ALGÈBRE 2

COURS DE MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME SEMESTRE – LMD

Université Ferhat Abbas, Sétif 1

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

À la découverte de l'algèbre

La première année d'études supérieures pose les bases des mathématiques. Pourquoi se lancer dans une telle expédition ? Déjà parce que les mathématiques vous offriront un langage unique pour accéder à une multitude de domaines scientifiques. Mais aussi parce qu'il s'agit d'un domaine passionnant ! Nous vous proposons de partir à la découverte des maths, de leur logique et de leur beauté. Dans vos bagages, des objets que vous connaissez déjà : les entiers, les fonctions... Ces notions en apparence simples et intuitives seront abordées ici avec un souci de rigueur, en adoptant un langage précis et en présentant les preuves. Vous découvrirez ensuite de nouvelles théories (les espaces vectoriels, les équations différentielles,...).

Ce tome d'algèbre 2 est entièrement consacrée à l'algèbre linéaire. C'est un domaine totalement nouveau pour vous et très riche, qui recouvre la notion de matrice et d'espace vectoriel. Ces concepts, à la fois profonds et utiles, demandent du temps et du travail pour être bien compris.

Les efforts que vous devrez fournir sont importants : tout d'abord comprendre le cours, ensuite connaître par cœur les définitions, les théorèmes, les propositions... sans oublier de travailler les exemples et les démonstrations, qui permettent de bien assimiler les notions nouvelles et les mécanismes de raisonnement. Enfin, vous devrez passer autant de temps à pratiquer les mathématiques : il est indispensable de résoudre activement par vous-même des exercices, sans regarder les solutions. Pour vous aider, vous trouverez sur le site Exo7 toutes les vidéos correspondant à ce cours, ainsi que des exercices corrigés.
Au bout du chemin, le plaisir de découvrir de nouveaux univers, de chercher à résoudre des problèmes... et d'y parvenir. Bonne route !

Le contenue de ce livre est issu d'un large travail collectif. Les auteurs sont :

- Arnaud Bodin
- Niels Borne
- Marc Bourdon
- Guoting Chen
- Gilles Costantini
- Laura Desideri
- Abdellah Hanani
- Jean-Louis Rouget

Les chapitres dans cet ouvrages ont été compiler par Professeur El-Bachir Yallaoui a partir des fichiers sources que l'équipe d'Exo7 a gracieusement mis a la disposition du public. Ces chapitres constituent le contenue du module d'algèbre 2 dans le programme de LMD du département de mathématiques de l'université Ferhat Abbas , Sétif, Algérie.

Sommaire

Chapitre 1

Systèmes linéaires

1.1. Introduction aux systèmes d'équations linéaires

L'algèbre linéaire est un outil essentiel pour toutes les branches des mathématiques, en particulier lorsqu'il s'agit de modéliser puis résoudre numériquement des problèmes issus de divers domaines : des sciences physiques ou mécaniques, des sciences du vivant, de la chimie, de l'économie, des sciences de l'ingénieur ...
Les systèmes linéaires interviennent à travers leurs applications dans de nombreux contextes, car ils forment la base calculatoire de l'algèbre linéaire. Ils permettent également de traiter une bonne partie de la théorie de l'algèbre linéaire en dimension finie. C'est pourquoi ce cours commence avec une étude des équations linéaires et de leur résolution.
Le but de ce chapitre est essentiellement pratique : il s'agit de résoudre des systèmes linéaires. La partie théorique sera revue et prouvée dans le chapitre « Matrices ».

1.1.1. Exemple : deux droites dans le plan

L'équation d'une droite dans le plan (Oxy) s'écrit

$$ax + by = e$$

où a, b et e sont des paramètres réels, a et b n'étant pas simultanément nuls. Cette équation s'appelle **équation linéaire** dans les variables (ou inconnues) x

et y.

Par exemple, $2x + 3y = 6$ est une équation linéaire, alors que les équations suivantes ne sont pas des équations linéaires :

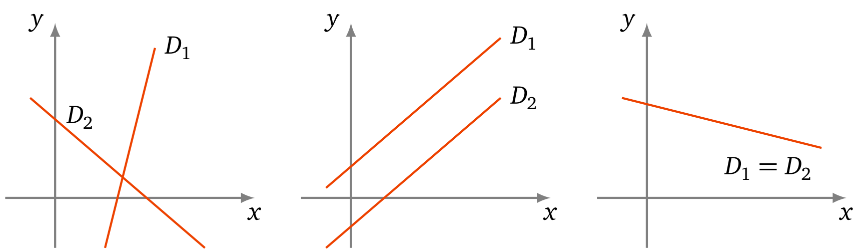
$$2x + y^2 = 1 \quad \text{ou} \quad y = \sin(x) \quad \text{ou} \quad x = \sqrt{y}.$$

Considérons maintenant deux droites D_1 et D_2 et cherchons les points qui sont simultanément sur ces deux droites. Un point (x, y) est dans l'intersection $D_1 \cap D_2$ s'il est solution du système :

$$\begin{cases} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{cases} \tag{S}$$

Trois cas se présentent alors :

1. Les droites D_1 et D_2 se coupent en un seul point. Dans ce cas, illustré par la figure de gauche, le système (S) a une seule solution.
2. Les droites D_1 et D_2 sont parallèles. Alors le système (S) n'a pas de solution. La figure du centre illustre cette situation.
3. Les droites D_1 et D_2 sont confondues et, dans ce cas, le système (S) a une infinité de solutions.



Nous verrons plus loin que ces trois cas de figure (une seule solution, aucune solution, une infinité de solutions) sont les seuls cas qui peuvent se présenter pour n'importe quel système d'équations linéaires.

1.1.2. Résolution par substitution

Pour savoir s'il existe une ou plusieurs solutions à un système linéaire, et les calculer, une première méthode est la **substitution**. Par exemple pour le système :

$$\begin{cases} 3x+2y &= 1 \\ 2x-7y &= -2 \end{cases} \tag{S}$$

Nous réécrivons la première ligne $3x+2y=1$ sous la forme $y=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}x$. Et nous remplaçons (nous *substituons*) le y de la seconde équation, par l'expression $\frac{1}{2}-\frac{3}{2}x$. Nous obtenons un système équivalent :

$$\begin{cases} y &= \frac{1}{2}-\frac{3}{2}x \\ 2x-7(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}x) &= -2 \end{cases}$$

La seconde équation est maintenant une expression qui ne contient que des x, et on peut la résoudre :

$$\begin{cases} y &= \frac{1}{2}-\frac{3}{2}x \\ (2+7\times\frac{3}{2})x &= -2+\frac{7}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} y &= \frac{1}{2}-\frac{3}{2}x \\ x &= \frac{3}{25} \end{cases}$$

Il ne reste plus qu'à remplacer dans la première ligne la valeur de x obtenue :

$$\begin{cases} y &= \frac{8}{25} \\ x &= \frac{3}{25} \end{cases}$$

Le système (S) admet donc une solution unique $(\frac{3}{25},\frac{8}{25})$. L'ensemble des solutions est donc

$$\mathscr{S}=\left\{\left(\frac{3}{25},\frac{8}{25}\right)\right\}.$$

1.1.3. Exemple : deux plans dans l'espace

Dans l'espace $(Oxyz)$, une équation linéaire est l'équation d'un plan :

$$ax+by+cz=d$$

(on suppose ici que a, b et c ne sont pas simultanément nuls).

L'intersection de deux plans dans l'espace correspond au système suivant à 2 équations et à 3 inconnues :

$$\begin{cases} ax+by+cz &= d \\ a'x+b'y+c'z &= d' \end{cases}$$

Trois cas se présentent alors :

- les plans sont parallèles (et distincts) et il n'y a alors aucune solution au système,
- les plans sont confondus et il y a une infinité de solutions au système,
- les plans se coupent en une droite et il y a une infinité de solutions.

Exemple 1.

1. Le système $\begin{cases} 2x+3y-4z &= 7 \\ 4x+6y-8z &= -1 \end{cases}$ n'a pas de solution. En effet, en divisant par 2 la seconde équation, on obtient le système équivalent : $\begin{cases} 2x+3y-4z &= 7 \\ 2x+3y-4z &= -\frac{1}{2} \end{cases}$. Les deux lignes sont clairement incompatibles : aucun (x, y, z) ne peut vérifier à la fois $2x+3y-4z = 7$ et $2x+3y-4z = -\frac{1}{2}$. L'ensemble des solutions est donc $\mathscr{S} = \varnothing$.
2. Pour le système $\begin{cases} 2x+3y-4z &= 7 \\ 4x+6y-8z &= 14 \end{cases}$, les deux équations définissent le même plan ! Le système est donc équivalent à une seule équation : $2x+3y-4z = 7$. Si on réécrit cette équation sous la forme $z = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y - \frac{7}{4}$, alors on peut décrire l'ensemble des solutions sous la forme : $\mathscr{S} = \left\{(x, y, \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y - \frac{7}{4}) \mid x, y \in \mathbb{R}\right\}$.
3. Soit le système $\begin{cases} 7x+2y-2z &= 1 \\ 2x+3y+2z &= 1 \end{cases}$. Par substitution :

$$\begin{cases} 7x+2y-2z = 1 \\ 2x+3y+2z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} z = \frac{7}{2}x + y - \frac{1}{2} \\ 2x+3y+2\left(\frac{7}{2}x + y - \frac{1}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z = \frac{7}{2}x + y - \frac{1}{2} \\ 9x+5y = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} z = \frac{7}{2}x + y - \frac{1}{2} \\ y = -\frac{9}{5}x + \frac{2}{5} \end{cases} \iff \begin{cases} z = \frac{17}{10}x - \frac{1}{10} \\ y = -\frac{9}{5}x + \frac{2}{5} \end{cases}$$

   Pour décrire l'ensemble des solutions, on peut choisir x comme paramètre :

$$\mathscr{S} = \left\{\left(x, -\frac{9}{5}x + \frac{2}{5}, \frac{17}{10}x - \frac{1}{10}\right) \mid x \in \mathbb{R}\right\}.$$

   Géométriquement : nous avons trouvé une équation paramétrique de la droite définie par l'intersection de deux plans.

Du point de vue du nombre de solutions, nous constatons qu'il n'y a que deux possibilités, à savoir aucune solution ou une infinité de solutions. Mais les deux derniers cas ci-dessus sont néanmoins très différents géométriquement et il semblerait que dans le second cas (plans confondus), l'infinité de solutions soit plus

grande que dans le troisième cas. Les chapitres suivants nous permettront de rendre rigoureuse cette impression.
Si on considère trois plans dans l'espace, une autre possibilité apparaît : il se peut que les trois plans s'intersectent en un seul point.

1.1.4. Résolution par la méthode de Cramer

On note $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ le **déterminant**. On considère le cas d'un système de 2 équations à 2 inconnues :

$$\begin{cases} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{cases}$$

Si $ad - bc \neq 0$, on trouve une unique solution dont les coordonnées (x, y) sont :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

Notez que le dénominateur égale le déterminant pour les deux coordonnées et est donc non nul. Pour le numérateur de la première coordonnée x, on remplace la première colonne par le second membre ; pour la seconde coordonnée y, on remplace la seconde colonne par le second membre.

Exemple 2.

Résolvons le système $\begin{cases} tx - 2y &= 1 \\ 3x + ty &= 1 \end{cases}$ suivant la valeur du paramètre $t \in \mathbb{R}$.

Le déterminant associé au système est $\begin{vmatrix} t & -2 \\ 3 & t \end{vmatrix} = t^2 + 6$ et ne s'annule jamais. Il existe donc une unique solution (x, y) et elle vérifie :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & t \end{vmatrix}}{t^2 + 6} = \frac{t + 2}{t^2 + 6}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} t & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{t^2 + 6} = \frac{t - 3}{t^2 + 6}.$$

Pour chaque t, l'ensemble des solutions est $\mathscr{S} = \left\{ \left(\frac{t+2}{t^2+6}, \frac{t-3}{t^2+6} \right) \right\}$.

1.1.5. Résolution par inversion de matrice

En termes matriciels, le système linéaire

$$\begin{cases} ax+by &= e \\ cx+dy &= f \end{cases}$$

est équivalent à

$$AX = Y \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}.$$

Si le déterminant de la matrice A est non nul, c'est-à-dire si $ad - bc \neq 0$, alors la matrice A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

et l'unique solution $X = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ du système est donnée par

$$X = A^{-1}Y.$$

Exemple 3.

Résolvons le système $\begin{cases} x+y &= 1 \\ x+t^2y &= t \end{cases}$ suivant la valeur du paramètre $t \in \mathbb{R}$.

Le déterminant du système est $\left|\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & t^2 \end{smallmatrix}\right| = t^2 - 1$.

Premier cas. $t \neq +1$ et $t \neq -1$. Alors $t^2 - 1 \neq 0$. La matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & t^2 \end{smallmatrix}\right)$ est inversible d'inverse $A^{-1} = \frac{1}{t^2-1}\left(\begin{smallmatrix} t^2 & -1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Et la solution $X = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ est

$$X = A^{-1}Y = \frac{1}{t^2-1}\begin{pmatrix} t^2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{t^2-1}\begin{pmatrix} t^2-t \\ t-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t}{t+1} \\ \frac{1}{t+1} \end{pmatrix}.$$

Pour chaque $t \neq \pm 1$, l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{t}{t+1}, \frac{1}{t+1}\right)\right\}$.

Deuxième cas. $t = +1$. Le système s'écrit alors : $\begin{cases} x+y &= 1 \\ x+y &= 1 \end{cases}$ et les deux équations sont identiques. Il y a une infinité de solutions : $\mathcal{S} = \left\{(x, 1-x) \mid x \in \mathbb{R}\right\}$.

Troisième cas. $t = -1$. Le système s'écrit alors : $\begin{cases} x+y &= 1 \\ x+y &= -1 \end{cases}$, les deux équations sont clairement incompatibles et donc $\mathcal{S} = \varnothing$.

Mini-exercices.

1. Tracer les droites d'équations $\begin{cases} x-2y &= -1 \\ -x+3y &= 3 \end{cases}$ et résoudre le système linéaire de trois façons différentes : substitution, méthode de Cramer, inverse d'une matrice. Idem avec $\begin{cases} 2x-y &= 4 \\ 3x+3y &= -5 \end{cases}$.
2. Résoudre suivant la valeur du paramètre $t \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} 4x-3y &= t \\ 2x-y &= t^2 \end{cases}$.
3. Discuter et résoudre suivant la valeur du paramètre $t \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} tx-y &= 1 \\ x+(t-2)y &= -1 \end{cases}$. Idem avec $\begin{cases} (t-1)x+y &= 1 \\ 2x+ty &= -1 \end{cases}$.

1.2. Théorie des systèmes linéaires

1.2.1. Définitions

Définition 1.
On appelle **équation linéaire** dans les variables (ou **inconnues**) $x_1, \dots, x_p$ toute relation de la forme

$$a_1x_1 + \cdots + a_px_p = b, \tag{1}$$

où $a_1, \dots, a_p$ et b sont des nombres réels donnés.

Remarque.

- Il importe d'insister ici sur le fait que ces équations linéaires sont *implicites*, c'est-à-dire qu'elles décrivent des relations entre les variables, mais ne donnent pas directement les valeurs que peuvent prendre les variables.
- *Résoudre* une équation signifie donc la rendre *explicite*, c'est-à-dire rendre plus apparentes les valeurs que les variables peuvent prendre.
- On peut aussi considérer des équations linéaires de nombres rationnels ou de nombres complexes.

Soit $n \geqslant 1$ un entier.

Définition 2.
Un **système de n équations linéaires à p inconnues** est une liste de n équations linéaires.

On écrit usuellement de tels systèmes en n lignes placées les unes sous les autres.

Exemple 4.
Le système suivant a 2 équations et 3 inconnues :

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ -2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 9 \end{cases}$$

La forme générale d'un système linéaire de n équations à p inconnues est la suivante :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & + & \cdots & +a_{1p}x_p & = & b_1 & (\leftarrow \text{équation } 1) \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & + & \cdots & +a_{2p}x_p & = & b_2 & (\leftarrow \text{équation } 2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & = & \vdots & \\ a_{i1}x_1 & +a_{i2}x_2 & +a_{i3}x_3 & + & \cdots & +a_{ip}x_p & = & b_i & (\leftarrow \text{équation } i) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & = & \vdots & \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & +a_{n3}x_3 & + & \cdots & +a_{np}x_p & = & b_n & (\leftarrow \text{équation } n) \end{cases}$$

Les nombres a_{ij}, $i = 1,\ldots,n$, $j = 1,\ldots,p$, sont les **coefficients** du système. Ce sont des données. Les nombres b_i, $i = 1,\ldots,n$, constituent le **second membre** du système et sont également des données.

Il convient de bien observer comment on a rangé le système en lignes (une ligne par équation) numérotées de 1 à n par l'indice i, et en colonnes : les termes correspondant à une même inconnue x_j sont alignés verticalement les uns sous les autres. L'indice j varie de 1 à p. Il y a donc p colonnes à gauche des signes d'égalité, plus une colonne supplémentaire à droite pour le second membre. La notation avec double indice a_{ij} correspond à ce rangement : le premier indice (ici i) est le numéro de *ligne* et le second indice (ici j) est le numéro de *colonne*. Il est extrêmement important de toujours respecter cette convention.

Dans l'exemple 4, on a $n = 2$ (nombre d'équations = nombre de lignes), $p = 3$ (nombre d'inconnues = nombre de colonnes à gauche du signe =) et $a_{11} = 1$, $a_{12} = -3$, $a_{13} = 1$, $a_{21} = -2$, $a_{22} = 4$, $a_{23} = -3$, $b_1 = 1$ et $b_2 = 9$.

Définition 3.
Une **solution** du système linéaire est une liste de p nombres réels $(s_1, s_2, \ldots, s_p)$ (un p-uplet) tels que si l'on substitue s_1 pour x_1, s_2 pour x_2, etc., dans le système linéaire, on obtient une égalité. L'**ensemble des solutions du système** est l'ensemble de tous ces p-uplets.

Exemple 5.
Le système

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ -2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 9 \end{cases}$$

admet comme solution $(-18, -6, 1)$, c'est-à-dire

$$x_1 = -18\,, \qquad x_2 = -6\,, \qquad x_3 = 1\,.$$

Par contre, $(7, 2, 0)$ ne satisfait que la première équation. Ce n'est donc pas une solution du système.

En règle générale, on s'attache à déterminer l'ensemble des solutions d'un système linéaire. C'est ce que l'on appelle **résoudre** le système linéaire. Ceci amène à poser la définition suivante.

Définition 4.
On dit que deux systèmes linéaires sont **équivalents** s'ils ont le même ensemble de solutions.

À partir de là, le jeu pour résoudre un système linéaire donné consistera à le transformer en un système équivalent dont la résolution sera plus simple que celle du système de départ. Nous verrons plus loin comment procéder de façon systématique pour arriver à ce but.

1.2.2. Différents types de systèmes

Voici un résultat théorique important pour les systèmes linéaires.

Théorème 1.
Un système d'équations linéaires n'a soit aucune solution, soit une seule solution, soit une infinité de solutions.

En particulier, si vous trouvez 2 solutions différentes à un système linéaire, alors c'est que vous pouvez en trouver une infinité ! Un système linéaire qui n'a aucune solution est dit **incompatible**. La preuve de ce théorème sera vue dans un chapitre ultérieur (« Matrices »).

