}{2}(X+1)^2P''+(X+1)P'\right)''+(X+1)\left(-\tfrac{1}{2}(X+1)^2P''+(X+1)P'\right)';\text{ où :}$$

$$\begin{cases}\bullet\ \left(-\tfrac{1}{2}(X+1)^2P''+(X+1)P'\right)'=-\cancel{(X+1)}P''-\underbrace{\tfrac{1}{2}(X+1)^2P'''}_{=\mathbf{0}\ (\text{car } P'''=\mathbf{0})}+P'+\cancel{(X+1)}P''=P'.\\ \bullet\ \left(-\tfrac{1}{2}(X+1)^2P''+(X+1)P'\right)''=(P')'=P''.\end{cases}$$

Par suite : $(f\circ f)(P)=-\frac{1}{2}(X+1)^2P''+(X+1)P'=f(P)$.

On a montré donc que $\forall P\in E:(f\circ f)(P)=f(P)$; d'où $f\circ f=f$.

$\mathbf{0}=0+0X+0X^2$

2) • On a : $Kerf=\{P\in E/\ f(P)=\mathbf{0}\}$ (où $\mathbf{0}$ est le polynôme nul de E)

$$=\left\{P\in E/-\tfrac{1}{2}(X+1)^2P''+(X+1)P'=\mathbf{0}\right\}$$
$$=\left\{a_0+a_1X+a_2X^2/\ a_0,a_1,a_2\in IR\text{ et }-\tfrac{1}{2}(X+1)^2(2a_2)+(X+1)(a_1+2a_2X)=\mathbf{0}\right\}$$
$$=\left\{a_0+a_1X+a_2X^2/\ a_0,a_1,a_2\in IR\text{ et }(X+1)\big(-a_2(X+1)+(a_1+2a_2X)\big)=\mathbf{0}\right\}$$
$$=\left\{a_0+a_1X+a_2X^2/\ a_0,a_1,a_2\in IR\text{ et }(X+1)\big((a_1-a_2)+a_2X\big)=\mathbf{0}\right\}$$
$$=\left\{a_0+a_1X+a_2X^2/\ a_0,a_1,a_2\in IR\text{ et }(a_1-a_2)+a_2X=\mathbf{0}\right\}\ (\text{car } X+1\neq\mathbf{0})$$
$$=\left\{a_0+a_1X+a_2X^2/\ a_0,a_1,a_2\in IR\text{ et }a_1-a_2=0\text{ et }a_2=0\right\}$$
$$=\left\{a_0+a_1X+a_2X^2/\ a_0,a_1,a_2\in IR\text{ et }a_1=0\text{ et }a_2=0\right\}$$
$$=\left\{a_0+0X+0X^2/\ a_0\in IR\right\}$$
$$=\left\{a_0/\ a_0\in IR\right\}$$
$$=\left\{a_0\times 1/\ a_0\in IR\right\}$$
$$=Vect(1).$$

car $f:\mathbf{E}\to E$

Comme $Ker f = Vect(1)$ et $1\neq \mathbf{0}$, alors $\{1\}$ est une base de $Ker f$; d'où $\dim(Ker f)=1$.

• On a : $\operatorname{Im} f = Vect\big(f(1),\ f(X),\ f(X^2)\big)$; où $\{1,\ X,\ X^2\}$ est la base canonique de $\mathbf{E}=IR_2[X]$.

Où : $\begin{cases} f(\mathbf{1}) = -\frac{1}{2}(X+1)^2(\mathbf{1})'' + (X+1)(\mathbf{1})' = -\frac{1}{2}(X+1)^2\mathbf{0} + (X+1)\mathbf{0}\ \boxed{=\mathbf{0}}. \\ f(\mathbf{X}) = -\frac{1}{2}(X+1)^2(\mathbf{X})'' + (X+1)(\mathbf{X})' = -\frac{1}{2}(X+1)^2\mathbf{0} + (X+1)\mathbf{1} = X+1\ \boxed{=1+X}. \\ f(\mathbf{X^2}) = -\frac{1}{2}(X+1)^2(\mathbf{X^2})'' + (X+1)(\mathbf{X^2})' = -\frac{1}{2}(X+1)^2\mathbf{2} + (X+1)(\mathbf{2X}) = X^2-1\ \boxed{=-1+X^2}. \end{cases}$

Par suite : $\operatorname{Im} f = Vect\big(\mathbf{0},\ 1+X,\ -1+X^2\big) = Vect\big(1+X,\ -1+X^2\big)$; i.e. $\operatorname{Im} f = Vect\big(1+X,\ -1+X^2\big)$.

