CHAPITRE 0

MODÈLES MATHÉMATIQUES

NOUREDDINE DAILI

Abstract. Dans ce chapitre on donne une introduction aux modèles mathématiques.

1. Introduction

Le mot "*modèle*", à fortiori additionné de l'épithète "*mathématique*", est souvent entouré d'une aura de complexité et d'inaccessibilité de la part du public, notamment médical.

2. Qu'est-ce qu'un modèle mathématique ?

À l'origine, le mot "*modèle*" est un terme des Beaux Arts utilisé au XVI^e siècle pour décrire une "représentation en petit de ce qui sera reproduit en grand" (comme une maquette).

L'emploi scientifique du mot apparaît beaucoup plus tard, dans la seconde moitié du XX^e siècle, se répandant alors rapidement dans diverses sciences y compris les sciences humaines (économie, sociologie, linguistique, etc.).

Dans son sens scientifique général, un modèle est une représentation ou une description, bien définie et bien organisée, d'un aspect du monde réel, phénomène physique ou biologique, économique ou écologique, chimique ou commercial, ... auquel on s'interesse.

Le décrivant avec précision, il permet d'en prévoir certains aspects, par exemple son évolution dans le futur, et éventuellement de l'expliquer à partir de phénomènes plus simples ou de principes généraux.

Les exemples en sont nombreux en physique, comme le modèle de Newton décrivant la rotation de la terre autour du soleil.

Enfin, dans la mesure où un modèle quantifie et non seulement qualifie un phénomène, on utilise de plus en plus fréquemment le terme de "modèle mathématique" plus que le seul mot "modèle".

Le modèle est mathématique dans la mesure où il décrit un effet dans un langage mathématique (en appliquant les techniques et théories mathématiques) le phénomène étudié, et éventuellement traduit les résultats mathématiques obtenus en prédiction dans le monde réel.

Date: April 4, 2018.

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 05C38, 15A15; Secondary 05A15, 15A18.

Key words and phrases. Introduction, modèle mathématique, définitions.

This paper is in final form and no version of it will be submitted for publication elsewhere.

3. **Pourquoi utiliser un modèle mathématique** ?

Les modèles mathématiques sont une traduction simplifiée de la réalité.

Formalisant un phénomène complexe, ils permettent d'en étudier différents paramètres, et les relations qui existent entre eux, de façon quantitative ou qualitative. Générant ou testant des hypothèses, ils conduisent à une première compréhension de systèmes très complexes. Les modèles mathématiques sont ainsi le moyen de jeter un pont entre un niveau et un autre.

4. **Comment construire un modèle**

Modéliser, c'est convertir un problème concret, issu du monde réel, en termes de nature mathématique.

C'est transformer un besoin, plus ou moins bien exprimé, en équations, en essayant de rendre compte de toutes les contraintes.

Le mathématicien, qui ne voit que l'aspect mathématique, s'imagine toujours que la modélisation est chose facile ; pour lui, l'étape glorieuse est la résolution du problème mathématique une fois formalisé. Mais cette conception des choses est absolument erronée : c'est l'étape de modélisation qui est la plus délicate, la plus longue, et la plus périlleuse ; elle relève plus de l'art que de la science ; il faut parvenir, par de nombreuses discussions avec l'utilisateurs, à bien comprendre leurs problèmes. On leur soumet un premier modèle, qui en général ne répond pas à leurs attentes, et on le modifie petit à petit, jusqu'à y parvenir aussi complètement que possible. Donc

$\boxed{\text{modéliser consiste à appliquer des mathématiques à un fragment de réalité.}}$

Pour être pertinente, une modélisation doit donc respecter quelques règles simples que nous allons suivre au fur et à mesure à propos d'un travail donné.

Etape 1: <u>retenir des hypothèses</u>

Le choix d'un modèle ne peut être fait qu'après avoir énoncé précisément les lois régissant le phénomène observé.

Les lois doivent être énoncées sous forme mathématique. Ce travail délicat nécessite en général des compétences extérieures au champ strictement mathématique et consiste en premier lieu par simplifier ce que l'on observe en ne retenant que quelques propriétés que l'on juge saillantes et en négligeant toutes les autres.

Etape 2 : <u>mettre en équation</u>

Le choix des inconnues et des variables du problème est une étape importante et délicate qu'il ne faut pas bâcler dans la mise en équation.

Etape 3 : <u>résoudre</u>

On résout analytiquement si possible le modèle formulé sinon numériquement.