1.2.3. Systèmes homogènes

Un cas particulier important est celui des **systèmes homogènes**, pour lesquels $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$, c'est-à-dire dont le second membre est nul. De tels systèmes sont toujours compatibles car ils admettent toujours la solution $s_1 = s_2 = \cdots = s_p = 0$. Cette solution est appelée *solution triviale*. Géométriquement, dans le cas 2×2, un système homogène correspond à deux droites qui passent par l'origine, $(0,0)$ étant donc toujours solution.

Mini-exercices.

1. Écrire un système linéaire de 4 équations et 3 inconnues qui n'a aucune solution. Idem avec une infinité de solution. Idem avec une solution unique.
2. Résoudre le système à n équations et n inconnues dont les équations sont $(L_i) : x_i - x_{i+1} = 1$ pour $i = 1, \ldots, n-1$ et $(L_n) : x_n = 1$.
3. Résoudre les systèmes suivants :
$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +4x_4 & = & 0 \\ & x_2 & +2x_3 & +3x_4 & = & 9 \\ & & x_3 & +2x_4 & = & 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = & 1 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 2 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 3 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & & & = & 1 \\ & x_2 & +x_3 & & = & 2 \\ & & x_3 & +x_4 & = & 3 \\ x_1 & +2x_2 & +2x_3 & +x_4 & = & 0 \end{cases}$$
4. Montrer que si un système linéaire *homogène* a une solution $(x_1, \ldots, x_p) \neq (0, \ldots, 0)$, alors il admet une infinité de solutions.

1.3. Résolution par la méthode du pivot de Gauss

1.3.1. Systèmes échelonnés

Définition 5.
Un système est **échelonné** si :

- le nombre de coefficients nuls commençant une ligne croît strictement ligne après ligne.

Il est **échelonné réduit** si en plus :

- le premier coefficient non nul d'une ligne vaut 1 ;
- et c'est le seul élément non nul de sa colonne.

Exemple 6.

- $\left\{\begin{array}{rrrrcl} 2x_1 & +3x_2 & +2x_3 & -x_4 & = & 5 \\ & -x_2 & -2x_3 & & = & 4 \\ & & & 3x_4 & = & 1 \end{array}\right.$ est échelonné (mais pas réduit).
- $\left\{\begin{array}{rrrrcl} 2x_1 & +3x_2 & +2x_3 & -x_4 & = & 5 \\ & & -2x_3 & & = & 4 \\ & & x_3 & +x_4 & = & 1 \end{array}\right.$ n'est pas échelonné (la dernière ligne commence avec la même variable que la ligne au-dessus).

Il se trouve que les systèmes linéaires sous une forme échelonnée réduite sont particulièrement simples à résoudre.

Exemple 7.
Le système linéaire suivant à 3 équations et 4 inconnues est échelonné et réduit.

$$\left\{\begin{array}{rrrrcr} x_1 & & +2x_3 & & = & 25 \\ & x_2 & -2x_3 & & = & 16 \\ & & & x_4 & = & 1 \end{array}\right.$$

Ce système se résout trivialement en

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & 25-2x_3 \\ x_2 & = & 16+2x_3 \\ x_4 & = & 1. \end{array}\right.$$

En d'autres termes, pour toute valeur de x_3 réelle, les valeurs de x_1, x_2 et x_4 calculées ci-dessus fournissent une solution du système, et on les a ainsi toutes obtenues. On peut donc décrire entièrement l'ensemble des solutions :

$$\mathscr{S} = \left\{(25-2x_3, 16+2x_3, x_3, 1) \mid x_3 \in \mathbb{R}\right\}.$$

1.3.2. Opérations sur les équations d'un système

Nous allons utiliser trois opérations élémentaires sur les équations (c'est-à-dire sur les lignes) qui sont :

1. $L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \neq 0$: on peut multiplier une équation par un réel non nul.
2. $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ (et $j \neq i$) : on peut ajouter à l'équation L_i un multiple d'une autre équation L_j.
3. $L_i \leftrightarrow L_j$: on peut échanger deux équations.

Ces trois opérations élémentaires ne changent pas les solutions d'un système linéaire ; autrement dit ces opérations transforment un système linéaire en un système linéaire équivalent.

Exemple 8.
Utilisons ces opérations élémentaires pour résoudre le système suivant.

$$\left\{\begin{array}{rrrcrl} x & +y & +7z & = & -1 & \quad (L_1)\\ 2x & -y & +5z & = & -5 & \quad (L_2)\\ -x & -3y & -9z & = & -5 & \quad (L_3) \end{array}\right.$$

Commençons par l'opération $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$: on soustrait à la deuxième équation deux fois la première équation. On obtient un système équivalent avec une nouvelle deuxième ligne (plus simple) :

$$\left\{\begin{array}{rrrcrl} x & +y & +7z & = & -1 & \\ & -3y & -9z & = & -3 & \quad L_2 \leftarrow L_2-2L_1\\ -x & -3y & -9z & = & -5 & \end{array}\right.$$

Puis $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$:

$$\left\{\begin{array}{rrrcrl} x & +y & +7z & = & -1 & \\ & -3y & -9z & = & -3 & \\ & -2y & -2z & = & -6 & \quad L_3 \leftarrow L_3+L_1 \end{array}\right.$$

On continue pour faire apparaître un coefficient 1 en tête de la deuxième ligne; pour cela on divise la ligne L_2 par -3 :

$$\begin{cases} x & +y & +7z & = & -1 \\ & y & +3z & = & 1 & \scriptstyle L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2 \\ & -2y & -2z & = & -6 \end{cases}$$

On continue ainsi

$$\begin{cases} x & +y & +7z & = & -1 \\ & y & +3z & = & 1 \\ & & 4z & = & -4 & \scriptstyle L_3 \leftarrow L_3+2L_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x & +y & +7z & = & -1 \\ & y & +3z & = & 1 \\ & & z & = & -1 & \scriptstyle L_3 \leftarrow \frac{1}{4}L_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & +y & +7z & = & -1 \\ & y & & = & 4 & \scriptstyle L_2 \leftarrow L_2-3L_3 \\ & & z & = & -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x & +y & & = & 6 & \scriptstyle L_1 \leftarrow L_1-7L_3 \\ & y & & = & 4 \\ & & z & = & -1 \end{cases}$$

On aboutit à un système réduit et échelonné :

$$\begin{cases} x & & & = & 2 & \scriptstyle L_1 \leftarrow L_1-L_2 \\ & y & & = & 4 \\ & & z & = & -1 \end{cases}$$

On obtient ainsi $x = 2$, $y = 4$ et $z = -1$ et l'unique solution du système est $(2, 4, -1)$.

La méthode utilisée pour cet exemple est reprise et généralisée dans le paragraphe suivant.

1.3.3. Méthode du pivot de Gauss

La méthode du pivot de Gauss permet de trouver les solutions de n'importe quel système linéaire. Nous allons décrire cet algorithme sur un exemple. Il s'agit d'une description précise d'une suite d'opérations à effectuer, qui dépendent de la situation et d'un ordre précis. Ce processus aboutit toujours (et en plus assez rapidement) à un système échelonné puis réduit, qui conduit immédiatement aux solutions du système.

Partie A. Passage à une forme échelonnée.

Soit le système suivant à résoudre :

$$\begin{cases} & -x_2 & +2x_3 & +13x_4 & = & 5 \\ x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +17x_4 & = & 4 \\ -x_1 & +3x_2 & -3x_3 & -20x_4 & = & -1 \end{cases}$$

Pour appliquer la méthode du pivot de Gauss, il faut d'abord que le premier coefficient de la première ligne soit non nul. Comme ce n'est pas le cas ici, on échange les deux premières lignes par l'opération élémentaire $L_1 \longleftrightarrow L_2$:

$$\begin{cases} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +17x_4 & = & 4 & \quad {\scriptstyle L_1 \longleftrightarrow L_2} \\ & -x_2 & +2x_3 & +13x_4 & = & 5 \\ -x_1 & +3x_2 & -3x_3 & -20x_4 & = & -1 \end{cases}$$

Nous avons déjà un coefficient 1 devant le x_1 de la première ligne. On dit que nous avons un **pivot** en position $(1,1)$ (première ligne, première colonne). Ce pivot sert de base pour éliminer tous les autres termes sur la même colonne.

Il n'y a pas de terme x_1 sur le deuxième ligne. Faisons disparaître le terme x_1 de la troisième ligne ; pour cela on fait l'opération élémentaire $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$:

$$\begin{cases} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +17x_4 & = & 4 \\ & -x_2 & +2x_3 & +13x_4 & = & 5 \\ & x_2 & & -3x_4 & = & 3 & \quad {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3 + L_1} \end{cases}$$

On change le signe de la seconde ligne ($L_2 \leftarrow -L_2$) pour faire apparaître 1 au coefficient du pivot $(2,2)$ (deuxième ligne, deuxième colonne) :

$$\begin{cases} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +17x_4 & = & 4 \\ & x_2 & -2x_3 & -13x_4 & = & -5 & \quad {\scriptstyle L_2 \leftarrow -L_2} \\ & x_2 & & -3x_4 & = & 3 \end{cases}$$

On fait disparaître le terme x_2 de la troisième ligne, puis on fait apparaître un coefficient 1 pour le pivot de la position $(3,3)$:

$$\begin{cases} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +17x_4 & = & 4 \\ & x_2 & -2x_3 & -13x_4 & = & -5 \\ & & 2x_3 & +10x_4 & = & 8 & \quad {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +17x_4 & = & 4 \\ & x_2 & -2x_3 & -13x_4 & = & -5 \\ & & x_3 & +5x_4 & = & 4 & \quad {\scriptstyle L_3 \leftarrow \frac{1}{2} L_3} \end{cases}$$

Le système est maintenant sous forme échelonnée.

Partie B. Passage à une forme réduite.
Il reste à le mettre sous la forme échelonnée réduite. Pour cela, on ajoute à une ligne des multiples adéquats des lignes situées au-dessous d'elle, en allant du bas à droite vers le haut à gauche.
On fait apparaître des 0 sur la troisième colonne en utilisant le pivot de la troisième ligne :

$$\begin{cases} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +17x_4 & = & 4 \\ & x_2 & & -3x_4 & = & 3 & \quad L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3 \\ & & x_3 & +5x_4 & = & 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 & -2x_2 & & 2x_4 & = & -8 & \quad L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3 \\ & x_2 & & -3x_4 & = & 3 \\ & & x_3 & +5x_4 & = & 4 \end{cases}$$

On fait apparaître des 0 sur la deuxième colonne (en utilisant le pivot de la deuxième ligne) :

$$\begin{cases} x_1 & & & -4x_4 & = & -2 & \quad L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\ & x_2 & & -3x_4 & = & 3 \\ & & x_3 & +5x_4 & = & 4 \end{cases}$$

Le système est sous forme échelonnée réduite.

Partie C. Solutions. Le système est maintenant très simple à résoudre. En choisissant x_4 comme variable libre, on peut exprimer x_1, x_2, x_3 en fonction de x_4 :

$$x_1 = 4x_4 - 2, \quad x_2 = 3x_4 + 3, \quad x_3 = -5x_4 + 4.$$

Ce qui permet d'obtenir toutes les solutions du système :

$$\mathscr{S} = \left\{(4x_4 - 2, 3x_4 + 3, -5x_4 + 4, x_4) \mid x_4 \in \mathbb{R}\right\}.$$

1.3.4. Systèmes homogènes

Le fait que l'on puisse toujours se ramener à un système échelonné réduit implique le résultat suivant :

Théorème 2.
Tout système homogène d'équations linéaires dont le nombre d'inconnues est

strictement plus grand que le nombre d'équations a une infinité de solutions.

Exemple 9.

Considérons le système homogène

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_5 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_3 + 8x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$$

Sa forme échelonnée réduite est

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 13x_5 = 0 \\ x_3 + 20x_5 = 0 \\ x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases}$$

On pose comme variables libres x_2 et x_5 pour avoir

$$x_1 = -x_2 - 13x_5, \qquad x_3 = -20x_5, \qquad x_4 = 2x_5,$$

et l'ensemble des solutions :

$$\mathscr{S} = \left\{(-x_2 - 13x_5, x_2, -20x_5, 2x_5, x_5) \mid x_2, x_5 \in \mathbb{R}\right\}$$

qui est bien infini.

Mini-exercices.

1. Écrire un système linéaire à 4 équations et 5 inconnues qui soit échelonné mais pas réduit. Idem avec échelonné, non réduit, dont tous les coefficients sont 0 ou +1. Idem avec échelonné et réduit.
2. Résoudre les systèmes échelonnés suivants :

$$\left\{\begin{array}{rrrrcr} 2x_1 & -x_2 & & +x_4 & = & 1 \\ & x_2 & +x_3 & -2x_4 & = & 3 \\ & & 2x_3 & +x_4 & = & 4 \\ & & & x_4 & = & -2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrcr} x_1 & +x_2 & & +x_4 & = & 0 \\ & x_2 & +x_3 & & = & 0 \\ & & 2x_3 & +x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrcr} x_1 & +2x_2 & & +x_4 & = & 0 \\ & & 2x_3 & -3x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

3. Si l'on passe d'un système (S) par une des trois opérations élémentaires à un système (S'), alors quelle opération permet de passer de (S') à (S) ?
4. Résoudre les systèmes linéaires suivants par la méthode du pivot de Gauss :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & 3 \\ x & - & y & + & 3z & = & 8 \\ x & + & 2y & - & z & = & -3 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 4x_2 & - & 6x_3 & - & 2x_4 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & - & 7x_3 & + & 4x_4 & = & 2 \\ 5x_1 & + & 10x_2 & - & 11x_3 & + & 6x_4 & = & 3 \end{array}\right.$$

5. Résoudre le système suivant, selon les valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & +y & -z & = & a \\ -x & & +2z & = & b \\ & 2y & +2z & = & 4 \end{array}\right.$$

Chapitre 2

Matrices

Les matrices sont des tableaux de nombres. La résolution d'un certain nombre de problèmes d'algèbre linéaire se ramène à des manipulations sur les matrices. Ceci est vrai en particulier pour la résolution des systèmes linéaires.

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un corps. On peut penser à $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2.1. Algèbre des matrices

2.1.1. Définition d'une matrice

Définition 1.

- Une **matrice** A est un tableau rectangulaire d'éléments de $\mathbb{K}$.
- Elle est dite de **taille** $n \times p$ si le tableau possède n lignes et p colonnes.
- Les nombres du tableau sont appelés les **coefficients** de A.
- Le coefficient situé à la i-ème ligne et à la j-ème colonne est noté $a_{i,j}$.

Un tel tableau est représenté de la manière suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \quad \text{ou} \quad \left(a_{i,j}\right).$$

Exemple 1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

est une matrice 2×3 avec, par exemple, $a_{1,1} = 1$ et $a_{2,3} = 7$.

Encore quelques définitions :

Définition 2.

- Deux matrices sont **égales** lorsqu'elles ont la même taille et que les coefficients correspondants sont égaux.
- L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $M_{n,p}(\mathbb{K})$. Les éléments de $M_{n,p}(\mathbb{R})$ sont appelés **matrices réelles**.

2.1.2. Matrices particulières

Voici quelques types de matrices intéressantes :

- Si $n = p$ (même nombre de lignes que de colonnes), la matrice est dite **matrice carrée**. On note $M_n(\mathbb{K})$ au lieu de $M_{n,n}(\mathbb{K})$.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

  Les éléments $a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n}$ forment la **diagonale principale** de la matrice.

- Une matrice qui n'a qu'une seule ligne ($n = 1$) est appelée **matrice ligne** ou **vecteur ligne**. On la note
$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \end{pmatrix}.$$
- De même, une matrice qui n'a qu'une seule colonne ($p = 1$) est appelée **matrice colonne** ou **vecteur colonne**. On la note
$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix}.$$
- La matrice (de taille $n \times p$) dont tous les coefficients sont des zéros est appelée la **matrice nulle** et est notée $0_{n,p}$ ou plus simplement 0. Dans le calcul matriciel, la matrice nulle joue le rôle du nombre 0 pour les réels.

2.1.3. Addition de matrices

Définition 3 (Somme de deux matrices)**.**
Soient A et B deux matrices ayant la même taille $n \times p$. Leur **somme** $C = A + B$ est la matrice de taille $n \times p$ définie par
$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

En d'autres termes, on somme coefficients par coefficients. Remarque : on note indifféremment a_{ij} où $a_{i,j}$ pour les coefficients de la matrice A.

Exemple 2.

$$\text{Si} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad A + B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Par contre si} \quad B' = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad A + B' \quad \text{n'est pas définie.}$$

Définition 4 (Produit d'une matrice par un scalaire)**.**
Le produit d'une matrice $A = (a_{ij})$ de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ par un scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ est la matrice (αa_{ij}) formée en multipliant chaque coefficient de A par α. Elle est

notée $\alpha \cdot A$ (ou simplement αA).

Exemple 3.

$$\text{Si} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \alpha = 2 \qquad \text{alors} \qquad \alpha A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice $(-1)A$ est l'**opposée** de A et est notée $-A$. La **différence** $A - B$ est définie par $A + (-B)$.

Exemple 4.

$$\text{Si} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 7 & -5 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad A - B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -2 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

L'addition et la multiplication par un scalaire se comportent sans surprises :

Proposition 1.
Soient A, B et C trois matrices appartenant à $M_{n,p}(\mathbb{K})$. Soient $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\beta \in \mathbb{K}$ deux scalaires.

1. $A + B = B + A$ *: la somme est commutative,*
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ *: la somme est associative,*
3. $A + 0 = A$ *: la matrice nulle est l'élément neutre de l'addition,*
4. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$*,*
5. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$*.*

Démonstration. Prouvons par exemple le quatrième point. Le terme général de $(\alpha + \beta)A$ est égal à $(\alpha + \beta)a_{ij}$. D'après les règles de calcul dans $\mathbb{K}$, $(\alpha + \beta)a_{ij}$ est égal à $\alpha a_{ij} + \beta a_{ij}$ qui est le terme général de la matrice $\alpha A + \beta A$. $\square$

Mini-exercices.

1. Soient $A = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 21 & -6 \\ 0 & 3 \\ -3 & 12 \end{pmatrix}$, $D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$. Calculer toutes les sommes possibles de deux de ces matrices. Calculer $3A + 2C$ et $5B - 4D$. Trouver α tel que $A - \alpha C$ soit la matrice nulle.
2. Montrer que si $A + B = A$, alors B est la matrice nulle.
3. Que vaut $0 \cdot A$? et $1 \cdot A$? Justifier l'affirmation : $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$. Idem

avec $nA = A + A + \cdots + A$ (n occurrences de A).

2.2. Multiplication de matrices

2.2.1. Définition du produit

Le produit AB de deux matrices A et B est défini si et seulement si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

Définition 5 (Produit de deux matrices)**.**
Soient $A = (a_{ij})$ une matrice $n \times p$ et $B = (b_{ij})$ une matrice $p \times q$. Alors le produit $C = AB$ est une matrice $n \times q$ dont les coefficients c_{ij} sont définis par :

$$\boxed{c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}}$$

On peut écrire le coefficient de façon plus développée, à savoir :

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj} + \cdots + a_{ip}b_{pj}.$$

Il est commode de disposer les calculs de la façon suivante.

$$\begin{array}{rcl} & & \begin{pmatrix} & & & \times & & \\ & & & \times & & \\ & & & \times & & \\ & & & \times & & \end{pmatrix} \leftarrow B \\ A \rightarrow & \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ \times & \times & \times & \times \\ & & & \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} & & & | & & \\ & & & | & & \\ - & - & - & c_{ij} & & \\ & & & & & \end{pmatrix} \leftarrow AB \end{array}$$

Avec cette disposition, on considère d'abord la ligne de la matrice A située à gauche du coefficient que l'on veut calculer (ligne représentée par des $\times$ dans A) et aussi la colonne de la matrice B située au-dessus du coefficient que l'on veut calculer (colonne représentée par des $\times$ dans B). On calcule le produit du premier coefficient de la ligne par le premier coefficient de la colonne ($a_{i1} \times b_{1j}$), que l'on ajoute au produit du deuxième coefficient de la ligne par le deuxième coefficient de la colonne ($a_{i2} \times b_{2j}$), que l'on ajoute au produit du troisième...