D'autre part; du Théorème du rang, on a : $\dim(\operatorname{Im} f) = \dim E - \dim(Ker f) = 3-1 = 2$.

D'où $\{1+X,\ -1+X^2\}$ est une base de $\operatorname{Im} f$.

$\dim\big(IR_2[X]\big)=3$

3) Montrons que $E = Ker f \oplus \operatorname{Im} f$; en effet :

• $\boxed{E = Ker f + \operatorname{Im} f}$:

Comme $Ker f = Vect(1)$ et $\operatorname{Im} f = Vect\big(1+X,\ -1+X^2\big)$, alors $Ker f + \operatorname{Im} f = Vect\big(1,\ 1+X,\ -1+X^2\big)$.

Soient $\alpha,\beta,\gamma\in IR$. On a : $\alpha\times 1 + \beta(1+X) + \gamma(-1+X^2) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \alpha+\beta+\beta X - \gamma + \gamma X^2 = \mathbf{0}$

$$\Leftrightarrow (\alpha+\beta-\gamma) + \beta X + \gamma X^2 = \mathbf{0}$$

$\mathbf{0} = 0+0X+0X^2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta-\gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \alpha=\beta=\gamma=0.$$

Donc les vecteurs $1,\ 1+X,\ -1+X^2$ sont libres; d'où $\{1,\ 1+X,\ -1+X^2\}$ est une base de $Ker f + \operatorname{Im} f$.

Par suite $\dim(Ker f + \operatorname{Im} f) = 3$.

Finalement; comme $\dim(Ker f + \operatorname{Im} f) = \dim E$ et $Ker f + \operatorname{Im} f \subset E$, alors $E = Ker f + \operatorname{Im} f$.

• $\boxed{Ker f \cap \operatorname{Im} f = \{\mathbf{0}\}}$:

On a : $\dim(Ker f \cap \operatorname{Im} f) = \dim(Ker f) + \dim(\operatorname{Im} f) - \dim(Ker f + \operatorname{Im} f) = 1+2-3 = 0$.

D'où $Ker f \cap \operatorname{Im} f = \{\mathbf{0}\}$.

Exercice n° 08:

Soient E et F deux e.v. sur IK; et soit $f: E\to F$ une application linéaire.

Supposons que $E = Vect(v_1, v_2, .., v_n)$ et montrons que $\operatorname{Im} f = Vect\big(f(v_1),\ f(v_2), ..,\ f(v_n)\big)$; en effet :

On a : $\operatorname{Im} f = \{f(v) \,/\, v\in E\}$

$$= \{f(v) \,/\, \exists \lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n \in IK: v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n\} \quad (\text{car } E = Vect(v_1, v_2, .., v_n))$$

$$= \{f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n) \,/\, \lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n \in IK\}$$

$$= \{\lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) + \cdots + \lambda_n f(v_n) \,/\, \lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n \in IK\} \quad (\text{car } f \text{ est linéaire})$$

$$= Vect\big(f(v_1),\ f(v_2), ..,\ f(v_n)\big).$$

Exercice n° 09:

Soient E et F deux e.v. sur IK, $\{v_1,v_2,v_3\}$ une base de E et $\{u_1,u_2,u_3\}$ une famille de vecteurs de F.

Soit $f: E \to F$ une application linéaire qui vérifie $f(v_1)=u_1$, $f(v_2)=u_2$ et $f(v_3)=u_3$.

1) Montrons que : f est injective $\Leftrightarrow \{u_1,u_2,u_3\}$ est une famille libre.

($\Rightarrow$) Supposons que f soit injective et montrons que u_1,u_2,u_3 sont libres; en effet :

Soient $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \in IK$. On a : $\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2+\lambda_3 u_3 = o_F \Rightarrow \lambda_1 f(v_1)+\lambda_2 f(v_2)+\lambda_3 f(v_3)=o_F$

$\Rightarrow f(\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\lambda_3 v_3)=o_F$ (car f est linéaire)

$\Rightarrow f(\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\lambda_3 v_3)=f(o_E)$ (car $f(o_E)=o_F$)

Ou bien; on a $\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\lambda_3 v_3 \in Kerf$ où f est injective; i.e. $Kerf=\{o_E\}$.

$\Rightarrow \lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\lambda_3 v_3 = o_E$ (car f est injective)

$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ (car v_1,v_2,v_3 sont libres).

On a montré que $\forall \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \in IK$: $\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2+\lambda_3 u_3=o_F \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$; d'où u_1,u_2,u_3 sont libres.