Etape 4 : <u>analyser les résultats</u>

La partie proprement mathématique est maintenant terminée. Il reste à examiner les résultats et analyser la pertinence de la modélisation.

Le problème de la validité du modèle est un phénomène très difficile en général.

5. **Les qualités d'un modèle. Intérêts et limites**

Il est important de comprendre que la complexité mathématique n'est pas un critère suffisant pour juger si un modèle est pertinent ou non.

À résultat comparable, c'est le modèle le plus simple qui est préférable.

un modèle sera pertinent :

. s'il couvre bien le champ du problème réel ;

. s'il permet d'obtenir le résultat escompté (description du phénomène avec le niveau de précision souhaité ou prévisions se révêlant juste à postériori ;

. accessoirement s'il est réutilisable.

6. Concept de variable

Definition 1. *On appelle variable toute expression algébrique (habituellement une seule lettre : x, y, z, t, ...) par laquelle est remplacée une valeur (physique, économique, temporelle, ... etc) inconnue.*

Le rôle de la variable est d'occuper la position que prendrait une valeur si celle-ci était disponible.

Example 1. *Considérant que le taux d'imposition est de* 17%. *Quel montant d'impôt un individu devrait-il payer ?*

Solution 1. *Répondre à une telle question nécessite la connaissance du salaire annuel de l'individu.*

Puisque le salaire est inconnu, nous le remplaçons par une variable. Par exemple, si on définit la variable

$$s = \textit{le salaire annuel de l'individu}$$

alors celui-ci aurait à payer 17% *de s en impôt, c'est-à-dire*

$$I(s) = \textit{Impôt} = 17\% s = 0,17s.$$

La variable s occupe donc la position du salaire - en attendant que celui-ci soit découvert - dans la formule du calcul d'impôt.

7. Modélisation Mathématique

Definition 2. - *On appelle modélisation d'un problème ou modèle mathématique un procédé par lequel nous utilisons des expressions mathématiques pour décrire une situation quantitative réelle.*

- Modéliser consiste à écrire en notation mathématique ce qui est exprimé d'abord en mots en faisant intervenir des variables au besoin.

Example 2. *Un individu souhaite investir dans une action qui lui rapportera 15% annuellement.*

Quel montant aura-t-il au bout de l'année ?

Solution 2. *L'investissement initial de l'individu est inconnu. Définissons*

x : le montant que l'individu investit dans cette action.

Le montant accumulé à la fin de l'année sera

$$s(x) = x + (15\%)x = x + 0,15x = 1,15x.$$

Example 3. *Un ébéniste (ouvrier qui fait ou répare les meubles) produit et vend ses propres meubles. Les tables en pin (n.m. genre de conifères, à feuillage toujours vert) sont vendues* 6500 *DA, les tables en mérisier (n.m. cerisier sauvage) se vendent* 7500 *DA et les tables en érables (n.m. arbre à bois léger et solide),* 8500 *DA.*

Quel sera le revenu annuel de l'ébéniste ?

Solution 3. *Le revenu annuel de l'ébéniste ne peut être obtenu que si le nombre de tables vendues de chaque type est connu. Des variables doivent donc remplacer ces quantités, toutes inconnues pour l'instant.*

Définissons :

x *: le nombre de tables en pin vendues au cours de l'année ;*

y *: le nombre de tables en merisier vendues au cours de l'année ;*

z *: le nombre de tables en érable vendues au cours de l'année.*

Chaque table en pin produit un revenu de $6500\ DA$.

Si x *tables de pin sont vendues, un revenu de* $6500\ DA$ *fois* x *sera obtenu.*

De même pour les autres types de tables. Par conséquent,

$$\boxed{\textit{Revenu total} := RT = 6500x + 7500y + 8500z.}$$

Example 4. *Les trois phases d'un projet doivent s'effectuer de façon séquentielle, ce qui signifie qu'une phase ne peut pas débuter avant que la phase précédente soit terminée.*

On sait que le coût de réalisation de chacune des phases se décompose en un coût fixe, indépendant de sa durée, et en un coût variable qui en dépend.

Le table suivant résume la situation :

Phase 1	1	2	3
Coût fixe	318 000 DA	212 000 DA	220 000 DA
Coût variable	15 000 $DA/jour$	14 000 $DA/jour$	16 000 $DA/jour$

Le concepteur du projet doit proposer un prix pour le projet. Il voudrait que ce prix lui assure une marge de profit d'au moins 10 %.