2.2.2. Exemples

Exemple 5.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On dispose d'abord le produit correctement (à gauche) : la matrice obtenue est de taille 2×2. Puis on calcule chacun des coefficients, en commençant par le premier coefficient $c_{11} = 1 \times 1 \ + \ 2 \times (-1) \ + \ 3 \times 1 = 2$ (au milieu), puis les autres (à droite).

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} \color{red}{1} & 2 \\ \color{red}{-1} & 1 \\ \color{red}{1} & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \color{red}{1} & \color{red}{2} & \color{red}{3} \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \color{blue}{2} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 11 \end{pmatrix} \end{array}$$

Un exemple intéressant est le produit d'un vecteur ligne par un vecteur colonne :

$$u = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Alors $u \times v$ est une matrice de taille 1×1 dont l'unique coefficient est $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$. Ce nombre s'appelle le **produit scalaire** des vecteurs u et v.

Calculer le coefficient c_{ij} dans le produit $A \times B$ revient donc à calculer le produit scalaire des vecteurs formés par la i-ème ligne de A et la j-ème colonne de B.

2.2.3. Pièges à éviter

Premier piège. Le produit de matrices n'est pas commutatif en général.
En effet, il se peut que AB soit défini mais pas BA, ou que AB et BA soient tous deux définis mais pas de la même taille. Mais même dans le cas où AB et BA sont définis et de la même taille, on a en général $AB \neq BA$.

Exemple 6.

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \qquad \text{mais} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 29 & -2 \end{pmatrix}.$$

Deuxième piège. $AB = 0$ **n'implique pas** $A = 0$ **ou** $B = 0$**.**
Il peut arriver que le produit de deux matrices non nulles soit nul. En d'autres termes, on peut avoir $A \neq 0$ et $B \neq 0$ mais $AB = 0$.

Exemple 7.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Troisième piège. $AB = AC$ **n'implique pas** $B = C$**.** On peut avoir $AB = AC$ et $B \neq C$.

Exemple 8.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \quad AB = AC = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 15 & 12 \end{pmatrix}.$$

2.2.4. Propriétés du produit de matrices

Malgré les difficultés soulevées au-dessus, le produit vérifie les propriétés suivantes :

Proposition 2.

1. *$A(BC) = (AB)C$: associativité du produit,*
2. *$A(B+C) = AB+AC$ et $(B+C)A = BA+CA$: distributivité du produit par rapport à la somme,*

3. $A \cdot 0 = 0$ *et* $0 \cdot A = 0$.

Démonstration. Posons $A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, $B = (b_{ij}) \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C = (c_{ij}) \in M_{q,r}(\mathbb{K})$. Prouvons que $A(BC) = (AB)C$ en montrant que les matrices $A(BC)$ et $(AB)C$ ont les mêmes coefficients.

Le terme d'indice (i,k) de la matrice AB est $x_{ik} = \sum_{\ell=1}^{p} a_{i\ell} b_{\ell k}$. Le terme d'indice (i,j) de la matrice $(AB)C$ est donc

$$\sum_{k=1}^{q} x_{ik} c_{kj} = \sum_{k=1}^{q} \left(\sum_{\ell=1}^{p} a_{i\ell} b_{\ell k} \right) c_{kj}.$$

Le terme d'indice (ℓ, j) de la matrice BC est $y_{\ell j} = \sum_{k=1}^{q} b_{\ell k} c_{kj}$. Le terme d'indice (i,j) de la matrice $A(BC)$ est donc

$$\sum_{\ell=1}^{p} a_{i\ell} \left(\sum_{k=1}^{q} b_{\ell k} c_{kj} \right).$$

Comme dans $\mathbb{K}$ la multiplication est distributive et associative, les coefficients de $(AB)C$ et $A(BC)$ coïncident. Les autres démonstrations se font comme celle de l'associativité. □

2.2.5. La matrice identité

La matrice carrée suivante s'appelle la **matrice identité** :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Ses éléments diagonaux sont égaux à 1 et tous ses autres éléments sont égaux à 0. Elle se note I_n ou simplement I. Dans le calcul matriciel, la matrice identité joue un rôle analogue à celui du nombre 1 pour les réels. C'est l'élément neutre pour la multiplication. En d'autres termes :

Proposition 3.

> *Si A est une matrice $n \times p$, alors*
> $$I_n \cdot A = A \qquad \text{et} \qquad A \cdot I_p = A.$$

Démonstration. Nous allons détailler la preuve. Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ de terme général a_{ij}. La matrice unité d'ordre p est telle que tous les éléments de la diagonale principale sont égaux à 1, les autres étant tous nuls.
On peut formaliser cela en introduisant le symbole de Kronecker. Si i et j sont deux entiers, on appelle **symbole de Kronecker**, et on note $\delta_{i,j}$, le réel qui vaut 0 si i est différent de j, et 1 si i est égal à j. Donc

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq j \\ 1 & \text{si} \quad i = j. \end{cases}$$

Alors le terme général de la matrice identité I_p est $\delta_{i,j}$ avec i et j entiers, compris entre 1 et p.
La matrice produit AI_p est une matrice appartenant à $M_{n,p}(\mathbb{K})$ dont le terme général c_{ij} est donné par la formule $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\delta_{kj}$. Dans cette somme, i et j sont fixés et k prend toutes les valeurs comprises entre 1 et p. Si $k \neq j$ alors $\delta_{kj} = 0$, et si $k = j$ alors $\delta_{kj} = 1$. Donc dans la somme qui définit c_{ij}, tous les termes correspondant à des valeurs de k différentes de j sont nuls et il reste donc $c_{ij} = a_{ij}\delta_{jj} = a_{ij}1 = a_{ij}$. Donc les matrices AI_p et A ont le même terme général et sont donc égales. L'égalité $I_nA = A$ se démontre de la même façon. □

2.2.6. Puissance d'une matrice

Dans l'ensemble $M_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées de taille $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, la multiplication des matrices est une opération interne : si $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ alors $AB \in M_n(\mathbb{K})$.
En particulier, on peut multiplier une matrice carrée par elle-même : on note $A^2 = A \times A$, $A^3 = A \times A \times A$.
On peut ainsi définir les puissances successives d'une matrice :

> **Définition 6.**
> Pour tout $A \in M_n(\mathbb{K})$, on définit les puissances successives de A par $A^0 = I_n$ et

$A^{p+1} = A^p \times A$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Autrement dit, $A^p = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{p \text{ facteurs}}$.

Exemple 9.

On cherche à calculer A^p avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On calcule A^2, A^3 et A^4 et on obtient :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad A^4 = A^3 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

L'observation de ces premières puissances permet de penser que la formule est : $A^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^p - 1 \\ 0 & (-1)^p & 0 \\ 0 & 0 & 2^p \end{pmatrix}$. Démontrons ce résultat par récurrence.

Il est vrai pour $p = 0$ (on trouve l'identité). On le suppose vrai pour un entier p et on va le démontrer pour $p + 1$. On a, d'après la définition,

$$A^{p+1} = A^p \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^p - 1 \\ 0 & (-1)^p & 0 \\ 0 & 0 & 2^p \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^{p+1} - 1 \\ 0 & (-1)^{p+1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{p+1} \end{pmatrix}.$$

Donc la propriété est démontrée.

2.2.7. Formule du binôme

Comme la multiplication n'est pas commutative, les identités binomiales usuelles sont fausses. En particulier, $(A+B)^2$ ne vaut en général pas $A^2 + 2AB + B^2$, mais on sait seulement que

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2.$$

Proposition 4 (Calcul de $(A+B)^p$ lorsque $AB = BA$)**.**
Soient A et B deux éléments de $M_n(\mathbb{K})$ qui ***commutent****, c'est-à-dire tels que*

$AB = BA$. Alors, pour tout entier $p \geqslant 0$, on a la formule

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^{p-k} B^k$$

où $\binom{p}{k}$ désigne le coefficient du binôme.

La démonstration est similaire à celle de la formule du binôme pour $(a+b)^p$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Exemple 10.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On pose $N = A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice N est nilpotente (c'est-à-dire il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $N^k = 0$) comme le montrent les calculs suivants :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad N^4 = 0.$$

Comme on a $A = I + N$ et les matrices N et I commutent (la matrice identité commute avec toutes les matrices), on peut appliquer la formule du binôme de Newton. On utilise que $I^k = I$ pour tout k et surtout que $N^k = 0$ si $k \geqslant 4$. On obtient

$$A^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} N^k I^{p-k} = \sum_{k=0}^{3} \binom{p}{k} N^k = I + pN + \tfrac{p(p-1)}{2!} N^2 + \tfrac{p(p-1)(p-2)}{3!} N^3.$$

D'où

$$A^p = \begin{pmatrix} 1 & p & p^2 & p(p^2-p+1) \\ 0 & 1 & 2p & p(3p-2) \\ 0 & 0 & 1 & 3p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mini-exercices.

1. Soient $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 6 & -4 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -3 \end{smallmatrix}\right)$, $C = \left(\begin{smallmatrix} 8 & 2 \\ -3 & 2 \\ -5 & 5 \end{smallmatrix}\right)$, $D = \left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$, $E = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$. Quels produits sont possibles ? Les calculer !

2. Soient $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ et $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Calculer A^2, B^2, AB et BA.
3. Soient $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ et $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Calculer A^p et B^p pour tout $p \geqslant 0$. Montrer que $AB = BA$. Calculer $(A+B)^p$.

2.3. Inverse d'une matrice : définition

2.3.1. Définition

Définition 7 (Matrice inverse).
Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$. S'il existe une matrice carrée B de taille $n \times n$ telle que

$$AB = I \qquad \text{et} \qquad BA = I,$$

on dit que A est **inversible**. On appelle B l'**inverse de A** et on la note A^{-1}.

On verra plus tard qu'il suffit en fait de vérifier une seule des conditions $AB = I$ ou bien $BA = I$.

- Plus généralement, quand A est inversible, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note :

$$A^{-p} = (A^{-1})^p = \underbrace{A^{-1}A^{-1}\cdots A^{-1}}_{p \text{ facteurs}}.$$

- L'ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{K})$ est noté $GL_n(\mathbb{K})$.

2.3.2. Exemples

Exemple 11.
Soit $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right)$. Étudier si A est inversible, c'est étudier l'existence d'une matrice $B = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, telle que $AB = I$ et $BA = I$. Or $AB = I$ équivaut à :

$$AB = I \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette égalité équivaut au système :

$$\begin{cases} a+2c=1 \\ b+2d=0 \\ 3c=0 \\ 3d=1 \end{cases}$$

Sa résolution est immédiate : $a=1$, $b=-\frac{2}{3}$, $c=0$, $d=\frac{1}{3}$. Il n'y a donc qu'une seule matrice possible, à savoir $B=\left(\begin{smallmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{smallmatrix}\right)$. Pour prouver qu'elle convient, il faut aussi montrer l'égalité $BA=I$, dont la vérification est laissée au lecteur. La matrice A est donc inversible et $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Exemple 12.

La matrice $A=\left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ n'est pas inversible. En effet, soit $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice quelconque. Alors le produit

$$BA=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3a+5b & 0 \\ 3c+5d & 0 \end{pmatrix}$$

ne peut jamais être égal à la matrice identité.

Exemple 13.

- Soit I_n la matrice carrée identité de taille $n \times n$. C'est une matrice inversible, et son inverse est elle-même par l'égalité $I_n I_n = I_n$.
- La matrice nulle 0_n de taille $n \times n$ n'est pas inversible. En effet on sait que, pour toute matrice B de $M_n(\mathbb{K})$, on a $B0_n = 0_n$, qui ne peut jamais être la matrice identité.

2.3.3. Propriétés

Unicité

Proposition 5.
Si A est inversible, alors son inverse est unique.

Démonstration. La méthode classique pour mener à bien une telle démonstration est de supposer l'existence de deux matrices B_1 et B_2 satisfaisant aux conditions imposées et de démontrer que $B_1 = B_2$.
Soient donc B_1 telle que $AB_1 = B_1A = I_n$ et B_2 telle que $AB_2 = B_2A = I_n$. Calculons $B_2(AB_1)$. D'une part, comme $AB_1 = I_n$, on a $B_2(AB_1) = B_2$. D'autre part, comme le produit des matrices est associatif, on a $B_2(AB_1) = (B_2A)B_1 = I_nB_1 = B_1$. Donc $B_1 = B_2$. □

Inverse de l'inverse

Proposition 6.
Soit A une matrice inversible. Alors A^{-1} est aussi inversible et on a :

$$\boxed{(A^{-1})^{-1} = A}$$

Inverse d'un produit

Proposition 7.
Soient A et B deux matrices inversibles de même taille. Alors AB est inversible et

$$\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$$

Il faut bien faire attention à l'inversion de l'ordre !

Démonstration. Il suffit de montrer $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I$ et $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I$. Cela suit de

$$\begin{aligned} &(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I, \\ \text{et} \quad &(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I. \end{aligned}$$

□

De façon analogue, on montre que si $A_1, \ldots, A_m$ sont inversibles, alors

$$(A_1A_2\cdots A_m)^{-1} = A_m^{-1}A_{m-1}^{-1}\cdots A_1^{-1}.$$

Simplification par une matrice inversible

Si C est une matrice quelconque de $M_n(\mathbb{K})$, nous avons vu que la relation $AC = BC$ où A et B sont des éléments de $M_n(\mathbb{K})$ n'entraîne pas forcément l'égalité $A = B$. En revanche, si C est une matrice inversible, on a la proposition suivante :

Proposition 8.
Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{K})$ et C une matrice inversible de $M_n(\mathbb{K})$. Alors l'égalité $AC = BC$ implique l'égalité $A = B$.

Démonstration. Ce résultat est immédiat : si on multiplie à droite l'égalité $AC = BC$ par C^{-1}, on obtient l'égalité : $(AC)C^{-1} = (BC)C^{-1}$. En utilisant l'associativité du produit des matrices on a $A(CC^{-1}) = B(CC^{-1})$, ce qui donne d'après la définition de l'inverse $AI = BI$, d'où $A = B$. $\square$

Mini-exercices.

1. Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer A^{-1}, B^{-1} , $(AB)^{-1}$, $(BA)^{-1}$, A^{-2}.
2. Calculer l'inverse de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $2A - A^2$. Sans calculs, en déduire A^{-1}.

2.4. Inverse d'une matrice : calcul

Nous allons voir une méthode pour calculer l'inverse d'une matrice quelconque de manière efficace. Cette méthode est une reformulation de la méthode du pivot de Gauss pour les systèmes linéaires. Auparavant, nous commençons par une formule directe dans le cas simple des matrices 2×2.

2.4.1. Matrices 2×2

Considérons la matrice 2×2 : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Proposition 9.
Si $ad - bc \neq 0$, alors A est inversible et

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

Démonstration. On vérifie que si $B = \frac{1}{ad-bc}\left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right)$ alors $AB = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Idem pour BA. □

2.4.2. Méthode de Gauss pour inverser les matrices

La méthode pour inverser une matrice A consiste à faire des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice A jusqu'à la transformer en la matrice identité I. On fait simultanément les mêmes opérations élémentaires en partant de la matrice I. On aboutit alors à une matrice qui est A^{-1}. La preuve sera vue dans la section suivante.

En pratique, on fait les deux opérations en même temps en adoptant la disposition suivante : à côté de la matrice A que l'on veut inverser, on rajoute la matrice identité pour former un tableau $(A \mid I)$. Sur les lignes de cette matrice augmentée, on effectue des opérations élémentaires jusqu'à obtenir le tableau $(I \mid B)$. Et alors $B = A^{-1}$.

Ces opérations élémentaires sur les lignes sont :

1. $L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \neq 0$: on peut multiplier une ligne par un réel non nul (ou un élément de $\mathbb{K} \setminus \{0\}$).
2. $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ (et $j \neq i$) : on peut ajouter à la ligne L_i un multiple d'une autre ligne L_j.
3. $L_i \leftrightarrow L_j$: on peut échanger deux lignes.

N'oubliez pas : tout ce que vous faites sur la partie gauche de la matrice augmentée, vous devez aussi le faire sur la partie droite.

2.4.3. Un exemple

Calculons l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Voici la matrice augmentée, avec les lignes numérotées :

$$(A \mid I) = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

On applique la méthode de Gauss pour faire apparaître des 0 sur la première colonne, d'abord sur la deuxième ligne par l'opération élémentaire $L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$ qui conduit à la matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1} \\ \\ \end{array}$$

Puis un 0 sur la première colonne, à la troisième ligne, avec $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3 + L_1} \end{array}$$

On multiplie la ligne L_2 afin qu'elle commence par 1 :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ {\scriptstyle L_2 \leftarrow -\frac{1}{8} L_2} \\ \\ \end{array}$$

On continue afin de faire apparaître des 0 partout sous la diagonale, et on multiplie la ligne L_3. Ce qui termine la première partie de la méthode de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2} \end{array}$$

puis

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ {\scriptstyle L_3 \leftarrow 2L_3} \end{array}$$

Il ne reste plus qu'à « remonter » pour faire apparaître des zéros au-dessus de la diagonale :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad L_2 \leftarrow L_2 - \tfrac{5}{8} L_3$$

puis

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 - L_3$$

Ainsi l'inverse de A est la matrice obtenue à droite et après avoir factorisé tous les coefficients par $\frac{1}{4}$, on a obtenu :

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 7 & -3 & -5 \\ -8 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Pour se rassurer sur ses calculs, on n'oublie pas de vérifier rapidement que $A \times A^{-1} = I$.

Mini-exercices.

1. Si possible calculer l'inverse des matrices : $\left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 4 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} \alpha+1 & 1 \\ 2 & \alpha \end{smallmatrix}\right)$.
2. Soit $A(\theta) = \left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{smallmatrix}\right)$. Calculer $A(\theta)^{-1}$.
3. Calculer l'inverse des matrices : $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 3 \end{smallmatrix}\right)$.

2.5. Inverse d'une matrice : systèmes linéaires et matrices élémentaires

2.5.1. Matrices et systèmes linéaires

Le système linéaire

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}\, x_1 & + & a_{12}\, x_2 & + & \cdots & + & a_{1p}\, x_p & = & b_1 \\ a_{21}\, x_1 & + & a_{22}\, x_2 & + & \cdots & + & a_{2p}\, x_p & = & b_2 \\ & & \cdots & & & & & & \\ a_{n1}\, x_1 & + & a_{n2}\, x_2 & + & \cdots & + & a_{np}\, x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{B}.$$

On appelle $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice des coefficients du système. $B \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ est le vecteur du second membre. Le vecteur $X \in M_{p,1}(\mathbb{K})$ est une solution du système si et seulement si

$$AX = B.$$

Nous savons que :

> **Théorème 1.**
> *Un système d'équations linéaires n'a soit aucune solution, soit une seule solution, soit une infinité de solutions.*

2.5.2. Matrices inversibles et systèmes linéaires

Considérons le cas où le nombre d'équations égale le nombre d'inconnues :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{B}.$$

Alors $A \in M_n(\mathbb{K})$ est une matrice carrée et B un vecteur de $M_{n,1}(\mathbb{K})$. Pour tout second membre, nous pouvons utiliser les matrices pour trouver la solution du système linéaire.