($\Leftarrow$) Supposons que u_1,u_2,u_3 soient libres et montrons que f est injective; i.e. $Kerf=\{o_E\}$:

- $\{o_E\}\subset Kerf$: Comme $Kerf$ est un s.e.v. de E, alors $o_E \in Kerf$; d'où $\{o_E\}\subset Kerf$.
- $Kerf \subset \{o_E\}$: Soit $v\in Kerf$; donc $v\in E$ et $f(v)=o_F$.

  Puisque $v\in E$ et $\{v_1,v_2,v_3\}$ une base de E, alors $\exists! \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \in IK$ tels que $v=\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\lambda_3 v_3$.

  Par suite; on a $f(v)=f(\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\lambda_3 v_3)=\lambda_1 f(v_1)+\lambda_2 f(v_2)+\lambda_3 f(v_3)=\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2+\lambda_3 u_3$.

  Maintenant; comme $f(v)=o_F$, alors $\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2+\lambda_3 u_3=o_F$; or u_1,u_2,u_3 sont libres (par hypothèse), donc $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$. Ceci signifie que $v=\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\lambda_3 v_3=0v_1+0v_2+0v_3=o_E$; i.e. $v\in\{o_E\}$.

  D'où $Kerf \subset \{o_E\}$.

résultat très connu dans l'Algèbre linéaire; donc il faut le connaître.

2) Montrons que : f est surjective $\Leftrightarrow F=Vect(u_1,u_2,u_3)$.

En effet; comme $\{v_1,v_2,v_3\}$ est une base de E, alors $E=Vect(v_1,v_2,v_3)$; d'où d'après l'exercice n°**08**, on a : $\operatorname{Im} f = Vect\big(f(v_1), f(v_2), f(v_3)\big)$; i.e. $\operatorname{Im} f = Vect(u_1,u_2,u_3)$ (car $f(v_i)=u_i$; $\forall 0\le i\le 3$).

par hypothèse

Par suite; on a : f est surjective $\Leftrightarrow \operatorname{Im} f = F \Leftrightarrow F=Vect(u_1,u_2,u_3)$.

résultat connu

3) Montrons que : f est bijective $\Leftrightarrow \{u_1,u_2,u_3\}$ est une base de F; en effet :

On a : f est bijective $\Leftrightarrow f$ est injective et surjective

$\Leftrightarrow \{u_1,u_2,u_3\}$ est libre et $F=Vect(u_1,u_2,u_3)$ (d'après **(1)** et **(2)**)

$\Leftrightarrow \{u_1,u_2,u_3\}$ est une base de F (selon la définition de la base).

Exercice n° 10:

Soit E un IK-espace vectoriel; et soient f,g deux endomorphismes de E.

Notons que $f^2=f\circ f$

1) Montrons que : $Kerf^2=Kerf \Leftrightarrow Kerf\cap \operatorname{Im} f=\{o_E\}$.

($\Rightarrow$) Supposons que $Kerf=Kerf^2$ et montrons que $\operatorname{Im} f\cap Kerf=\{o_E\}$:

- D'abord; comme $\operatorname{Im} f$ et $Kerf$ sont des s.e.v. de E, alors $o_E\in \operatorname{Im} f$ et $o_E\in Kerf$; i.e. $o_E\in \operatorname{Im} f\cap Kerf$, d'où $\{o_E\}\subset \operatorname{Im} f\cap Kerf$.
- Maintenant; soit $v\in \operatorname{Im} f\cap Kerf$; i.e. $v\in \operatorname{Im} f$ et $v\in Kerf$.

Comme $v\in \operatorname{Im} f$, alors $\exists u\in E: v=f(u)$; et comme $v\in Kerf$, alors $f(v)=o_E$.

Puisque $v=f(u)$, alors $f(v)=f\big(f(u)\big)=(f\circ f)(u)=f^2(u)$; or $f(v)=o_E$, donc $f^2(u)=o_E$; i.e. $u\in Kerf^2$. Mais par hypothèse on a $Kerf=Kerf^2$; donc $u\in Kerf$, d'où $f(u)=o_E$. Par suite $v=o_E$.

On a montré donc $\forall v:\ v\in \mathrm{Im} f\cap Kerf \Rightarrow v\in\{o_E\}$; d'où $\mathrm{Im} f\cap Kerf\subset\{o_E\}$.

($\Leftarrow$) Supposons que $\mathrm{Im} f\cap Kerf=\{o_E\}$ et montrons que $Kerf=Kerf^2$:

• On a toujours $Kerf\subset Kerf^2$; car si $v\in Kerf$; i.e. $f(v)=o_E$, alors $f^2(v)=(f\circ f)(v)=f\big(f(v)\big)=f(o_E)=o_E$.