Exprimer le coût total du projet et le prix que le concepteur devrait proposer en fonction de la durée de chaque phase du projet ?

Solution 4. • *La durée de chaque phase étant inconnue, définissons les trois variables suivantes :*

$x =$ *durée de la phase* 1 *(en jours) ;*

$y =$ *durée de la phase* 2 *(en jours) ;*

$z =$ *durée de la phase* 3 *(en jours).*

• *Le coût de la phase* 1 *se décompose en un coût fixe (*318 000 DA*) et un coût variable (*15 000 DA *par jour). Si la phase* 1 *dure* x *jours, le coût de cette phase sera*

$$\boxed{\textit{Coût}_{phase\ 1} := 318\ 000 + 15\ 000x}.$$

Le même principe s'applique pour les deux autres phases :

$$\boxed{\textit{Coût}_{phase\ 2} := 212\ 000 + 14\ 000y}.$$

$$\boxed{\textit{Coût}_{phase\ 3} := 220\ 000 + 16\ 000z}.$$

Le coût total du projet peut s'exprimer comme la somme des coûts des trois phases :

$$\boxed{C_T := \textit{Coût total du projet} = \textit{Coût}_{phase\ 1} + \textit{Coût}_{phase\ 2} + \textit{Coût}_{phase\ 3}}.$$

C'est-à-dire

$$\boxed{\begin{aligned} C_T &:= (318\ 000 + 15\ 000x) + (212\ 000 + 14\ 000y) + (220\ 000 + 16\ 000z) \\ &= 15\ 000x + 14\ 000y + 16\ 000z + 750\ 000 \end{aligned}}.$$

Le prix proposé pour le projet par son concepteur doit lui assurer une marge de profit d'au moins 10 %.

Le prix doit donc être au moins 10 % *plus élevé que le coût total :*

$$P = Prix \geq C_T + 10\%\ C_T = 1,1C_T =$$

$$1.1(15\ 000x + 14\ 000y + 16\ 000z + 750\ 000).$$

D'où

$$P = Prix \geq 16500x + 15400y + 17600z + 825\ 000.$$

Example 5. *(Application Pharmaceutique) La gélule est une forme médicamenteuse utilisée quand le médicament qu'elle contient a une odeur forte ou un goût désagréable que l'on souhaite cacher. On trouve des gélules de différents calibres. Ces calibres sont numérotés de "000" à "5" comme le montre l'illustration ci-contre*

*Fig.*1.

("000" désignant le plus grand calibre et "5" désignant le plus petit).

Le tableau suivant donne la longueur de ces différents calibres de gélile :

Calibre de la gélule	000	00	0	1	2	3	4	5
Longueur L de la gélule (en mm)	26,1	23,3	21,7	19,4	18,0	15,9	14,3	11,5

On considère une gélule constituée de deux demi-sphères identiques de diamètre 9,5 *mm et d'une partie cylindrique d'une hauteur de* 16,6 *mm comme l'indique le croquis suivant :*

*Fig.*2.

1) *À quel calibre correspond cette gélule ?*

2) *Calculer le volume arrondi au* mm^3 *de cette gélule.*

On rappelle les formules suivantes ;

Volume d'un cylindre de rayon R et de hauteur h : $V(R,h) = \pi \times R^2 \times h$	*Volume d'un cône de rayon de base R et de hauteur h :* $V(R,h) = \frac{\pi \times R^2 \times h}{3}$	*Volume d'une sphère de rayon R :* $V(R) = \frac{4}{3} \times \pi R^3$

3) *Ali tombe malade et son médecin lui prescrit comme traitement une boîte d'antibiotique conditionné en gélules correspondant au croquis précident. Chaque gélule de cet antibiotique a une masse volumique de* $6,15 \times 10^{-4}$ g/mm^3*. La boite d'antibiotique contient* 3 *plaquettes de* 6 *gélules.*

Quelle masse d'antibiotique Ali a-t-il absorbée durant son traitement ? Donner le résultat en gramme arrondi à l'unité.