Proposition 10.
Si la matrice A est inversible, alors la solution du système $AX = B$ est unique et est :

$$\boxed{X = A^{-1}B.}$$

La preuve est juste de vérifier que si $X = A^{-1}B$, alors $AX = A\big(A^{-1}B\big) = \big(AA^{-1}\big)B = I \cdot B = B$. Réciproquement si $AX = B$, alors nécessairement $X = A^{-1}B$. Nous verrons bientôt que si la matrice n'est pas inversible, alors soit il n'y a pas de solution, soit une infinité.

2.5.3. Les matrices élémentaires

Pour calculer l'inverse d'une matrice A, et aussi pour résoudre des systèmes linéaires, nous avons utilisé trois opérations élémentaires sur les lignes qui sont :

1. $L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \neq 0$: on peut multiplier une ligne par un réel non nul (ou un élément de $\mathbb{K} \setminus \{0\}$).
2. $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ (et $j \neq i$) : on peut ajouter à la ligne L_i un multiple d'une autre ligne L_j.
3. $L_i \leftrightarrow L_j$: on peut échanger deux lignes.

Nous allons définir trois matrices élémentaires $E_{L_i \leftarrow \lambda L_i}$, $E_{L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j}$, $E_{L_i \leftrightarrow L_j}$ correspondant à ces opérations. Plus précisément, le produit $E \times A$ correspondra à l'opération élémentaire sur A. Voici les définitions accompagnées d'exemples.

1. La matrice $E_{L_i \leftarrow \lambda L_i}$ est la matrice obtenue en multipliant par λ la i-ème ligne de la matrice identité I_n, où λ est un nombre réel non nul.

$$E_{L_2 \leftarrow 5L_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. La matrice $E_{L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j}$ est la matrice obtenue en ajoutant λ fois la j-ème ligne de I_n à la i-ème ligne de I_n.

$$E_{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. La matrice $E_{L_i \leftrightarrow L_j}$ est la matrice obtenue en permutant les i-ème et j-ème lignes de I_n.

$$E_{L_2 \leftrightarrow L_4} = E_{L_4 \leftrightarrow L_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les opérations élémentaires sur les lignes sont réversibles, ce qui entraîne l'inversibilité des matrices élémentaires.

Le résultat de la multiplication d'un matrice élémentaire E par A est la matrice obtenue en effectuant l'opération élémentaire correspondante sur A. Ainsi :

1. La matrice $E_{L_i \leftarrow \lambda L_i} \times A$ est la matrice obtenue en multipliant par λ la i-ème ligne de A.
2. La matrice $E_{L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j} \times A$ est la matrice obtenue en ajoutant λ fois la j-ème ligne de A à la i-ème ligne de A.
3. La matrice $E_{L_i \leftrightarrow L_j} \times A$ est la matrice obtenue en permutant les i-ème et j-ème lignes de A.

Exemple 14.

1.

$$E_{L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2} \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \frac{1}{3}y_1 & \frac{1}{3}y_2 & \frac{1}{3}y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$$

2.

$$E_{L_1 \leftarrow L_1 - 7L_3} \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 7z_1 & x_2 - 7z_2 & x_3 - 7z_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$$

3.

$$E_{L_2 \leftrightarrow L_3} \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

2.5.4. Équivalence à une matrice échelonnée

Définition 8.
Deux matrices A et B sont dites **équivalentes par lignes** si l'une peut être obtenue à partir de l'autre par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes. On note $A \sim B$.

Définition 9.
Une matrice est **échelonnée** si :

- le nombre de zéros commençant une ligne croît strictement ligne par ligne jusqu'à ce qu'il ne reste plus que des zéros.

Elle est **échelonnée réduite** si en plus :

- le premier coefficient non nul d'une ligne (non nulle) vaut 1 ;
- et c'est le seul élément non nul de sa colonne.

Exemple d'une matrice échelonnée (à gauche) et échelonnée réduite (à droite) ;

les $*$ désignent des coefficients quelconques, les $+$ des coefficients non nuls :

$$\begin{pmatrix} + & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & + & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & + & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & + \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & * & 0 & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Théorème 2.
Étant donnée une matrice $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, il existe une unique matrice échelonnée réduite U obtenue à partir de A par des opérations élémentaires sur les lignes.

Ce théorème permet donc de se ramener par des opérations élémentaires à des matrices dont la structure est beaucoup plus simple : les matrices échelonnées réduites.

Démonstration. Nous admettons l'unicité.

L'existence se démontre grâce à l'algorithme de Gauss. L'idée générale consiste à utiliser des substitutions de lignes pour placer des zéros là où il faut de façon à créer d'abord une forme échelonnée, puis une forme échelonnée réduite.

Soit A une matrice $n \times p$ quelconque.

Partie A. Passage à une forme échelonnée.

Étape A.1. *Choix du pivot.*

On commence par inspecter la première colonne. Soit elle ne contient que des zéros, auquel cas on passe directement à l'étape A.3, soit elle contient au moins un terme non nul. On choisit alors un tel terme, que l'on appelle le **pivot**. Si c'est le terme a_{11}, on passe directement à l'étape A.2 ; si c'est un terme a_{i1} avec $i \neq 1$, on échange les lignes 1 et i ($L_1 \longleftrightarrow L_i$) et on passe à l'étape A.2.

Au terme de l'étape A.1, soit la matrice A a sa première colonne nulle (à gauche) ou bien on obtient une matrice équivalente dont le premier coefficient a'_{11} est non nul (à droite) :

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} = A \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a'_{1p} \\ a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2j} & \cdots & a'_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{ij} & \cdots & a'_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a'_{n1} & a'_{n2} & \cdots & a'_{nj} & \cdots & a'_{np} \end{pmatrix} \sim A.$$

Étape A.2. *Élimination.*
On ne touche plus à la ligne 1, et on se sert du pivot a'_{11} pour éliminer tous les termes a'_{i1} (avec $i \geqslant 2$) situés sous le pivot. Pour cela, il suffit de remplacer la ligne i par elle-même moins $\frac{a'_{i1}}{a'_{11}} \times$ la ligne 1, ceci pour $i = 2, \ldots, n$: $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{a'_{21}}{a'_{11}} L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{a'_{31}}{a'_{11}} L_1, \ldots$
Au terme de l'étape A.2, on a obtenu une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a'_{1p} \\ 0 & a''_{22} & \cdots & a''_{2j} & \cdots & a''_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & a''_{i2} & \cdots & a''_{ij} & \cdots & a''_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & a''_{n2} & \cdots & a''_{nj} & \cdots & a''_{np} \end{pmatrix} \sim A.$$

Étape A.3. *Boucle.*
Au début de l'étape A.3, on a obtenu dans tous les cas de figure une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} a^1_{11} & a^1_{12} & \cdots & a^1_{1j} & \cdots & a^1_{1p} \\ 0 & a^1_{22} & \cdots & a^1_{2j} & \cdots & a^1_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & a^1_{i2} & \cdots & a^1_{ij} & \cdots & a^1_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & a^1_{n2} & \cdots & a^1_{nj} & \cdots & a^1_{np} \end{pmatrix} \sim A$$

dont la première colonne est bien celle d'une matrice échelonnée. On va donc conserver cette première colonne. Si $a^1_{11} \neq 0$, on conserve aussi la première ligne, et l'on repart avec l'étape A.1 en l'appliquant cette fois à la sous-matrice $(n-1)\times(p-1)$ (ci-dessous à gauche : on « oublie » la première ligne et la première colonne de A) ; si $a_{11}^1 = 0$, on repart avec l'étape A.1 en l'appliquant à la sous-matrice $n\times(p-1)$ (à droite, on « oublie » la première colonne) :

$$\begin{pmatrix} a_{22}^1 & \cdots & a_{2j}^1 & \cdots & a_{2p}^1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i2}^1 & \cdots & a_{ij}^1 & \cdots & a_{ip}^1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n2}^1 & \cdots & a_{nj}^1 & \cdots & a_{np}^1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{12}^1 & \cdots & a_{1j}^1 & \cdots & a_{1p}^1 \\ a_{22}^1 & \cdots & a_{2j}^1 & \cdots & a_{2p}^1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i2}^1 & \cdots & a_{ij}^1 & \cdots & a_{ip}^1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n2}^1 & \cdots & a_{nj}^1 & \cdots & a_{np}^1 \end{pmatrix}$$

Au terme de cette deuxième itération de la boucle, on aura obtenu une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 & \cdots & a_{1j}^1 & \cdots & a_{1p}^1 \\ 0 & a_{22}^2 & \cdots & a_{2j}^2 & \cdots & a_{2p}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{ij}^2 & \cdots & a_{ip}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nj}^2 & \cdots & a_{np}^2 \end{pmatrix} \sim A,$$

et ainsi de suite.

Comme chaque itération de la boucle travaille sur une matrice qui a une colonne de moins que la précédente, alors au bout d'au plus $p-1$ itérations de la boucle, on aura obtenu une matrice échelonnée.

Partie B. Passage à une forme échelonnée réduite.

Étape B.1. *Homothéties.*

On repère le premier élément non nul de chaque ligne non nulle, et on multiplie cette ligne par l'inverse de cet élément. Exemple : si le premier élément non nul de la ligne i est $\alpha \neq 0$, alors on effectue $L_i \leftarrow \frac{1}{\alpha}L_i$. Ceci crée une matrice échelonnée avec des 1 en position de pivots.

Étape B.2. *Élimination.*

On élimine les termes situés au-dessus des positions de pivot comme précédemment, en procédant à partir du bas à droite de la matrice. Ceci ne modifie pas la structure échelonnée de la matrice en raison de la disposition des zéros dont on part.

□

Exemple 15.
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A. Passage à une forme échelonnée.
Première itération de la boucle, étape A.1. Le choix du pivot est tout fait, on garde $a_{11}^1 = 1$.
Première itération de la boucle, étape A.2. On ne fait rien sur la ligne 2 qui contient déjà un zéro en bonne position et on remplace la ligne 3 par $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$. On obtient

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Deuxième itération de la boucle, étape A.1. Le choix du pivot est tout fait, on garde $a_{22}^2 = 2$.
Deuxième itération de la boucle, étape A.2. On remplace la ligne 3 avec l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$. On obtient

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est échelonnée.

B. Passage à une forme échelonnée réduite.
Étape B.1, homothéties. On multiplie la ligne 2 par $\frac{1}{2}$ et la ligne 3 par $-\frac{1}{2}$ et l'on obtient

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Étape B.2, première itération. On ne touche plus à la ligne 3 et on remplace la ligne 2 par $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3$ et $L_1 \leftarrow L_1 - 4L_3$. On obtient

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Étape B.2, deuxième itération. On ne touche plus à la ligne 2 et on remplace la ligne 1 par $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$. On obtient

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui est bien échelonnée et réduite.

2.5.5. Matrices élémentaires et inverse d'une matrice

Théorème 3.
Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. La matrice A est inversible si et seulement si sa forme échelonnée réduite est la matrice identité I_n.

Démonstration. Notons U la forme échelonnée réduite de A. Et notons E le produit de matrices élémentaires tel que $EA = U$.

$\Longleftarrow$ Si $U = I_n$ alors $EA = I_n$. Ainsi par définition, A est inversible et $A^{-1} = E$.

$\Longrightarrow$ Nous allons montrer que si $U \neq I_n$, alors A n'est pas inversible.

- Supposons $U \neq I_n$. Alors la dernière ligne de U est nulle (sinon il y aurait un pivot sur chaque ligne donc ce serait I_n).
- Cela entraîne que U n'est pas inversible : en effet, pour tout matrice carrée V, la dernière ligne de UV est nulle ; on n'aura donc jamais $UV = I_n$.
- Alors, A n'est pas inversible non plus : en effet, si A était inversible, on aurait $U = EA$ et U serait inversible comme produit de matrices inversibles (E est inversible car c'est un produit de matrices élémentaires qui sont inversibles).

□

Remarque.
Justifions maintenant notre méthode pour calculer A^{-1}.
Nous partons de $(A|I)$ pour arriver par des opérations élémentaires sur les lignes à $(I|B)$. Montrons que $B = A^{-1}$. Faire une opération élémentaire signifie multiplier à gauche par une des matrices élémentaires. Notons E le produit de ces matrices élémentaires. Dire que l'on arrive à la fin du processus à I signifie $EA = I$. Donc $A^{-1} = E$. Comme on fait les mêmes opérations sur la partie droite du tableau, alors on obtient $EI = B$. Donc $B = E$. Conséquence : $B = A^{-1}$.

Corollaire 1.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) La matrice A est inversible.

(ii) Le système linéaire $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ a une unique solution $X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

(iii) Pour tout second membre B, le système linéaire $AX = B$ a une unique solution X.

Démonstration. Nous avons déjà vu $(i) \implies (ii)$ et $(i) \implies (iii)$.
Nous allons seulement montrer $(ii) \implies (i)$. Nous raisonnons par contraposée : nous allons montrer la proposition équivalente non$(i) \implies$ non(ii). Si A n'est pas inversible, alors sa forme échelonnée réduite U contient un premier zéro sur sa diagonale, disons à la place ℓ. Alors U à la forme suivante

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & c_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots & & \cdots & * \\ 0 & 0 & 1 & c_{\ell-1} & & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & & \cdots & 0 & * \end{pmatrix}. \quad \text{On note} \quad X = \begin{pmatrix} -c_1 \\ \vdots \\ -c_{\ell-1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alors X n'est pas le vecteur nul, mais UX est le vecteur nul. Comme $A = E^{-1}U$, alors AX est le vecteur nul. Nous avons donc trouvé un vecteur non nul X tel que $AX = 0$. □

Mini-exercices.

1. Exprimer les systèmes linéaires suivants sous forme matricielle et les résoudre en inversant la matrice : $\begin{cases} 2x+4y=7 \\ -2x+3y=-14 \end{cases}$, $\begin{cases} x+z=1 \\ -2y+3z=1 \\ x+z=1 \end{cases}$, $\begin{cases} x+t=\alpha \\ x-2y=\beta \\ x+y+t=2 \\ y+t=4 \end{cases}$.
2. Écrire les matrices 4×4 correspondant aux opérations élémentaires : $L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2$, $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{4}L_2$, $L_1 \leftrightarrow L_4$. Sans calculs, écrire leurs inverses. Écrire la matrice 4×4 de l'opération $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 + 3L_4$.
3. Écrire les matrices suivantes sous forme échelonnée, puis échelonnée réduite : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

2.6. Matrices triangulaires, transposition, trace, matrices symétriques

2.6.1. Matrices triangulaires, matrices diagonales

Soit A une matrice de taille $n\times n$. On dit que A est **triangulaire inférieure** si ses éléments au-dessus de la diagonale sont nuls, autrement dit :

$$i<j \implies a_{ij}=0.$$

Une matrice triangulaire inférieure a la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

On dit que A est **triangulaire supérieure** si ses éléments en-dessous de la diagonale sont nuls, autrement dit :

$$i > j \implies a_{ij} = 0.$$

Une matrice triangulaire supérieure a la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Exemple 16.

Deux matrices triangulaires inférieures (à gauche), une matrice triangulaire supérieure (à droite) :

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Une matrice qui est triangulaire inférieure ***et*** triangulaire supérieure est dite **diagonale**. Autrement dit : $i \neq j \implies a_{ij} = 0$.

Exemple 17.

Exemples de matrices diagonales :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Exemple 18 (Puissances d'une matrice diagonale)**.**

Si D est une matrice diagonale, il est très facile de calculer ses puissances D^p (par récurrence sur p) :

$$D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{n-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix} \qquad \implies \qquad D^p = \begin{pmatrix} \alpha_1^p & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2^p & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{n-1}^p & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha_n^p \end{pmatrix}$$

Théorème 4.
Une matrice A de taille $n \times n$, triangulaire, est inversible si et seulement si ses éléments diagonaux sont tous non nuls.

Démonstration. Supposons que A soit triangulaire supérieure.

- Si les éléments de la diagonale sont tous non nuls, alors la matrice A est déjà sous la forme échelonnée. En multipliant chaque ligne i par l'inverse de l'élément diagonal a_{ii}, on obtient des 1 sur la diagonale. De ce fait, la forme échelonnée réduite de A sera la matrice identité. Le théorème 3 permet de conclure que A est inversible.
- Inversement, supposons qu'au moins l'un des éléments diagonaux soit nul et notons $a_{\ell\ell}$ le premier élément nul de la diagonale. En multipliant les lignes 1 à $\ell - 1$ par l'inverse de leur élément diagonal, on obtient une matrice de la forme
$$\begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & & & \cdots & * \\ 0 & \ddots & * & \cdots & & \cdots & * \\ 0 & 0 & 1 & * & & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & {\color{red}0} & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & & \cdots & 0 & * \end{pmatrix}.$$
Il est alors clair que la colonne numéro ℓ de la forme échelonnée réduite ne contiendra pas de 1 comme pivot. La forme échelonnée réduite de A ne peut donc pas être I_n et par le théorème 3, A n'est pas inversible.

Dans le cas d'une matrice triangulaire inférieure, on utilise la transposition (qui fait l'objet de la section suivante) et on obtient une matrice triangulaire supérieure. On applique alors la démonstration ci-dessus. □

2.6.2. La transposition

Soit A la matrice de taille $n \times p$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

Définition 10.
On appelle **matrice transposée** de A la matrice A^T de taille $p \times n$ définie par :

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1p} & a_{2p} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

Autrement dit : le coefficient à la place (i, j) de A^T est a_{ji}. Ou encore la i-ème ligne de A devient la i-ème colonne de A^T (et réciproquement la j-ème colonne de A^T est la j-ème ligne de A).

Notation : La transposée de la matrice A se note aussi souvent ${}^tA$.

Exemple 19.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \\ -7 & 8 & 9 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

L'opération de transposition obéit aux règles suivantes :

Théorème 5.

1. $(A + B)^T = A^T + B^T$
2. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
3. $(A^T)^T = A$

4. $\boxed{(AB)^T = B^T A^T}$
5. *Si A est inversible, alors A^T l'est aussi et on a $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.*

Notez bien l'inversion : $(AB)^T = B^T A^T$, comme pour $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

2.6.3. La trace

Dans le cas d'une matrice carrée de taille $n \times n$, les éléments $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ sont appelés les **éléments diagonaux**.
Sa **diagonale principale** est la diagonale $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Définition 11.
La **trace** de la matrice A est le nombre obtenu en additionnant les éléments diagonaux de A. Autrement dit,

$$\boxed{\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.}$$

Exemple 20.

- Si $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{smallmatrix}\right)$, alors $\operatorname{tr} A = 2 + 5 = 7$.
- Pour $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 8 \\ 11 & 0 & -10 \end{smallmatrix}\right)$, $\operatorname{tr} B = 1 + 2 - 10 = -7$.

Théorème 6.
Soient A et B deux matrices $n \times n$. Alors :

1. $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$,
2. $\operatorname{tr}(\alpha A) = \alpha \operatorname{tr} A$ *pour tout* $\alpha \in \mathbb{K}$,
3. $\operatorname{tr}(A^T) = \operatorname{tr} A$,
4. $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

Démonstration.

1. Pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, le coefficient (i,i) de $A+B$ est $a_{ii}+b_{ii}$. Ainsi, on a bien $\operatorname{tr}(A+B)=\operatorname{tr}(A)+\operatorname{tr}(B)$.
2. On a $\operatorname{tr}(\alpha A)=\alpha a_{11}+\cdots+\alpha a_{nn}=\alpha(a_{11}+\cdots+a_{nn})=\alpha\operatorname{tr}A$.
3. Étant donné que la transposition ne change pas les éléments diagonaux, la trace de A est égale à la trace de A^T.
4. Notons c_{ij} les coefficients de AB. Alors par définition
$$c_{ii}=a_{i1}b_{1i}+a_{i2}b_{2i}+\cdots+a_{in}b_{ni}.$$
Ainsi,
$$\begin{array}{rcllll}\operatorname{tr}(AB) & = & a_{11}b_{11} & +a_{12}b_{21} & +\cdots & +a_{1n}b_{n1}\\ & & +a_{21}b_{12} & +a_{22}b_{22} & +\cdots & +a_{2n}b_{n2}\\ & & \vdots & & & \\ & & +a_{n1}b_{1n} & +a_{n2}b_{2n} & +\cdots & +a_{nn}b_{nn}.\end{array}$$
On peut réarranger les termes pour obtenir
$$\begin{array}{rcllll}\operatorname{tr}(AB) & = & a_{11}b_{11} & +a_{21}b_{12} & +\cdots & +a_{n1}b_{1n}\\ & & +a_{12}b_{21} & +a_{22}b_{22} & +\cdots & +a_{n2}b_{2n}\\ & & \vdots & & & \\ & & +a_{1n}b_{n1} & +a_{2n}b_{n2} & +\cdots & +a_{nn}b_{nn}.\end{array}$$
En utilisant la commutativité de la multiplication dans $\mathbb{K}$, la première ligne devient
$$b_{11}a_{11}+b_{12}a_{21}+\cdots+b_{1n}a_{n1}$$
qui vaut le coefficient $(1,1)$ de BA. On note d_{ij} les coefficients de BA. En faisant de même avec les autres lignes, on voit finalement que
$$\operatorname{tr}(AB)=d_{11}+\cdots+d_{nn}=\operatorname{tr}(BA).$$

□

2.6.4. Matrices symétriques

Définition 12.
Une matrice A de taille $n \times n$ est **symétrique** si elle est égale à sa transposée, c'est-à-dire si

$$A = A^T,$$

ou encore si $a_{ij} = a_{ji}$ pour tout $i, j = 1, \dots, n$. Les coefficients sont donc symétriques par rapport à la diagonale.

Exemple 21.
Les matrices suivantes sont symétriques :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple 22.
Pour une matrice B quelconque, les matrices $B \cdot B^T$ et $B^T \cdot B$ sont symétriques.
Preuve : $(BB^T)^T = (B^T)^T B^T = BB^T$. Idem pour $B^T B$.

2.6.5. Matrices antisymétriques

Définition 13.
Une matrice A de taille $n \times n$ est **antisymétrique** si

$$A^T = -A,$$

c'est-à-dire si $a_{ij} = -a_{ji}$ pour tout $i, j = 1, \dots, n$.

Exemple 23.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -4 & 0 & -5 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarquons que les éléments diagonaux d'une matrice antisymétrique sont toujours tous nuls.

Exemple 24.
Toute matrice est la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Preuve : Soit A une matrice. Définissons $B = \frac{1}{2}(A + A^T)$ et $C = \frac{1}{2}(A - A^T)$. Alors d'une part $A = B + C$; d'autre part B est symétrique, car $B^T = \frac{1}{2}(A^T + (A^T)^T) = \frac{1}{2}(A^T + A) = B$; et enfin C est antisymétrique, car $C^T = \frac{1}{2}(A^T - (A^T)^T) = -C$.
Exemple :

$$\text{Pour} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 8 & -3 \end{pmatrix} \qquad \text{alors} \qquad A \;=\; \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}}_{\text{symétrique}} \;+\; \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{antisymétrique}}.$$

Mini-exercices.

1. Montrer que la somme de deux matrices triangulaires supérieures reste triangulaire supérieure. Montrer que c'est aussi valable pour le produit.
2. Montrer que si A est triangulaire supérieure, alors A^T est triangulaire inférieure. Et si A est diagonale ?
3. Soit $A = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Calculer $A^T \cdot A$, puis $A \cdot A^T$.
4. Soit $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. Calculer $\operatorname{tr}(A \cdot A^T)$.
5. Soit A une matrice de taille 2×2 inversible. Montrer que si A est symétrique, alors A^{-1} aussi. Et si A est antisymétrique ?
6. Montrer que la décomposition d'une matrice sous la forme « symétrique + antisymétrique » est unique.

Chapitre 3

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

Ce chapitre est consacré à l'ensemble $\mathbb{R}^n$ vu comme espace vectoriel. Il peut être vu de plusieurs façons :

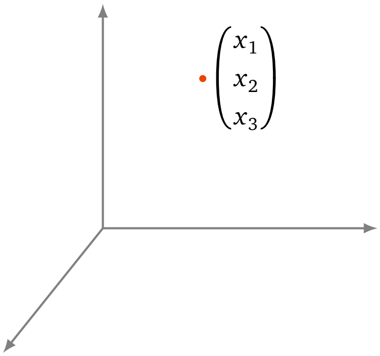
- un cours minimal sur les espaces vectoriels pour ceux qui n'auraient besoin que de $\mathbb{R}^n$,
- une introduction avant d'attaquer le cours détaillé sur les espaces vectoriels,
- une source d'exemples à lire en parallèle du cours sur les espaces vectoriels.

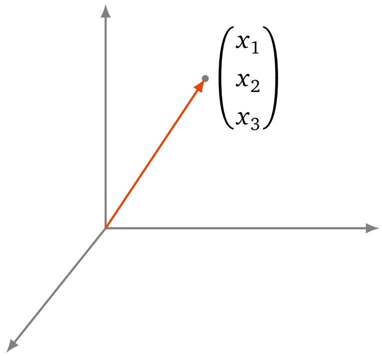
3.1. Vecteurs de $\mathbb{R}^n$

3.1.1. Opérations sur les vecteurs

- L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est souvent représenté par une droite. C'est un espace de dimension 1.
- Le plan est formé des couples $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ de nombres réels. Il est noté $\mathbb{R}^2$. C'est un espace à deux dimensions.
- L'espace de dimension 3 est constitué des triplets de nombres réels $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Il est noté $\mathbb{R}^3$.

  Le symbole $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ a deux interprétations géométriques : soit comme un point de l'espace (figure de gauche), soit comme un vecteur (figure de droite) :





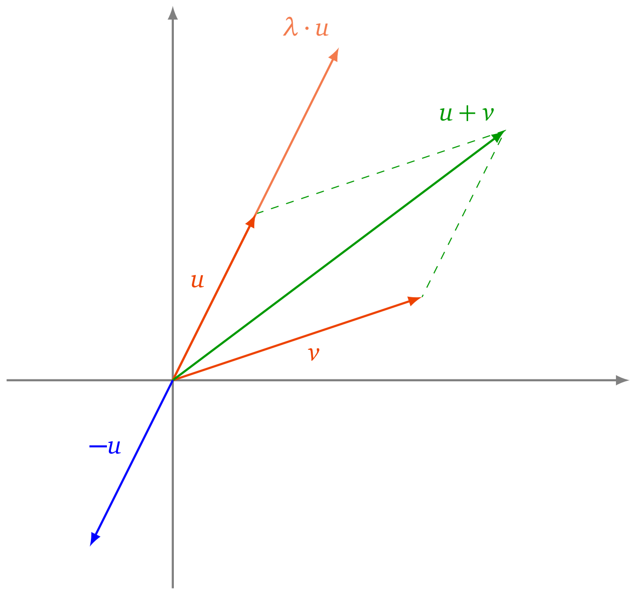
On généralise ces notions en considérant des espaces de dimension n pour tout entier positif $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ Les éléments de l'espace de dimension n sont les n-uples $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de nombres réels. L'espace de dimension n est noté $\mathbb{R}^n$. Comme en dimensions 2 et 3, le n-uple $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dénote aussi bien un point qu'un vecteur de l'espace de dimension n.

Soient $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.

- **Somme de deux vecteurs.** Leur somme est par définition le vecteur
$$u + v = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}.$$
- **Produit d'un vecteur par un scalaire.** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ (appelé un **scalaire**) :
$$\lambda \cdot u = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \vdots \\ \lambda u_n \end{pmatrix}.$$
- Le **vecteur nul** de $\mathbb{R}^n$ est le vecteur $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.
- L'**opposé** du vecteur $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ est le vecteur $-u = \begin{pmatrix} -u_1 \\ \vdots \\ -u_n \end{pmatrix}$.

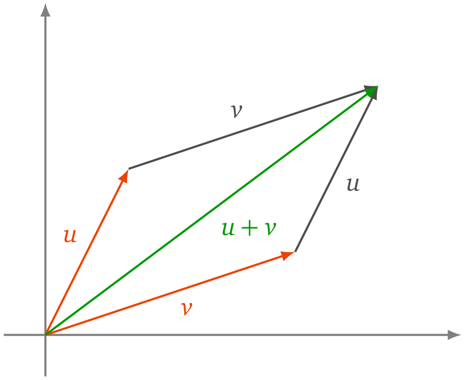
Voici des vecteurs dans $\mathbb{R}^2$ (ici $\lambda = 2$) :



Dans un premier temps, vous pouvez noter $\vec{u}, \vec{v}, \vec{0}$ au lieu de u, v, 0. Mais il faudra s'habituer rapidement à la notation sans flèche. De même, si λ est un scalaire et u un vecteur, on notera souvent λu au lieu de $\lambda \cdot u$.

Théorème 1.
Soient $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ *et* $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ *des vecteurs de* $\mathbb{R}^n$ *et* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. *Alors :*

1. $u + v = v + u$
2. $u + (v + w) = (u + v) + w$
3. $u + 0 = 0 + u = u$
4. $u + (-u) = 0$
5. $1 \cdot u = u$
6. $\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda\mu) \cdot u$
7. $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$
8. $(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$



Chacune de ces propriétés découle directement de la définition de la somme et de la multiplication par un scalaire. Ces huit propriétés font de $\mathbb{R}^n$ un **espace vectoriel**. Dans le cadre général, ce sont ces huit propriétés qui définissent ce qu'est un espace vectoriel.

3.1.2. Représentation des vecteurs de $\mathbb{R}^n$

Soit $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On l'appelle **vecteur colonne** et on considère naturellement u comme une matrice de taille $n \times 1$. Parfois, on rencontre aussi des **vecteurs lignes** : on peut voir le vecteur u comme une matrice $1 \times n$, de la forme $(u_1, \ldots, u_n)$. En fait, le vecteur ligne correspondant à u est le transposé u^T du vecteur colonne u.

Les opérations de somme et de produit par un scalaire définies ci-dessus pour les vecteurs coïncident parfaitement avec les opérations définies sur les matrices :

$$u + v = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \lambda u = \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \vdots \\ \lambda u_n \end{pmatrix}.$$

3.1.3. Produit scalaire

Soient $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On définit leur **produit scalaire** par

$$\langle u \mid v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n.$$

C'est un scalaire (un nombre réel). Remarquons que cette définition généralise la notion de produit scalaire dans le plan $\mathbb{R}^2$ et dans l'espace $\mathbb{R}^3$.

Une autre écriture :

$$\langle u \mid v \rangle = u^T \times v = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Soient $A = (a_{ij})$ une matrice de taille $n \times p$, et $B = (b_{ij})$ une matrice de taille $p \times q$. Nous savons que l'on peut former le produit matriciel AB. On obtient une matrice de taille $n \times q$. L'élément d'indice ij de la matrice AB est

$$a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{ip} b_{pj}\,.$$

Remarquons que ceci est aussi le produit matriciel :

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, c'est le produit scalaire du i-ème vecteur ligne de A avec le j-ème vecteur colonne de B. Notons $\ell_1, \ldots, \ell_n$ les vecteurs lignes formant la matrice A, et $c_1, \ldots, c_q$ les vecteurs colonnes formant la matrice B. On a alors

$$AB = \begin{pmatrix} \langle \ell_1 \mid c_1 \rangle & \langle \ell_1 \mid c_2 \rangle & \cdots & \langle \ell_1 \mid c_q \rangle \\ \langle \ell_2 \mid c_1 \rangle & \langle \ell_2 \mid c_2 \rangle & \cdots & \langle \ell_2 \mid c_q \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \ell_n \mid c_1 \rangle & \langle \ell_n \mid c_2 \rangle & \cdots & \langle \ell_n \mid c_q \rangle \end{pmatrix}.$$

Mini-exercices.

1. Faire un dessin pour chacune des 8 propriétés qui font de $\mathbb{R}^2$ un espace vectoriel.
2. Faire la même chose pour $\mathbb{R}^3$.
3. Montrer que le produit scalaire vérifie $\langle u \mid v\rangle = \langle v \mid u\rangle$, $\langle u+v \mid w\rangle = \langle u \mid w\rangle + \langle v \mid w\rangle$, $\langle \lambda u \mid v\rangle = \lambda\langle u \mid v\rangle$ pour tout $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
4. Soit $u \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $\langle u \mid u\rangle \geqslant 0$. Montrer $\langle u \mid u\rangle = 0$ si et seulement si u est le vecteur nul.

3.2. Exemples d'applications linéaires

Soient

$$f_1 : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f_2 : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \dots \qquad f_n : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$$

n fonctions de p variables réelles à valeurs réelles ; chaque f_i est une fonction :

$$f_i : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (x_1, x_2, \dots, x_p) \mapsto f_i(x_1, \dots, x_p)$$

On construit une application

$$f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

définie par

$$f(x_1, \dots, x_p) = \big(f_1(x_1, \dots, x_p), \dots, f_n(x_1, \dots, x_p)\big).$$

3.2.1. Applications linéaires

Définition 2.
Une application $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $f(x_1, \dots, x_p) = (y_1, \dots, y_n)$ est dite une **application linéaire** si

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p . \end{cases}$$

En notation matricielle, on a

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix},$$

ou encore, si on note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ la matrice (a_{ij}),

$$\boxed{f(X) = AX.}$$

Autrement dit, une application linéaire $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ peut s'écrire $X \mapsto AX$. La matrice $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ est appelée la **matrice de l'application linéaire** f.

Remarque.

- On a toujours $f(0, \ldots, 0) = (0, \ldots, 0)$. Si on note 0 pour le vecteur nul dans $\mathbb{R}^p$ et aussi dans $\mathbb{R}^n$, alors une application linéaire vérifie toujours $f(0) = 0$.
- Le nom complet de la matrice A est : la matrice de l'application linéaire f de la base canonique de $\mathbb{R}^p$ vers la base canonique de $\mathbb{R}^n$!

Exemple 1.

La fonction $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$\begin{cases} y_1 = -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 7x_4 \\ y_2 = 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 \\ y_3 = 7x_1 - 3x_2 + 9x_3 \end{cases}$$

s'exprime sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 2 & -7 \\ 4 & 2 & -3 & 3 \\ 7 & -3 & 9 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Exemple 2.

- Pour l'application linéaire identité $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_n)$, sa matrice associée est l'identité I_n (car $I_n X = X$).

- Pour l'application linéaire nulle $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$, $(x_1,\dots,x_p) \mapsto (0,\dots,0)$, sa matrice associée est la matrice nulle $0_{n,p}$ (car $0_{n,p}X = 0$).

3.2.2. Exemples d'applications linéaires

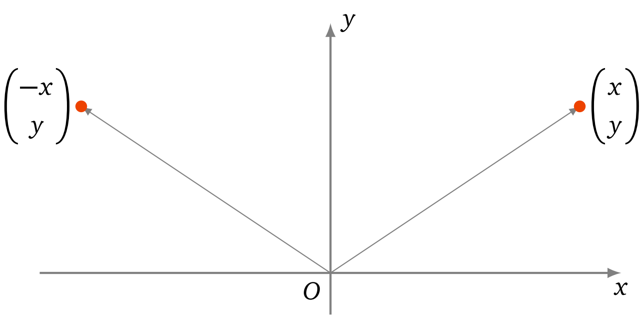
Réflexion par rapport à l'axe (Oy)

La fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

est la réflexion par rapport à l'axe des ordonnées (Oy), et sa matrice est

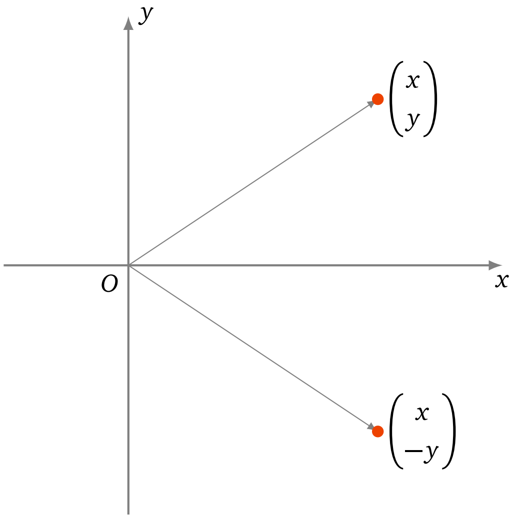
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{car} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}.$$



Réflexion par rapport à l'axe (Ox)

La réflexion par rapport à l'axe des abscisses (Ox) est donnée par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$



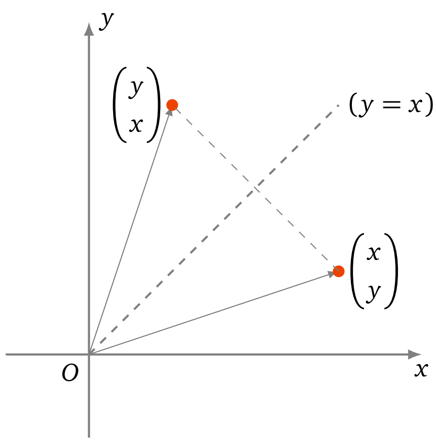
Réflexion par rapport à la droite $(y = x)$

La réflexion par rapport à la droite $(y = x)$ est donnée par

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

et sa matrice est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$



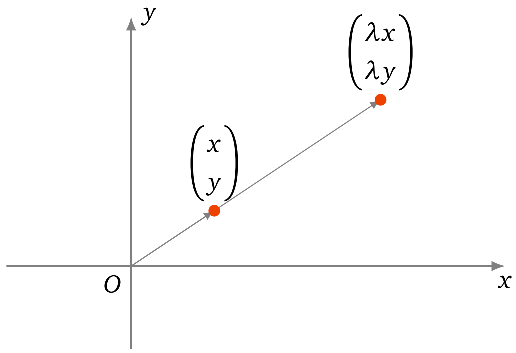
Homothéties

L'homothétie de rapport λ centrée à l'origine est :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}.$$

On peut donc écrire $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Alors la matrice de l'homothétie est :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$



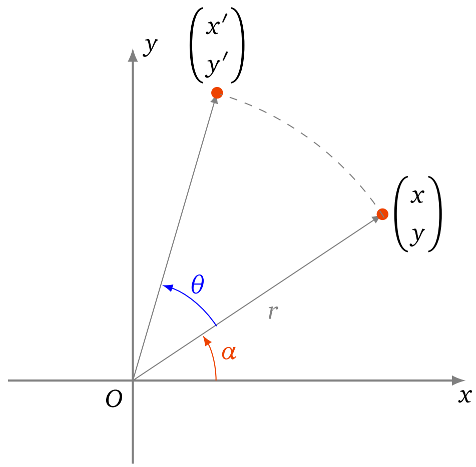
Remarque.
La translation de vecteur $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ est l'application

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + u_0 \\ y + v_0 \end{pmatrix}.$$

Si c'est une translation de vecteur non nul, c'est-à-dire $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, alors ***ce n'est pas*** une application linéaire, car $f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Rotations

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la rotation d'angle θ, centrée à l'origine.