• Soit $v\in Kerf^2$; i.e. $f^2(v)=o_E$; i.e. $(f\circ f)(v)=o_E$; i.e. $f\big(f(v)\big)=o_E$, d'où $f(v)\in Kerf$. Or $f(v)\in \mathrm{Im} f$ (car $v\in E$), donc $f(v)\in \mathrm{Im} f\cap Kerf$; d'où par hypothèse $f(v)\in\{o_E\}$; i.e. $f(v)=o_E$; i.e. $v\in Kerf$.

On a montré donc $\forall v:\ v\in Kerf^2 \Rightarrow v\in Kerf$; d'où $Kerf^2\subset Kerf$.

2) On déduit (de **(1)**) que : $f^2=f \Rightarrow E=Kerf\oplus \mathrm{Im} f$; en effet :

On suppose que $f^2=f$; donc $Kerf^2=Kerf$, d'où par **(1)** on a $\mathrm{Im} f\cap Kerf=\{o_E\}$.

D'autre part; soit $v\in E$. On peut écrire $v=\big(v-f(v)\big)+f(v)$; où :

$$\begin{cases}\bullet\ v-f(v)\in Kerf\ \ (\text{car } f\big(v-f(v)\big)=f(v)-f\big(f(v)\big)=f(v)-f^2(v)=f(v)-f(v)=o_E).\\ \bullet\ f(v)\in \mathrm{Im} f\ \ (\text{car } v\in E).\end{cases}$$

Par suite $E\subset \mathrm{Im} f+Kerf$; or $\mathrm{Im} f+Kerf\subset E$ (toujours), donc $E=\mathrm{Im} f+Kerf$.

Finalement; comme $E=\mathrm{Im} f+Kerf$ et $\mathrm{Im} f\cap Kerf=\{o_E\}$, alors $E=\mathrm{Im} f\oplus Kerf$.

3) Montrons que : $\mathrm{Im} g\subset Kerf \Leftrightarrow f\circ g=0$.

($\Rightarrow$) Supposons que $\mathrm{Im} g\subset Kerf$ et montrons que $f\circ g=0$; i.e. $(f\circ g)(v)=o_E;\forall v\in E$.

Soit $v\in E$. On a $g(v)\in \mathrm{Im} g$; or $\mathrm{Im} g\subset Kerf$, donc $g(v)\in Kerf$; d'où $f\big(g(v)\big)=o_E$; i.e. $(f\circ g)(v)=o_E$.

On a montré donc $\forall v\in E:(f\circ g)(v)=o_E$; d'où $f\circ g=0$ (i.e. $f\circ g$ est nul sur E).

($\Leftarrow$) Supposons que $f\circ g=0$ et montrons que $\mathrm{Im} g\subset Kerf$.

Soit $v\in \mathrm{Im} g$; donc $\exists u\in E: v=g(u)$. On a $f(v)=f\big(g(u)\big)=(f\circ g)(u)=o_E$; i.e. $f(v)=o_E$, d'où $v\in Kerf$.

On a montré donc $\forall v:\ v\in \mathrm{Im} g \Rightarrow v\in Kerf$; d'où $\mathrm{Im} g\subset Kerf$.

4) Montrons que : $Ker(g\circ f)=f^{-1}\big(Kerg\cap \mathrm{Im} f\big)$; en effet :

Rappel: Soit $f:E\to F$ une application; et soit $B_1,B_2\subset F$. On a : $f^{-1}(B_1\cap B_2)=f^{-1}(B_1)\cap f^{-1}(B_2)$. $f^{-1}(B)$ désigne l'image réciproque de la partie $B\subset F$ par f; i.e. $f^{-1}(B)=\{x\in E/\ f(x)\in B\}$; donc: $x\in f^{-1}(B)\Leftrightarrow f(x)\in B$.

On a : $f^{-1}\big(Kerg\cap \mathrm{Im} f\big)=f^{-1}\big(Kerg\big)\cap f^{-1}\big(\mathrm{Im} f\big)$; où :

• $\boxed{f^{-1}\big(Kerg\big)=Ker(g\circ f)}$ En effet; on a :

$v\in f^{-1}\big(Kerg\big) \Leftrightarrow f(v)\in Kerg \Leftrightarrow g\big(f(v)\big)=o_E \Leftrightarrow (g\circ f)(v)=o_E \Leftrightarrow v\in Ker(g\circ f)$.

On a montré que $\forall v:\ v\in Ker(g\circ f)\Leftrightarrow v\in f^{-1}(Kerg)$; d'où $Ker(g\circ f)=f^{-1}(Kerg)$.

