Université de Sétif1 | *2018 / 2019*
Faculté Des sciences | *Module : Algèbre 2*
Département MI
1ère Année MI (S 2) | *Pr A.Merouani*

Série № 02

EXERCICE 01

Dire si les applications suivantes sont des applications linéaires :

1. $f: IR^2 \to IR^3;\ (x,y) \mapsto (x+y, x-2y, 0)$
2. $f:\ IR^2 \ \to IR^3;\quad (x,y) \mapsto (x+y, x-2y, 1)$
3. $f: IR^2 \ \to IR,\ (x,y) \mapsto x^2 - y^2$
4. $f: IR[X] \to IR^2\ ;\ P \mapsto (P(0), P'(1))$.

EXERCICE 02

On considère les applications linéaires $f: IR^2 \to IR^3$ *et* $g : IR^2 \to IR^2$ *définie par*

$$f(x,y) = (y, x, x+y).$$

$$g(x,y) = (2x-4y, x-2Y)$$

Déterminer $Kerf, Imf, kerg, Img$ *et préciser leurs dimensions.*

f *est − elle injective? surjective?*

EXERCICE 03

On considère l'application linéaire f *de* IR^3 *dans* IR^4 *définie par*

$f(x,y,z) = (x+z, y-x, z+y, x+y+2z)$.

1. *Déterminer une base de* $Im(f)$
2. *Déterminer une base de ker*
3. *L'application* f *est − elle injective? surjective?*

EXERCICE 04

Soient E, F 2 espaces vectoriel, et $f: E \to F$ une application linéaire

Soit B$\{x_1, x_2, x_3,\}$ une base de E, Montrer que :

1- f *est* injective$\Leftrightarrow$ $f(B)$ est une famille libre
2- f *est* Surjective$\Leftrightarrow$ $f(B)$ est une famille génératrice de F
3- f *est* bijective$\Leftrightarrow$ $f(B)$ est une base

★★★★★★EXERCICE 05

Soit $= IR^3[X]$ *l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. On définit u l'application de E dans lui − même par*

$$u(P) = P + (1-X)P'.$$

1. *Montrer que u est un endomorphisme de E.*
2. *Déterminer une base de* $Im(u)$.
3. *Déterminer une base de* $ker(u)$.
4. *Montrer que* $ker(u)$ *et* $Im(u)$ *sont deux sous espaces vectoriels supplémentaires de E.*

Exercices supplémentaires :

Exercices supplémentaires :

EXERCICE 06

$Soit\ \beta = \{e_1, e_2, e_3\} la\ base\ canonique\ de\ \mathbb{R}^3\ Soit\ f un\ endomorphisme\ de\ \mathbb{R}^3$ $défini\ par: f(e_1) = 2e_1 + e_2 + 3e_3; f(e_2) = e_2 - 3e_3; f(e_3) = -2e_2 + 2e_3$

$1. Soit\ u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ un\ vecteur.$

$Déterminer\ l'image\ par\ f\ du\ vecteur\ u. \big(Calculer\ f(u)\big).$

$2. Soient\ E = \{u \in \mathbb{R}^3, f(u) = 2x\} et\ F = \{u \in \mathbb{R}^3, f(u) = -x\}$

$Montrer\ que\ E et\ F sont\ des\ sous - espaces\ vectoriels\ de\ \mathbb{R}^3.$

$3. Déterminer\ une\ base\ de\ E et\ une\ base\ de\ F.$

$4. Y\ a - t - il\ F \oplus F = \mathbb{R}^3 ?$

EXERCICE 07

$Soit\ \ E\ un\ espace\ vectoriel. Soit\ f un\ endomorphisme\ de\ E tel\ que:$

$$f^2 = f \circ f = Id_E.$$

$On\ pose\ E_1 = ker(f - Id_E) et\ \ E_2 = ker(f + Id_E).$

$1. Soit\ x_1 \in E_1 et\ x_2 \in E_2. Calculer\ f(x_1) et\ f(x_2).$

$2. Pour\ tout\ x \in E\ écrire\ x = \dfrac{f(x) + x}{x2} - \dfrac{f(x) - x}{2} et\ montrer\ que\ E_1 \oplus E_2$

EXERCICE 08

$Soient\ E\ et\ F deux\ espaces\ vectoriels\ de\ dimension\ respectives\ n\ et\ p$

$Soit\ f: E \to F\ une\ application\ linéaire$

$1. Montrer\ que\ si\ n < p\ alors\ f\ n'est\ pas\ surjective.$

$2. Montrer\ que\ si\ n > p\ alors\ f\ n'est\ pas\ injective$

EXERCICE 09

$Soit\ f un\ endomorphisme\ de\ E\ un\ espace\ vectoriel.$

$1. Montrer\ que\ ker(f) \subset ker(f^2).$

$2. Montrer\ que\ Im(f^2) \subset Im(f)$

EXERCICE 10

$Soit\ f un\ endomorphisme\ de\ E\ un\ espace\ vectoriel.$

$Montrer\ que\ les\ assertions\ suivantes\ sont\ équivalentes$

$(i)\ \ \ ker(f) \cap Im(f) = \{0_E\}$

$(ii)\ ker(f) = ker(f \circ f)$

EXERCICE 10

$Soit\ f un\ endomorphisme\ de\ E\ un\ espace\ vectoriel.$

$Monter\ que\ l'\ ensemble\ H = \ \{x \in (fof) = f(x)\}\ est\ un\ sous\ espace\ vectoriel\ de\ E$

EXERCICE 12

$Dans\ IR^3$, $on\ considère\ le\ sous\ espace\ V\ défini\ par$

$$V = \ \{(x, y, z) \in IR^3 :\ x - z = 0\}$$

1° $Donner\ une\ base\ \ B\ du\ sous\ espace\ vectoriel\ V$

2° $On\ considère\ l'application\ linéaire\ g\ définie\ de\ V\ vers\ IR^2\ par$:

$$g(x, y, z) = (x + y, x - y)$$

a) $Calculer\ \ l'image\ de\ base\ B\ par\ g\ et\ en\ déduire\ une\ base\ de\ Im(g)$

b) $Montrer\ que\ g\ est\ un\ isomorphisme\ de\ V\ vers\ IR^2\ et\ déterminer\ g^{-1}$