Si le vecteur $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ fait un angle α avec l'horizontale et que le point $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ est à une distance r de l'origine, alors

$$\begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\sin\alpha \end{cases}.$$

Si $\left(\begin{smallmatrix} x' \\ y' \end{smallmatrix}\right)$ dénote l'image de $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ par la rotation d'angle θ, on obtient :

$$\begin{cases} x' = r\cos(\alpha+\theta) \\ y' = r\sin(\alpha+\theta) \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} x' = r\cos\alpha\cos\theta - r\sin\alpha\sin\theta \\ y' = r\cos\alpha\sin\theta + r\sin\alpha\cos\theta \end{cases}$$

(où l'on a appliqué les formules de trigonométrie pour $\cos(\alpha+\theta)$ et $\sin(\alpha+\theta)$).

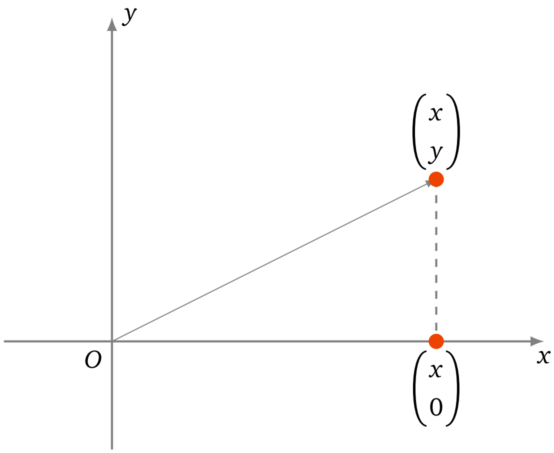
On aboutit à

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, la rotation d'angle θ est donnée par la matrice

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Projections orthogonales



L'application

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

est la projection orthogonale sur l'axe (Ox). C'est une application linéaire donnée par la matrice

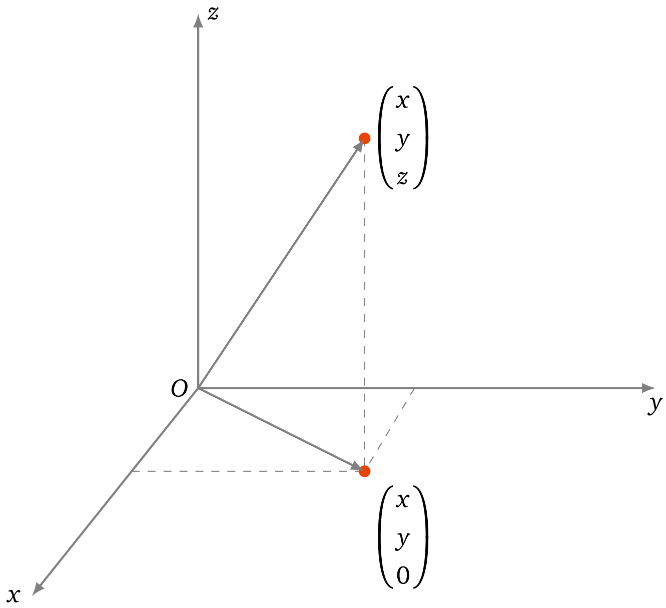
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'application linéaire

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

est la projection orthogonale sur le plan (Oxy) et sa matrice est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



De même, la projection orthogonale sur le plan (Oxz) est donnée par la matrice de gauche ; la projection orthogonale sur le plan (Oyz) par la matrice de droite :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Réflexions dans l'espace

L'application

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix}$$

est la réflexion par rapport au plan (Oxy). C'est une application linéaire et sa matrice est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

De même, les réflexions par rapport aux plans (Oxz) (à gauche) et (Oyz) (à droite) sont données par les matrices :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mini-exercices.

1. Soit $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ et soit f l'application linéaire associée. Calculer et dessiner l'image par f de $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, puis $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ et plus généralement de $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$. Dessiner l'image par f du carré de sommets $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Dessiner l'image par f du cercle inscrit dans ce carré.
2. Soit $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et soit f l'application linéaire associée. Calculer l'image par f de $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ et plus généralement de $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$.
3. Écrire la matrice de la rotation du plan d'angle $\frac{\pi}{4}$ centrée à l'origine. Idem dans l'espace avec la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ d'axe (Ox).
4. Écrire la matrice de la réflexion du plan par rapport à la droite $(y = -x)$. Idem dans l'espace avec la réflexion par rapport au plan d'équation $(y = -x)$.
5. Écrire la matrice de la projection orthogonale de l'espace sur l'axe (Oy).

3.3. Propriétés des applications linéaires

3.3.1. Composition d'applications linéaires et produit de matrices

Soient

$$f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n \qquad \text{et} \qquad g : \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

deux applications linéaires. Considérons leur composition :

$$\mathbb{R}^q \xrightarrow{g} \mathbb{R}^p \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n \qquad\qquad f \circ g : \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

L'application $f \circ g$ est une application linéaire. Notons :

- $A = \mathrm{Mat}(f) \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ la matrice associée à f,

- $B = \text{Mat}(g) \in M_{p,q}(\mathbb{R})$ la matrice associée à g,
- $C = \text{Mat}(f \circ g) \in M_{n,q}(\mathbb{R})$ la matrice associée à $f \circ g$.

On a pour un vecteur $X \in \mathbb{R}^q$:

$$(f \circ g)(X) = f\big(g(X)\big) = f\big(BX\big) = A(BX) = (AB)X.$$

Donc la matrice associée à $f \circ g$ est $C = AB$.
Autrement dit, la matrice associée à la composition de deux applications linéaires est égale au produit de leurs matrices :

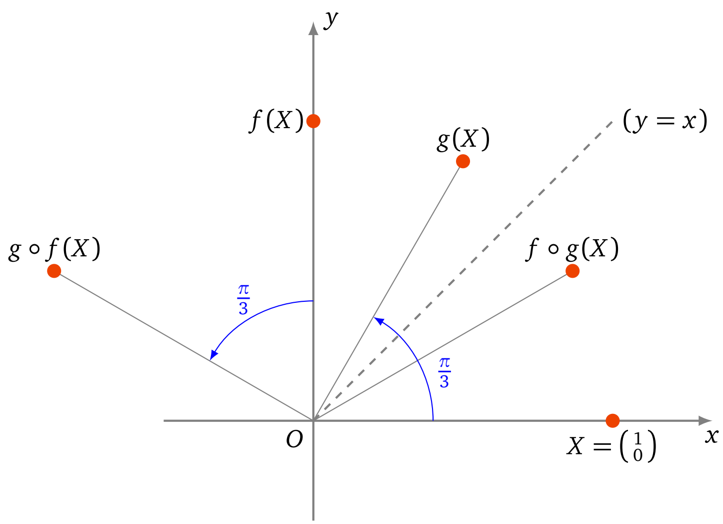
$$\boxed{\text{Mat}(f \circ g) = \text{Mat}(f) \times \text{Mat}(g)}$$

En fait le produit de matrices, qui au premier abord peut sembler bizarre et artificiel, est défini exactement pour vérifier cette relation.

Exemple 3.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la réflexion par rapport à la droite $(y = x)$ et soit $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la rotation d'angle $\theta = \frac{\pi}{3}$ (centrée à l'origine). Les matrices sont

$$A = \text{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \text{Mat}(g) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Voici pour $X = \binom{1}{0}$ les images $f(X)$, $g(X)$, $f \circ g(X)$, $g \circ f(X)$:



Alors

$$C = \mathrm{Mat}(f \circ g) = \mathrm{Mat}(f) \times \mathrm{Mat}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Notons que si l'on considère la composition $g \circ f$ alors

$$D = \mathrm{Mat}(g \circ f) = \mathrm{Mat}(g) \times \mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Les matrices $C = AB$ et $D = BA$ sont distinctes, ce qui montre que la composition d'applications linéaires, comme la multiplication des matrices, n'est pas commutative en général.

3.3.2. Application linéaire bijective et matrice inversible

Théorème 2.
Une application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est bijective si et seulement si sa matrice associée $A = \mathrm{Mat}(f) \in M_n(\mathbb{R})$ est inversible.

L'application f est définie par $f(X) = AX$. Donc si f est bijective, alors d'une part $f(X) = Y \iff X = f^{-1}(Y)$, mais d'autre part $AX = Y \iff X = A^{-1}Y$. Conséquence : la matrice de f^{-1} est A^{-1}.

Corollaire 1.
Si f est bijective, alors

$$\boxed{\mathrm{Mat}(f^{-1}) = \big(\mathrm{Mat}(f)\big)^{-1}.}$$

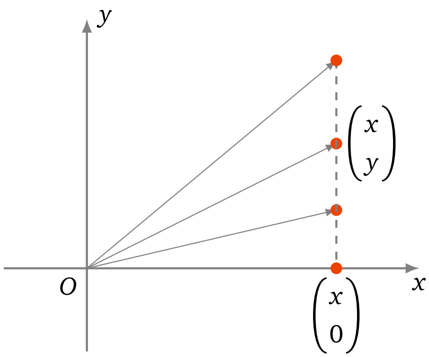
Exemple 4.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la rotation d'angle θ. Alors $f^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est la rotation d'angle $-\theta$.
On a

$$\mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{Mat}(f^{-1}) = \big(\mathrm{Mat}(f)\big)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}.$$

Exemple 5.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la projection sur l'axe (Ox). Alors f n'est pas injective. En effet, pour x fixé et tout $y \in \mathbb{R}$, $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} x \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. L'application f n'est pas non plus surjective : ceci se vérifie aisément car aucun point en-dehors de l'axe (Ox) n'est dans l'image de f.



La matrice de f est $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$; elle n'est pas inversible.

La preuve du théorème 2 est une conséquence directe du théorème suivant, vu dans le chapitre sur les matrices :

Théorème 3.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) *La matrice A est inversible.*

(ii) *Le système linéaire $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ a une unique solution $X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.*

(iii) *Pour tout second membre Y, le système linéaire $AX = Y$ a une unique solution X.*

Voici donc la preuve du théorème 2.

Démonstration.

- Si A est inversible, alors pour tout vecteur Y le système $AX = Y$ a une unique solution X, autrement dit pour tout Y, il existe un unique X tel que $f(X) = AX = Y$. f est donc bijective.
- Si A n'est pas inversible, alors il existe un vecteur X non nul tel que $AX = 0$. En conséquence on a $X \neq 0$ mais $f(X) = f(0) = 0$. f n'est pas injective donc pas bijective.

$\square$

3.3.3. Caractérisation des applications linéaires

Théorème 4.
Une application $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est linéaire si et seulement si pour tous les vecteurs u, v de $\mathbb{R}^p$ et pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

(i) $f(u+v) = f(u) + f(v)$,

(ii) $f(\lambda u) = \lambda f(u)$.

Dans le cadre général des espaces vectoriels, ce sont ces deux propriétés (i) et (ii) qui définissent une application linéaire.

Définition 3.
Les vecteurs

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \cdots \qquad e_p = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sont appelés les **vecteurs de la base canonique** de $\mathbb{R}^p$.

La démonstration du théorème impliquera :

Corollaire 2.
Soit $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application linéaire, et soient $e_1, \ldots, e_p$ les vecteurs de base canonique de $\mathbb{R}^p$. Alors la matrice de f (dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^n$) est donnée par

$$\mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_p) \end{pmatrix} ;$$

autrement dit les vecteurs colonnes de $\mathrm{Mat}(f)$ *sont les images par f des vecteurs de la base canonique $(e_1, \ldots, e_p)$.*

Exemple 6.

Considérons l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ définie par

$$\begin{cases} y_1 &= 2x_1 &+x_2 &-x_3 \\ y_2 &= -x_1 &-4x_2 & \\ y_3 &= 5x_1 &+x_2 &+x_3 \\ y_4 &= &3x_2 &+2x_3\,. \end{cases}$$

Calculons les images des vecteurs de la base canonique $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$:

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\5\\0\end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-4\\1\\3\end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\2\end{pmatrix}.$$

Donc la matrice de f est :

$$\mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -4 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exemple 7.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la réflexion par rapport à la droite $(y = x)$ et soit g la rotation du plan d'angle $\frac{\pi}{6}$ centrée à l'origine. Calculons la matrice de l'application $f \circ g$. La base canonique de $\mathbb{R}^2$ est formée des vecteurs $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$.

$$f \circ g\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix} \qquad f \circ g\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Donc la matrice de $f \circ g$ est :

$$\mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Voici la preuve du théorème 4.

Démonstration. Supposons $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ linéaire, et soit A sa matrice. On a $f(u+v) = A(u+v) = Au + Av = f(u) + f(v)$ et $f(\lambda u) = A(\lambda u) = \lambda Au = \lambda f(u)$. Réciproquement, soit $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application qui vérifie (i) et (ii). Nous devons construire une matrice A telle que $f(u) = Au$. Notons d'abord que (i)

implique que $f(v_1+v_2+\cdots+v_r)=f(v_1)+f(v_2)+\cdots+f(v_r)$. Notons $(e_1,\ldots,e_p)$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^p$.
Soit A la matrice $n\times p$ dont les colonnes sont

$$f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_p).$$

$$\text{Pour} \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p, \qquad \text{alors} \qquad X = x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_pe_p$$

et donc

$$\begin{aligned} AX &= A(x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_pe_p) \\ &= Ax_1e_1+Ax_2e_2+\cdots+Ax_pe_p \\ &= x_1Ae_1+x_2Ae_2+\cdots+x_pAe_p \\ &= x_1f(e_1)+x_2f(e_2)+\cdots+x_pf(e_p) \\ &= f(x_1e_1)+f(x_2e_2)+\cdots+f(x_pe_p) \\ &= f(x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_pe_p)=f(X). \end{aligned}$$

On a alors $f(X)=AX$, et f est bien une application linéaire (de matrice A). □

Mini-exercices.

1. Soit f la réflexion du plan par rapport à l'axe (Ox) et soit g la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ centrée à l'origine. Calculer la matrice de $f\circ g$ de deux façons différentes (produit de matrices et image de la base canonique). Cette matrice est-elle inversible ? Si oui, calculer l'inverse. Interprétation géométrique. Même question avec $g\circ f$.

2. Soit f la projection orthogonale de l'espace sur le plan (Oxz) et soit g la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ d'axe (Oy). Calculer la matrice de $f\circ g$ de deux façons différentes (produit de matrices et image de la base canonique). Cette matrice est-elle inversible ? Si oui, calculer l'inverse. Interprétation géométrique. Même question avec $g\circ f$.

Chapitre 4

Espaces vectoriels

La notion d'espace vectoriel est une structure fondamentale des mathématiques modernes. Il s'agit de dégager les propriétés communes que partagent des ensembles pourtant très différents. Par exemple, on peut additionner deux vecteurs du plan, et aussi multiplier un vecteur par un réel (pour l'agrandir ou le rétrécir). Mais on peut aussi additionner deux fonctions, ou multiplier une fonction par un réel. Même chose avec les polynômes, les matrices,... Le but est d'obtenir des théorèmes généraux qui s'appliqueront aussi bien aux vecteurs du plan, de l'espace, aux espaces de fonctions, aux polynômes, aux matrices,... La contrepartie de cette grande généralité de situations est que la notion d'espace vectoriel est difficile à appréhender et vous demandera une quantité conséquente de travail ! Il est bon d'avoir d'abord étudié le chapitre « L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ ».

4.1. Espace vectoriel (début)

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un corps. Dans la plupart des exemples, ce sera le corps des réels $\mathbb{R}$.

4.1.1. Définition d'un espace vectoriel

Un espace vectoriel est un ensemble formé de vecteurs, de sorte que l'on puisse additionner (et soustraire) deux vecteurs u, v pour en former un troisième $u + v$ (ou $u - v$) et aussi afin que l'on puisse multiplier chaque vecteur u d'un facteur λ pour obtenir un vecteur $\lambda \cdot u$. Voici la définition formelle :

Définition 1.
Un **$\mathbb{K}$-espace vectoriel** est un ensemble non vide E muni :

- d'une loi de composition interne, c'est-à-dire d'une application de $E \times E$ dans E :
$$\begin{array}{ccc} E \times E & \to & E \\ (u, v) & \mapsto & u + v \end{array}$$
- d'une loi de composition externe, c'est-à-dire d'une application de $\mathbb{K} \times E$ dans E :
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \to & E \\ (\lambda, u) & \mapsto & \lambda \cdot u \end{array}$$

qui vérifient les propriétés suivantes :

1. $u + v = v + u$ (pour tous $u, v \in E$)
2. $u + (v + w) = (u + v) + w$ (pour tous $u, v, w \in E$)
3. Il existe un **élément neutre** $0_E \in E$ tel que $u + 0_E = u$ (pour tout $u \in E$)
4. Tout $u \in E$ admet un **symétrique** u' tel que $u + u' = 0_E$. Cet élément u' est noté $-u$.
5. $1 \cdot u = u$ (pour tout $u \in E$)
6. $\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda\mu) \cdot u$ (pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $u \in E$)
7. $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$ (pour tous $\lambda \in \mathbb{K}$, $u, v \in E$)
8. $(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$ (pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $u \in E$)

Nous reviendrons en détail sur chacune de ces propriétés juste après des exemples.

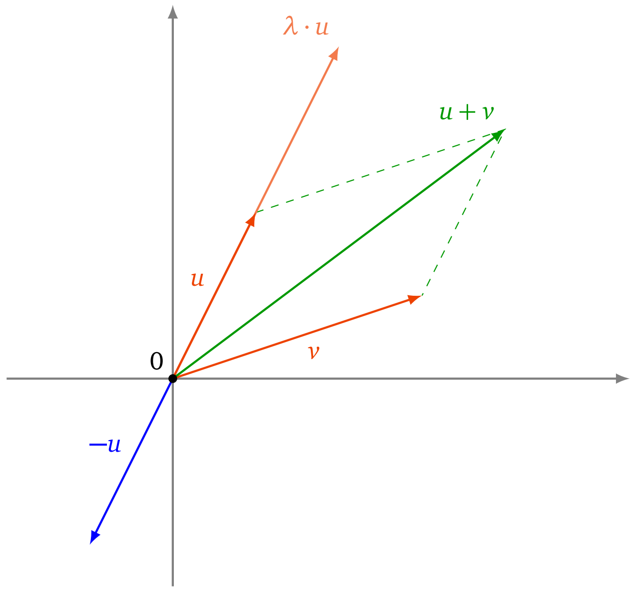
4.1.2. Premiers exemples

Exemple 1 (Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$).
Posons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^2$. Un élément $u \in E$ est donc un couple (x, y) avec x élément de $\mathbb{R}$ et y élément de $\mathbb{R}$. Ceci s'écrit

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}.$$

- *Définition de la loi interne.* Si (x, y) et (x', y') sont deux éléments de $\mathbb{R}^2$, alors :
$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y').$$
- *Définition de la loi externe.* Si λ est un réel et (x, y) est un élément de $\mathbb{R}^2$, alors :
$$\lambda \cdot (x, y) = (\lambda x, \lambda y).$$

L'élément neutre de la loi interne est le vecteur nul $(0, 0)$. Le symétrique de (x, y) est $(-x, -y)$, que l'on note aussi $-(x, y)$.



L'exemple suivant généralise le précédent. C'est aussi le bon moment pour lire ou relire le chapitre « L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ ».