• $\boxed{f^{-1}(\mathrm{Im} f)=E}$ En effet; comme $\mathrm{Im} f=f(E)$, alors $f^{-1}\big(\mathrm{Im} f\big)=f^{-1}\big(f(E)\big)$; or $E\subset f^{-1}\big(f(E)\big)$, donc $E\subset f^{-1}\big(\mathrm{Im} f\big)$. Par suite; comme l'inclusion contraire est claire, alors $f^{-1}\big(\mathrm{Im} f\big)=E$.

• Finalement; on a : $f^{-1}\big(Kerg\cap \mathrm{Im} f\big)=f^{-1}\big(Kerg\big)\cap f^{-1}\big(\mathrm{Im} f\big)=Ker(g\circ f)\cap E=Ker(g\circ f)$.

très clair; car: $Ker(g\circ f)\subset E$

Exercice n° 11:

Soit E un e.v. On définit un projecteur de E; tout endomorphisme p de E vérifiant $p\circ p = p$.

1) Montrons que : p est un projecteur de $E \Leftrightarrow Id_E - p$ est un projecteur de E.

En effet; on a : $Id_E - p$ est un projecteur de E $\Leftrightarrow (Id_E - p)\circ(Id_E - p) = Id_E - p$

$$\Leftrightarrow Id_E\circ Id_E - Id_E\circ p - p\circ Id_E + p\circ p = Id_E - p$$

L'opération de la composition $\circ$ est distributive par rapport à $+$ et $-$ dans l'ensemble des applications linéaires.

$$\begin{cases} \cdot\ Id_E\circ Id_E = Id_E \\ \cdot\ Id_E\circ p = p \\ \cdot\ p\circ Id_E = p \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow Id_E - p - p + p\circ p = Id_E - p$$

$$\Leftrightarrow -p + p\circ p = 0$$

$$\Leftrightarrow p\circ p = p$$

$\Leftrightarrow p$ est un projecteur de E.

2) Supposons que p soit un projecteur E; et montrons que $\mathrm{Im}p = Ker(Id_E - p)$ et $Kerp = \mathrm{Im}(Id_E - p)$.

❶ Montrons que $\mathrm{Im}p = Ker(Id_E - p)$; en effet :

On a :
$$\begin{aligned} Ker(Id_E - p) &= \{v\in E\ /\ (Id_E - p)(v) = o_E\} \\ &= \{v\in E\ /\ Id_E(v) - p(v) = o_E\} \\ &= \{v\in E\ /\ v - p(v) = o_E\} \\ &= \{v\in E\ /\ p(v) = v\} \\ &= \{p(v)\ /\ v\in E\} \\ &= \mathrm{Im}p. \end{aligned}$$

❷ Montrons que $Kerp = \mathrm{Im}(Id_E - p)$; en effet :

D'abord; on a $Id_E - p$ est un projecteur de E (voir **(1)**).

Maintenant; d'après ❶ on a : $\mathrm{Im}(Id_E - p) = Ker\big(Id_E - (Id_E - p)\big) = Ker(Id_E - Id_E + p) = Kerp.$

D'où $Kerp = \mathrm{Im}(Id_E - p).$

3) Supposons que p soit un projecteur de E; et montrons que $E = \mathrm{Im}p \oplus Kerp$.

• $\boxed{E = Kerf + \mathrm{Im}\, f}$:

Soit $v\in E$. Il est clair que $v = p(v) + \big(v - p(v)\big)$; avec :

$$\begin{cases} p(v)\in \mathrm{Im}p \text{ (c'est clair).} \\ p\big(v - p(v)\big) = p(v) - p\big(p(v)\big) = p(v) - (p\circ p)(v) = p(v) - p(v) = o_E; \text{ donc } v - p(v)\in Kerp. \end{cases}$$

Par suite $E \subset \mathrm{Im}p + Kerp$; or $\mathrm{Im}p + Kerp \subset E$ (toujours), donc $E = \mathrm{Im}p + Kerp$.

• $\boxed{Kerf \cap \mathrm{Im}\, f = \{o_E\}}$:

Soit $v\in \mathrm{Im}p \cap Kerp$; i.e. $v\in \mathrm{Im}p$ et $v\in Kerp$, donc $\exists u\in E : v = p(u)$ et $p(v) = o_E$.

On a : $v = p(u) = (p\circ p)(u) = p\big(p(u)\big) = p(v) = o_E$.

Par suite $\mathrm{Im}p \cap Kerp \subset \{o_E\}$; or $\{o_E\} \subset \mathrm{Im}p \cap Kerp$ (toujours), donc $\mathrm{Im}p \cap Kerp = \{o_E\}$.

Fin