Solution 5. **1**) *Description géométrique :*

Figure 3

Description Physique :

Une gélule est constituée d'une partie cylindrique et de deux hémisphères. Pour obtenir sa longueur il faut ajouter la hauteur du cylindre à deux fois le rayon de la sphère, c'est-à-dire le diamètre de la sphère.

$$L(h,r) = h + r + r = h + 2r.$$

Numériquement : $h = 16,6\ mm\ ;\ \ r = 4,75,$ *d'où*

$$L(h,r) = 16,6\ mm + 2 \times 4,75 = 26,1mm$$

c'est une gélule de calibre 000*.*

2) • *Le volume de la partie cylindrique vaut*

$$\begin{aligned} V_c(h,r) &= \pi \times r^2 \times h = \ \textit{Surface de base} \ \times \ \textit{hauteur} \\ &= \pi \times (4,75\ mm)^2 \times 16,6 \\ &= 374,5375\pi\ mm^3 \simeq 1176\ mm^3. \end{aligned}$$

• *Le volume des deux hémisphères, c'est-à-dire de la sphère vaut :*

$$V_S(r) = V_{hs}(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(4,75mm)^3 \simeq 449mm^3,$$

et

$$\begin{aligned} V_g &= V_c(h,r) + V_{hs}(r) = \ \textit{le volume de la gélule} \\ &= 1176 + 449 = 1625mm^3. \end{aligned}$$

Le volume de la gélule est $1625\ mm^3$*.*

3) *La masse volumique* $= m_v = 6,15 \times 10^{-4} g/mm^3$*. Donc*

• $6,15 \times 10^{-4} g/mm^3$ *signifie que* $1\ mm^3$ *d'antibiotique a une masse de* $6,15 \times 10^{-4} g = 0,000615\ g$*.*

• *La boite contient* 3 *plaquettes de* 6 *gélules, c'est-à-dire,*

$$3 \times 6 = 18 \ \textit{gélules.}$$

Le volume d'une gélule est $V_g = 1625\ mm^3$ *(d'après question* **2**)*) donc comme*

$$18 \times 1625\ mm^3 = 29250\ mm^3,$$

le volume absorbé est $29250\ mm^3$*.*

Comme $6,15 \times 10^{-4} \times 29250 \simeq 18$*.*

Ali a absorbé environ $18g$ *d'antibiotique pendant sont traitement.*

References

[1] Pierre Auger, Jacques Demongeot, Jim Murray et Michel Thellier, Le rôle des mathématiques dans les sciences biologiques et médicales.
[2] G. Aujac, Eratosthène de Cyrène, le pionnier de la géographie, Paris : Éditions du CTHS, 2001.
[3] L. Allen, An Introduction to Mathematical Biology, Pearson, 2007.
[4] Accromαth, La revue Accromαth, http://accromath.uqam.ca/
[5] E. A. Bender, An introduction to mathematical modeling, Wiley, 1978.
[6] A. Beuter, L. Glass, M. Mackey and M. Titcombe, Nonlinear Dynamics in Physiology and Medicine, Springer, 2003.

[7] N. F. Britton, Essential Mathematical Biology, Springer, 2003.
[8] N. Bouleau, La modélisation et les sciences de l'ingénieur, In P. Nouvel, Enquête sur le concept de modèle, PUF, Paris, 2002, 101-119.
[9] Roger Balian et Jean Zinn-Justin, Mathématiques et physique.
[10] Albert Bijaoui, Mathématiques et astronomie.
[11] Alain Berthoz, Les liens entre mathématiques et neurosciences.
[12] Jean-Pierre Bourguignon, De nouveaux champs d'action pour les mathématiques dans la société.
[13] Alain Connes, Les mathématiques dans le monde scientifique contemporain, Présentation à l'Académie des sciences, 9 novembre 2004.
[14] L. Coulange, Les problèmes "concrets" à "mettre en équation" dans l'enseignement, Petit x 47 (1998), 33-58.
[15] E. Don and B. Don, How to Solve Word Problems in Calculus, A Solved Problem Approach, McGraw-Hill, 2001.
[16] S. J. Ellner and J. Guckenheimer, Dynamics Models in Biology, Princeton University Press, 2006.
[17] Yvar Ekeland et Elyes Jouini, La modélisation mathématique en économie.
[18] Gérard Huet et Philippe Flageolet, Mathématiques et Informatique.
[19] R. Kandel, Les modèles météorologiques et climatiques, In P. Nouvel, Enquête sur le concept de modèle, PUF, Paris, 2002, 67-98.
[20] D. Kaplan and L. Glass, Understanding Nonlinear Dynamics, Springer, 1995.

(A. One and A. Two) Author OneTwo address line 1, Author OneTwo address line 2
E-mail address: `nourdaili_dz@yahoo.fr`