Exemple 2 (Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^n$)**.**

Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Posons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^n$. Un élément $u \in E$ est donc un n-uplet $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ avec $x_1, x_2, \dots, x_n$ des éléments de $\mathbb{R}$.

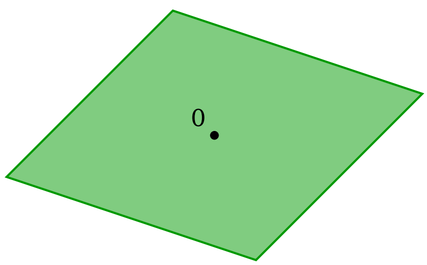
- *Définition de la loi interne.* Si $(x_1, \dots, x_n)$ et $(x'_1, \dots, x'_n)$ sont deux éléments de $\mathbb{R}^n$, alors :
$$(x_1, \dots, x_n) + (x'_1, \dots, x'_n) = (x_1 + x'_1, \dots, x_n + x'_n).$$
- *Définition de la loi externe.* Si λ est un réel et $(x_1, \dots, x_n)$ est un élément de $\mathbb{R}^n$, alors :
$$\lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n).$$

L'élément neutre de la loi interne est le vecteur nul $(0, 0, \dots, 0)$. Le symétrique de $(x_1, \dots, x_n)$ est $(-x_1, \dots, -x_n)$, que l'on note $-(x_1, \dots, x_n)$.

De manière analogue, on peut définir le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^n$, et plus généralement le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^n$.

Exemple 3.

Tout plan passant par l'origine dans $\mathbb{R}^3$ est un espace vectoriel (par rapport aux opérations habituelles sur les vecteurs). Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $E = \mathscr{P}$ un plan passant par l'origine. Le plan admet une équation de la forme :
$$ax + by + cz = 0$$
où a, b et c sont des réels non tous nuls.



Un élément $u \in E$ est donc un triplet (noté ici comme un vecteur colonne) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $ax + by + cz = 0$.

Soient $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathscr{P}$. Autrement dit,
$$\begin{array}{rrcl} & ax + by + cz & = & 0, \\ \text{et} & ax' + by' + cz' & = & 0. \end{array}$$

Alors $\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix}$ est aussi dans $\mathscr{P}$ car on a bien :

$$a(x+x')+b(y+y')+c(z+z')=0.$$

Les autres propriétés sont aussi faciles à vérifier : par exemple l'élément neutre est $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; et si $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartient à $\mathscr{P}$, alors $ax+by+cz=0$, que l'on peut réécrire $a(-x)+b(-y)+c(-z)=0$ et ainsi $-\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartient à $\mathscr{P}$.

Attention ! Un plan ne contenant pas l'origine n'est pas un espace vectoriel, car justement il ne contient pas le vecteur nul $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4.1.3. Terminologie et notations

Rassemblons les définitions déjà vues.

- On appelle les éléments de E des **vecteurs**. Au lieu de $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on dit aussi espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
- Les éléments de $\mathbb{K}$ seront appelés des **scalaires**.
- L'**élément neutre** 0_E s'appelle aussi le **vecteur nul**. Il ne doit pas être confondu avec l'élément 0 de $\mathbb{K}$. Lorsqu'il n'y aura pas de risque de confusion, 0_E sera aussi noté 0.
- Le **symétrique** $-u$ d'un vecteur $u \in E$ s'appelle aussi l'**opposé**.
- La loi de composition interne sur E (notée usuellement $+$) est appelée couramment l'addition et $u+u'$ est appelée somme des vecteurs u et u'.
- La loi de composition externe sur E est appelée couramment multiplication par un scalaire. La multiplication du vecteur u par le scalaire λ sera souvent notée simplement λu, au lieu de $\lambda \cdot u$.

Somme de n vecteurs. Il est possible de définir, par récurrence, l'addition de n vecteurs, $n \geqslant 2$. La structure d'espace vectoriel permet de définir l'addition de deux vecteurs (et initialise le processus). Si maintenant la somme de $n-1$ vecteurs est définie, alors la somme de n vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_n$ est définie par

$$v_1+v_2+\cdots+v_n=(v_1+v_2+\cdots+v_{n-1})+v_n.$$

L'associativité de la loi $+$ nous permet de ne pas mettre de parenthèses dans la somme $v_1+v_2+\cdots+v_n$.

On notera $v_1 + v_2 + \cdots + v_n = \sum_{i=1}^{n} v_i$.

Mini-exercices.

1. Vérifier les 8 axiomes qui font de $\mathbb{R}^3$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Idem pour une droite $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}^3$ passant par l'origine définie par $\begin{cases} ax+by+cz = 0 \\ a'x+b'y+c'z = 0 \end{cases}$.
3. Justifier que les ensembles suivants *ne sont pas* des espaces vectoriels : $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy=0\}$; $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=1\}$; $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geqslant 0 \text{ et } y\geqslant 0\}$; $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -1\leqslant x\leqslant 1 \text{ et } -1\leqslant y\leqslant 1\}$.
4. Montrer par récurrence que si les v_i sont des éléments d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, alors pour tous $\lambda_i \in \mathbb{K}$: $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n \in E$.

4.2. Espace vectoriel (fin)

4.2.1. Détail des axiomes de la définition

Revenons en détail sur la définition d'un espace vectoriel. Soit donc E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Les éléments de E seront appelés des **vecteurs**. Les éléments de $\mathbb{K}$ seront appelés des **scalaires**.

Loi interne.

La loi de composition interne dans E, c'est une application de $E \times E$ dans E :

$$\begin{array}{ccc} E\times E & \to & E \\ (u,v) & \mapsto & u+v \end{array}$$

C'est-à-dire qu'à partir de deux vecteurs u et v de E, on nous en fournit un troisième, qui sera noté $u+v$.

La loi de composition interne dans E et la somme dans $\mathbb{K}$ seront toutes les deux notées $+$, mais le contexte permettra de déterminer aisément de quelle loi il s'agit.

Loi externe.

La loi de composition externe, c'est une application de $\mathbb{K} \times E$ dans E :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \to & E \\ (\lambda, u) & \mapsto & \lambda \cdot u \end{array}$$

C'est-à-dire qu'à partir d'un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ et d'un vecteur $u \in E$, on nous fournit un autre vecteur, qui sera noté $\lambda \cdot u$.

Axiomes relatifs à la loi interne.

1. ***Commutativité.*** Pour tous $u, v \in E$, $u+v = v+u$. On peut donc additionner des vecteurs dans l'ordre que l'on souhaite.
2. ***Associativité.*** Pour tous $u, v, w \in E$, on a $u+(v+w) = (u+v)+w$. Conséquence : on peut « oublier » les parenthèses et noter sans ambiguïté $u+v+w$.
3. Il existe un ***élément neutre***, c'est-à-dire qu'il existe un élément de E, noté 0_E, vérifiant : pour tout $u \in E$, $u + 0_E = u$ (et on a aussi $0_E + u = u$ par commutativité). Cet élément 0_E s'appelle aussi le **vecteur nul**.
4. Tout élément u de E admet un ***symétrique*** (ou **opposé**), c'est-à-dire qu'il existe un élément u' de E tel que $u + u' = 0_E$ (et on a aussi $u' + u = 0_E$ par commutativité). Cet élément u' de E est noté $-u$.

Proposition 1.

- *S'il existe un élément neutre 0_E vérifiant l'axiome (3) ci-dessus, alors il est unique.*
- *Soit u un élément de E. S'il existe un élément symétrique u' de E vérifiant l'axiome (4), alors il est unique.*

Démonstration.

- Soient 0_E et $0'_E$ deux éléments vérifiant la définition de l'élément neutre. On a alors, pour tout élément u de E :

$$u + 0_E = 0_E + u = u \qquad \text{et} \qquad u + 0'_E = 0'_E + u = u$$

  — Alors, la première propriété utilisée avec $u = 0'_E$ donne $0'_E + 0_E = 0_E + 0'_E = 0'_E$.

  — La deuxième propriété utilisée avec $u = 0_E$ donne $0_E + 0'_E = 0'_E + 0_E = 0_E$.

  — En comparant ces deux résultats, il vient $0_E = 0'_E$.

- Supposons qu'il existe deux symétriques de u notés u' et u''. On a :

$$u + u' = u' + u = 0_E \qquad \text{et} \qquad u + u'' = u'' + u = 0_E.$$

  Calculons $u' + (u + u'')$ de deux façons différentes, en utilisant l'associativité de la loi + et les relations précédentes.

  — $u' + (u + u'') = u' + 0_E = u'$

  — $u' + (u + u'') = (u' + u) + u'' = 0_E + u'' = u''$

  — On en déduit $u' = u''$.

□

Remarque.
Les étudiants connaissant la théorie des groupes reconnaîtront, dans les quatre premiers axiomes ci-dessus, les axiomes caractérisant un groupe commutatif.

Axiomes relatifs à la loi externe.

5. Soit 1 l'élément neutre de la multiplication de $\mathbb{K}$. Pour tout élément u de E, on a

$$1 \cdot u = u.$$

6. Pour tous éléments λ et μ de $\mathbb{K}$ et pour tout élément u de E, on a

$$\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda \times \mu) \cdot u.$$

Axiomes liant les deux lois.

7. ***Distributivité*** par rapport à l'addition des vecteurs. Pour tout élément λ de $\mathbb{K}$ et pour tous éléments u et v de E, on a

$$\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v.$$

8. ***Distributivité*** par rapport à l'addition des scalaires. Pour tous λ et μ de $\mathbb{K}$ et pour tout élément u de E, on a :

$$(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u.$$

La loi interne et la loi externe doivent donc satisfaire ces huit axiomes pour que $(E, +, \cdot)$ soit un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

4.2.2. Exemples

Dans tous les exemples qui suivent, la vérification des axiomes se fait simplement et est laissée au soin des étudiants. Seules seront indiquées, dans chaque cas, les valeurs de l'élément neutre de la loi interne et du symétrique d'un élément.

Exemple 4 (L'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).
L'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est noté $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Nous le munissons d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel de la manière suivante.

- *Loi interne.* Soient f et g deux éléments de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. La fonction $f+g$ est définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
(où le signe $+$ désigne la loi interne de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans le membre de gauche et l'addition dans $\mathbb{R}$ dans le membre de droite).

- *Loi externe.* Si λ est un nombre réel et f une fonction de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, la fonction $\lambda \cdot f$ est définie par l'image de tout réel x comme suit :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \times f(x).$$
(Nous désignons par $\cdot$ la loi externe de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et par $\times$ la multiplication dans $\mathbb{R}$. Avec l'habitude on oubliera les signes de multiplication : $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.)

- *Élément neutre.* L'élément neutre pour l'addition est la fonction nulle, définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 0.$$
On peut noter cette fonction $0_{\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$.

- *Symétrique.* Le symétrique de l'élément f de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est l'application g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = -f(x).$$
Le symétrique de f est noté $-f$.

Exemple 5 (Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles).
On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Cet ensemble peut être vu comme l'ensemble des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$; autrement dit $\mathscr{S} = \mathscr{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$.

- *Loi interne.* Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites appartenant à $\mathscr{S}$. La suite $u+v$ est la suite $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est défini par
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = u_n + v_n$$
(où $u_n + v_n$ désigne la somme de u_n et de v_n dans $\mathbb{R}$).
- *Loi externe.* Si λ est un nombre réel et $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de $\mathscr{S}$, $\lambda \cdot u$ est la suite $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \lambda \times u_n$$
où $\times$ désigne la multiplication dans $\mathbb{R}$.
- *Élément neutre.* L'élément neutre de la loi interne est la suite dont tous les termes sont nuls.
- *Symétrique.* Le symétrique de la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite $u' = (u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u'_n = -u_n.$$
Elle est notée $-u$.

Exemple 6 (Les matrices)**.**
L'ensemble $M_{n,p}(\mathbb{R})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$ est muni d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel. La loi interne est l'addition de deux matrices. La loi externe est la multiplication d'une matrice par un scalaire. L'élément neutre pour la loi interne est la matrice nulle (tous les coefficients sont nuls). Le symétrique de la matrice $A = (a_{i,j})$ est la matrice $(-a_{i,j})$. De même, l'ensemble $M_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Autres exemples :

1. L'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes $P(X) = a_nX^n + \cdots + a_2X^2 + a_1X + a_0$. L'addition est l'addition de deux polynômes $P(X) + Q(X)$, la multiplication par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ est $\lambda \cdot P(X)$. L'élément neutre est le polynôme nul. L'opposé de $P(X)$ est $-P(X)$.
2. L'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; l'ensemble des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$,...
3. $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel : addition $z + z'$ de deux nombres complexes, multiplication λz par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$. L'élément neutre est le nombre complexe 0 et le symétrique du nombre complexe z est $-z$.

4.2.3. Règles de calcul

Proposition 2.
Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$. Soient $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors on a :

1. $0 \cdot u = 0_E$
2. $\lambda \cdot 0_E = 0_E$
3. $(-1) \cdot u = -u$
4. $\boxed{\lambda \cdot u = 0_E \iff \lambda = 0 \ \text{ ou } \ u = 0_E}$

L'opération qui à (u, v) associe $u + (-v)$ s'appelle la **soustraction**. Le vecteur $u+(-v)$ est noté $u-v$. Les propriétés suivantes sont satisfaites : $\lambda(u-v) = \lambda u - \lambda v$ et $(\lambda - \mu)u = \lambda u - \mu u$.

Démonstration. Les démonstrations des propriétés sont des manipulations sur les axiomes définissant les espaces vectoriels.

1.
   - Le point de départ de la démonstration est l'égalité dans $\mathbb{K}$: $0+0=0$.
   - D'où, pour tout vecteur de E, l'égalité $(0+0) \cdot u = 0 \cdot u$.
   - Donc, en utilisant la distributivité de la loi externe par rapport à la loi interne et la définition de l'élément neutre, on obtient $0 \cdot u + 0 \cdot u = 0 \cdot u$. On peut rajouter l'élément neutre dans le terme de droite, pour obtenir : $0 \cdot u + 0 \cdot u = 0 \cdot u + 0_E$.
   - En ajoutant $-(0 \cdot u)$ de chaque côté de l'égalité, on obtient : $0 \cdot u = 0_E$.
2. La preuve est semblable en partant de l'égalité $0_E + 0_E = 0_E$.
3. Montrer $(-1) \cdot u = -u$ signifie exactement que $(-1) \cdot u$ est le symétrique de u, c'est-à-dire vérifie $u + (-1) \cdot u = 0_E$. En effet :
$$u + (-1) \cdot u = 1 \cdot u + (-1) \cdot u = (1 + (-1)) \cdot u = 0 \cdot u = 0_E.$$
4. On sait déjà que si $\lambda = 0$ ou $u = 0_E$, alors les propriétés précédentes impliquent $\lambda \cdot u = 0_E$.

   Pour la réciproque, soient $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire et $u \in E$ un vecteur tels que $\lambda \cdot u = 0_E$.

   Supposons λ différent de 0. On doit alors montrer que $u = 0_E$.

- Comme $\lambda \neq 0$, alors λ est inversible pour le produit dans le corps $\mathbb{K}$. Soit λ^{-1} son inverse.
- En multipliant par λ^{-1} les deux membres de l'égalité $\lambda \cdot u = 0_E$, il vient : $\lambda^{-1} \cdot (\lambda \cdot u) = \lambda^{-1} \cdot 0_E$.
- D'où en utilisant les propriétés de la multiplication par un scalaire $(\lambda^{-1} \times \lambda) \cdot u = 0_E$ et donc $1 \cdot u = 0_E$.
- D'où $u = 0_E$.

□

Mini-exercices.

1. Justifier si les objets suivants sont des espaces vectoriels.
   (a) L'ensemble des fonctions réelles sur $[0,1]$, continues, positives ou nulles, pour l'addition et le produit par un réel.
   (b) L'ensemble des fonctions réelles sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ pour les mêmes opérations.
   (c) L'ensemble des fonctions sur $\mathbb{R}$ telles que $f(3) = 7$.
   (d) L'ensemble $\mathbb{R}_+^*$ pour les opérations $x \oplus y = xy$ et $\lambda \cdot x = x^\lambda$ ($\lambda \in \mathbb{R}$).
   (e) L'ensemble des points (x, y) de $\mathbb{R}^2$ vérifiant $\sin(x + y) = 0$.
   (f) L'ensemble des vecteurs (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ orthogonaux au vecteur $(-1, 3, -2)$.
   (g) L'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ vérifiant $f'' + f = 0$.
   (h) L'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ vérifiant $\int_0^1 f(x) \sin x \, dx = 0$.
   (i) L'ensemble des matrices $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in M_2(\mathbb{R})$ vérifiant $a + d = 0$.
2. Prouver les propriétés de la soustraction : $\lambda \cdot (u - v) = \lambda \cdot u - \lambda \cdot v$ et $(\lambda - \mu) \cdot u = \lambda \cdot u - \mu \cdot u$.

4.3. Sous-espace vectoriel (début)

Il est vite fatiguant de vérifier les 8 axiomes qui font d'un ensemble un espace vectoriel. Heureusement, il existe une manière rapide et efficace de prouver qu'un ensemble est un espace vectoriel : grâce à la notion de sous-espace vectoriel.

4.3.1. Définition d'un sous-espace vectoriel

Définition 2.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une partie F de E est appelée un **sous-espace vectoriel** si :

- $0_E \in F$,
- $u+v \in F \quad$ pour tous $u, v \in F$,
- $\lambda \cdot u \in F$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $u \in F$.

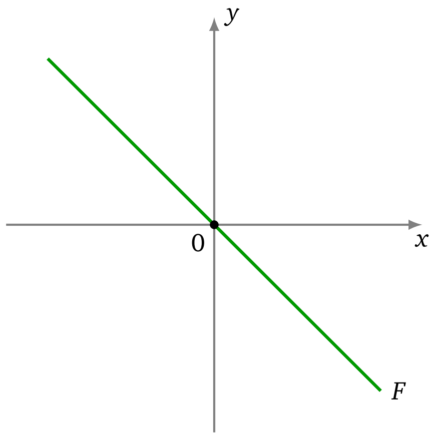
Remarque.
Expliquons chaque condition.

- La première condition signifie que le vecteur nul de E doit aussi être dans F. En fait il suffit même de prouver que F est non vide.
- La deuxième condition, c'est dire que F est stable pour l'addition : la somme $u+v$ de deux vecteurs u, v de F est bien sûr un vecteur de E (car E est un espace vectoriel), mais ici on exige que $u+v$ soit un élément de F.
- La troisième condition, c'est dire que F est stable pour la multiplication par un scalaire.

Exemple 7 (Exemples immédiats)**.**

1. L'ensemble $F=\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y=0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. En effet :
   (a) $(0,0) \in F$,
   (b) si $u=(x_1, y_1)$ et $v=(x_2, y_2)$ appartiennent à F, alors $x_1+y_1=0$ et $x_2+y_2=0$ donc $(x_1+x_2)+(y_1+y_2)=0$ et ainsi $u+v=(x_1+x_2, y_1+y_2)$ appartient à F,

(c) si $u = (x, y) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $x + y = 0$ donc $\lambda x + \lambda y = 0$, d'où $\lambda u \in F$.



2. L'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Preuve : la fonction nulle est continue ; la somme de deux fonctions continues est continue ; une constante fois une fonction continue est une fonction continue.

3. L'ensemble des suites réelles convergentes est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles.

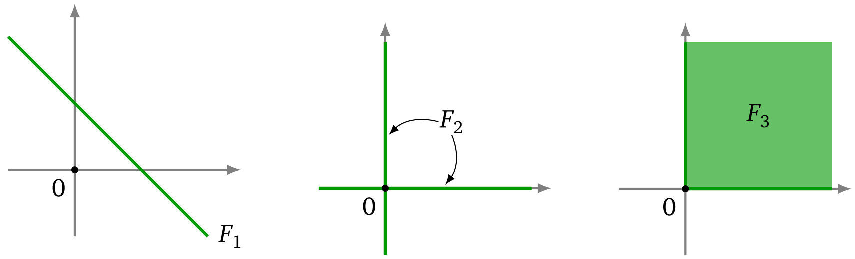
Voici des sous-ensembles qui *ne sont pas* des sous-espaces vectoriels.

Exemple 8.

1. L'ensemble $F_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 2\right\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. En effet le vecteur nul $(0, 0)$ n'appartient pas à F_1.

2. L'ensemble $F_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \text{ ou } y = 0\right\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. En effet les vecteurs $u = (1, 0)$ et $v = (0, 1)$ appartiennent à F_2, mais pas le vecteur $u + v = (1, 1)$.

3. L'ensemble $F_3 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0 \text{ et } y \geqslant 0\right\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. En effet le vecteur $u = (1, 1)$ appartient à F_3 mais, pour $\lambda = -1$, le vecteur $-u = (-1, -1)$ n'appartient pas à F_3.



4.3.2. Un sous-espace vectoriel est un espace vectoriel

La notion de sous-espace vectoriel prend tout son intérêt avec le théorème suivant : un sous-espace vectoriel est lui-même un espace vectoriel. C'est ce théorème qui va nous fournir plein d'exemples d'espaces vectoriels.

> **Théorème 1.**
> *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est lui-même un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois induites par E.*

Méthodologie. Pour répondre à une question du type « L'ensemble F est-il un espace vectoriel ? », une façon efficace de procéder est de trouver un espace vectoriel E qui contient F, puis prouver que F est un sous-espace vectoriel de E. Il y a seulement trois propriétés à vérifier au lieu de huit !

Exemple 9.

1. Est-ce que l'ensemble des fonctions paires (puis des fonctions impaires) forme un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$ avec les lois usuelles sur les fonctions) ?

   Notons $\mathscr{P}$ l'ensemble des fonctions paires et $\mathscr{I}$ l'ensemble des fonctions impaires. Ce sont deux sous-ensembles de l'espace vectoriel $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions.

$$\mathscr{P} = \left\{ f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x) \right\}$$
$$\mathscr{I} = \left\{ f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x) \right\}$$

   $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. C'est très simple à vérifier, par exemple pour $\mathscr{P}$:

   (a) la fonction nulle est une fonction paire,

(b) si $f, g \in \mathscr{P}$ alors $f + g \in \mathscr{P}$,

(c) si $f \in \mathscr{P}$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda f \in \mathscr{P}$.

Par le théorème 1, $\mathscr{P}$ est un espace vectoriel (de même pour $\mathscr{I}$).

2. Est-ce que l'ensemble $\mathscr{S}_n$ des matrices symétriques de taille n est un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$ avec les lois usuelles sur les matrices) ?

   $\mathscr{S}_n$ est un sous-ensemble de l'espace vectoriel $M_n(\mathbb{R})$. Et c'est même un sous-espace vectoriel. Il suffit en effet de vérifier que la matrice nulle est symétrique, que la somme de deux matrices symétriques est encore symétrique et finalement que le produit d'une matrice symétrique par un scalaire est une matrice symétrique. Par le théorème 1, $\mathscr{S}_n$ est un espace vectoriel.

Preuve du théorème 1. Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel $(E, +, \cdot)$. La stabilité de F pour les deux lois permet de munir cet ensemble d'une loi de composition interne et d'une loi de composition externe, en restreignant à F les opérations définies dans E. Les propriétés de commutativité et d'associativité de l'addition, ainsi que les quatre axiomes relatifs à la loi externe sont vérifiés, car ils sont satisfaits dans E donc en particulier dans F, qui est inclus dans E.
L'existence d'un élément neutre découle de la définition de sous-espace vectoriel.
Il reste seulement à justifier que si $u \in F$, alors son symétrique $-u$ appartient à F.
Fixons $u \in F$. Comme on a aussi $u \in E$ et que E est un espace vectoriel alors il existe un élément de E, noté $-u$, tel que $u + (-u) = 0_E$. Comme u est élément de F, alors pour $\lambda = -1$, $(-1)u \in F$. Et ainsi $-u$ appartient à F. □

Un autre exemple d'espace vectoriel est donné par l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène. Soit $AX = 0$ un système de n équations à p inconnues :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a alors

Théorème 2.
Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$. Soit $AX = 0$ un système d'équations linéaires homogènes à p variables. Alors l'ensemble des vecteurs solutions est un sous-espace vectoriel de

$\mathbb{R}^p$.

Démonstration. Soit F l'ensemble des vecteurs $X \in \mathbb{R}^p$ solutions de l'équation $AX = 0$. Vérifions que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$.

- Le vecteur 0 est un élément de F.
- F est stable par addition : si X et X' sont des vecteurs solutions, alors $AX = 0$ et $AX' = 0$, donc $A(X + X') = AX + AX' = 0$, et ainsi $X + X' \in F$.
- F est stable par multiplication par un scalaire : si X est un vecteur solution, on a aussi $A(\lambda X) = \lambda(AX) = \lambda 0 = 0$, ceci pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Donc $\lambda X \in F$.

□

Exemple 10.
Considérons le système

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

L'ensemble des solutions $F \subset \mathbb{R}^3$ de ce système est :

$$F = \left\{ (x = 2s - 3t, y = s, z = t) \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Par le théorème 2, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Donc par le théorème 1, F est un espace vectoriel.

Une autre façon de voir les choses est d'écrire que les éléments de F sont ceux qui vérifient l'équation $(x = 2y - 3z)$. Autrement dit, F est d'équation $(x - 2y + 3z = 0)$. L'ensemble des solutions F est donc un plan passant par l'origine. Nous avons déjà vu que ceci est un espace vectoriel.

Mini-exercices.
Parmi les ensembles suivants, reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels :

1. $\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0 \right\}$
2. $\left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = t \text{ et } y = z \right\}$
3. $\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1 \right\}$
4. $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + xy \geqslant 0 \right\}$

5. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \geqslant 1\}$
6. $\{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(0)=1\}$
7. $\{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(1)=0\}$
8. $\{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f \text{ est croissante }\}$
9. $\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ tend vers } 0\}$

4.4. Sous-espace vectoriel (milieu)

4.4.1. Combinaisons linéaires

Définition 3.
Soit $n \geqslant 1$ un entier, soient $v_1, v_2, \dots, v_n$, n vecteurs d'un espace vectoriel E. Tout vecteur de la forme

$$u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$$

(où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont des éléments de $\mathbb{K}$) est appelé **combinaison linéaire** des vecteurs $v_1, v_2, \dots, v_n$. Les scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont appelés **coefficients** de la combinaison linéaire.

Remarque : Si $n=1$, alors $u = \lambda_1 v_1$ et on dit que u est **colinéaire** à v_1.

Exemple 11.

1. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, $(3,3,1)$ est combinaison linéaire des vecteurs $(1,1,0)$ et $(1,1,1)$ car on a l'égalité
$$(3,3,1) = 2(1,1,0) + (1,1,1).$$
2. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, le vecteur $u=(2,1)$ *n'est pas* colinéaire au vecteur $v_1=(1,1)$ car s'il l'était, il existerait un réel λ tel que $u = \lambda v_1$, ce qui équivaudrait à l'égalité $(2,1)=(\lambda,\lambda)$.
3. Soit $E = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles. Soient f_0, f_1, f_2 et f_3 les fonctions définies par :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_0(x)=1,\; f_1(x)=x,\; f_2(x)=x^2,\; f_3(x)=x^3.$$

Alors la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x^3 - 2x^2 - 7x - 4$$

est combinaison linéaire des fonctions f_0, f_1, f_2, f_3 puisque l'on a l'égalité

$$f = f_3 - 2f_2 - 7f_1 - 4f_0.$$

4. Dans $M_{2,3}(\mathbb{R})$, on considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. On peut écrire A naturellement sous la forme suivante d'une combinaison linéaire de matrices élémentaires (des zéros partout, sauf un 1) :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Voici deux exemples plus compliqués.

Exemple 12.
Soient $u = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ et $v = \left(\begin{smallmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Montrons que $w = \left(\begin{smallmatrix} 9 \\ 2 \\ 7 \end{smallmatrix}\right)$ est combinaison linéaire de u et v. On cherche donc λ et μ tels que $w = \lambda u + \mu v$:

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 2\lambda \\ -\lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6\mu \\ 4\mu \\ 2\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 6\mu \\ 2\lambda + 4\mu \\ -\lambda + 2\mu \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$\begin{cases} 9 = \lambda + 6\mu \\ 2 = 2\lambda + 4\mu \\ 7 = -\lambda + 2\mu. \end{cases}$$

Une solution de ce système est $(\lambda = -3, \mu = 2)$, ce qui implique que w est combinaison linéaire de u et v. On vérifie que l'on a bien

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Exemple 13.
Soient $u = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ et $v = \left(\begin{smallmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$. Montrons que $w = \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{smallmatrix}\right)$ n'est pas une combinaison

linéaire de u et v. L'égalité

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{équivaut au système} \quad \begin{cases} 4 &= \lambda + 6\mu \\ -1 &= 2\lambda + 4\mu \\ 8 &= -\lambda + 2\mu. \end{cases}$$

Or ce système n'a aucune solution. Donc il n'existe pas $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $w = \lambda u + \mu v$.

4.4.2. Caractérisation d'un sous-espace vectoriel

Théorème 3 (Caractérisation d'un sous-espace par la notion de combinaison linéaire)**.**
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une partie non vide de E. F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

$$\lambda u + \mu v \in F \qquad \textit{pour tous } u, v \in F \quad \textit{et tous } \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$$

Autrement dit si et seulement si toute combinaison linéaire de deux éléments de F appartient à F.

Démonstration.

- Supposons que F soit un sous-espace vectoriel. Et soient $u, v \in F$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors par la définition de sous-espace vectoriel : $\lambda u \in F$ et $\mu v \in F$ et ainsi $\lambda u + \mu v \in F$.
- Réciproquement, supposons que pour chaque $u, v \in F$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ on a $\lambda u + \mu v \in F$.
  - — Comme F n'est pas vide, soient $u, v \in F$. Posons $\lambda = \mu = 0$. Alors $\lambda u + \mu v = 0_E \in F$.
  - — Si $u, v \in F$, alors en posant $\lambda = \mu = 1$ on obtient $u + v \in F$.
  - — Si $u \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ (et pour n'importe quel v, en posant $\mu = 0$), alors $\lambda u \in F$.

□

4.4.3. Intersection de deux sous-espaces vectoriels

Proposition 3 (Intersection de deux sous-espaces)**.**
Soient F, G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. L'intersection $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

On démontrerait de même que l'intersection $F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap \cdots \cap F_n$ d'une famille quelconque de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

- $0_E \in F$, $0_E \in G$ car F et G sont des sous-espaces vectoriels de E ; donc $0_E \in F \cap G$.
- Soient u et v deux vecteurs de $F \cap G$. Comme F est un sous-espace vectoriel, alors $u, v \in F$ implique $u + v \in F$. De même $u, v \in G$ implique $u + v \in G$. Donc $u + v \in F \cap G$.
- Soient $u \in F \cap G$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Comme F est un sous-espace vectoriel, alors $u \in F$ implique $\lambda u \in F$. De même $u \in G$ implique $\lambda u \in G$. Donc $\lambda u \in F \cap G$.

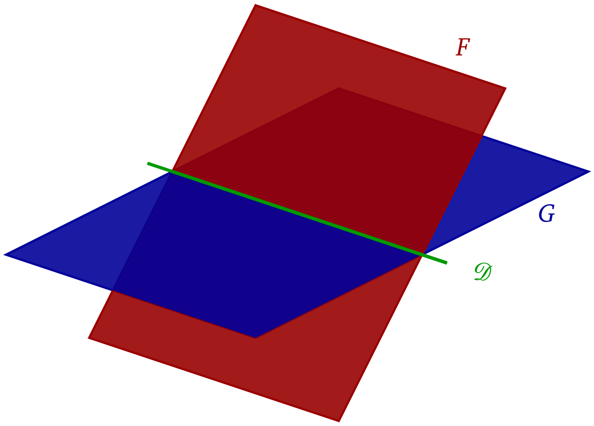
Conclusion : $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E. □

Exemple 14.
Soit $\mathscr{D}$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\mathscr{D} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3y + z = 0 \quad \text{et} \quad x - y + 2z = 0\right\}.$$

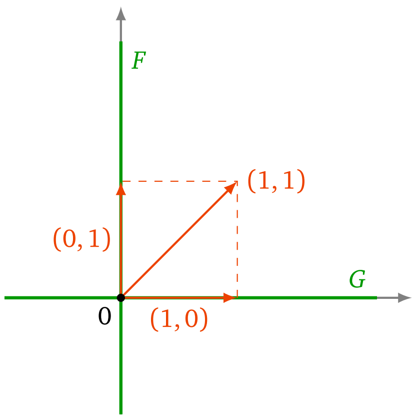
Est-ce que $\mathscr{D}$ est sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? L'ensemble $\mathscr{D}$ est l'intersection de F et G, les sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3y + z = 0\right\}$$
$$G = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 2z = 0\right\}$$



Ce sont deux plans passant par l'origine, donc des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Ainsi $\mathscr{D} = F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, c'est une droite vectorielle.

Remarque.
La réunion de deux sous-espaces vectoriels de E n'est pas en général un sous-espace vectoriel de E. Prenons par exemple $E = \mathbb{R}^2$. Considérons les sous-espaces vectoriels $F = \{(x, y) \mid x = 0\}$ et $G = \{(x, y) \mid y = 0\}$. Alors $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. Par exemple, $(0, 1) + (1, 0) = (1, 1)$ est la somme d'un élément de F et d'un élément de G, mais n'est pas dans $F \cup G$.



Mini-exercices.

1. Peut-on trouver $t \in \mathbb{R}$ tel que les vecteurs $\begin{pmatrix} -2 \\ \sqrt{2} \\ t \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -4\sqrt{2} \\ 4t \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$ soient colinéaires ?

2. Peut-on trouver $t \in \mathbb{R}$ tel que le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 3t \\ t \end{pmatrix}$ soit une combinaison linéaire de $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$?

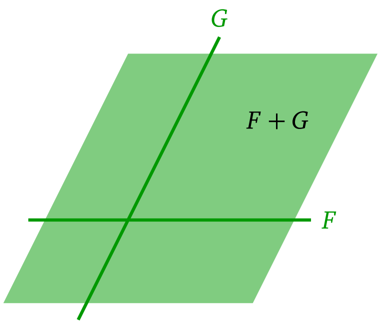
4.5. Sous-espace vectoriel (fin)

4.5.1. Somme de deux sous-espaces vectoriels

Comme la réunion de deux sous-espaces vectoriels F et G n'est pas en général un sous-espace vectoriel, il est utile de connaître les sous-espaces vectoriels qui contiennent à la fois les deux sous-espaces vectoriels F et G, et en particulier le plus petit d'entre eux (au sens de l'inclusion).

Définition 4 (Définition de la somme de deux sous-espaces)**.**
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. L'ensemble de tous les éléments $u+v$, où u est un élément de F et v un élément de G, est appelé **somme** des sous-espaces vectoriels F et G. Cette somme est notée $F+G$. On a donc

$$F+G = \left\{u+v \mid u \in F, v \in G\right\}.$$



Proposition 4.
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. *$F+G$ est un sous-espace vectoriel de E.*
2. *$F+G$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant à la fois F et G.*

Démonstration.

1. Montrons que $F+G$ est un sous-espace vectoriel.

    - $0_E \in F$, $0_E \in G$, donc $0_E = 0_E + 0_E \in F+G$.

    - Soient w et w' des éléments de $F+G$. Comme w est dans $F+G$, il existe u dans F et v dans G tels que $w = u+v$. Comme w' est dans $F+G$, il existe u' dans F et v' dans G tels que $w' = u'+v'$. Alors $w+w' = (u+v)+(u'+v') = (u+u')+(v+v') \in F+G$, car $u+u' \in F$ et $v+v' \in G$.

    - Soit w un élément de $F+G$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Il existe u dans F et v dans G tels que $w = u+v$. Alors $\lambda w = \lambda(u+v) = (\lambda u)+(\lambda v) \in F+G$, car $\lambda u \in F$ et $\lambda v \in G$.

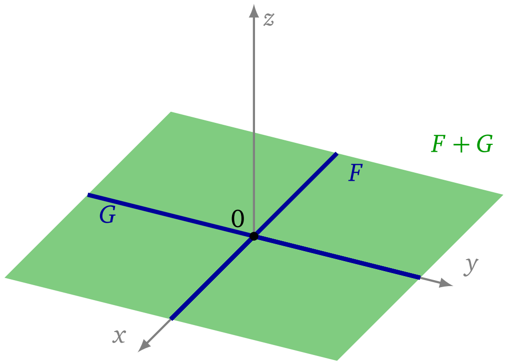
2.
    - L'ensemble $F+G$ contient F et contient G : en effet tout élément u de F s'écrit $u = u+0$ avec u appartenant à F et 0 appartenant à G (puisque G est un sous-espace vectoriel), donc u appartient à $F+G$. De même pour un élément de G.

    - Si H est un sous-espace vectoriel contenant F et G, alors montrons que $F+G \subset H$. C'est clair : si $u \in F$ alors en particulier $u \in H$ (car $F \subset H$), de même si $v \in G$ alors $v \in H$. Comme H est un sous-espace vectoriel, alors $u+v \in H$.

□

Exemple 15.
Déterminons $F+G$ dans le cas où F et G sont les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :

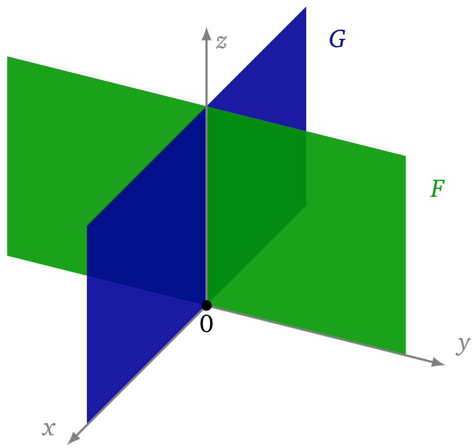
$$F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z = 0\right\} \qquad \text{et} \qquad G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z = 0\right\}.$$



Un élément w de $F+G$ s'écrit $w=u+v$ où u est un élément de F et v un élément de G. Comme $u \in F$ alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $u=(x,0,0)$, et comme $v \in G$ il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $v=(0,y,0)$. Donc $w=(x,y,0)$. Réciproquement, un tel élément $w=(x,y,0)$ est la somme de $(x,0,0)$ et de $(0,y,0)$. Donc $F+G=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=0\right\}$. On voit même que, pour cet exemple, tout élément de $F+G$ s'écrit de façon *unique* comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G.

Exemple 16.
Soient F et G les deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$F=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=0\right\} \qquad \text{et} \qquad G=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y=0\right\}.$$



Dans cet exemple, montrons que $F+G=\mathbb{R}^3$. Par définition de $F+G$, tout élément de $F+G$ est dans $\mathbb{R}^3$. Mais réciproquement, si $w=(x,y,z)$ est un

élément quelconque de $\mathbb{R}^3$: $w = (x, y, z) = (0, y, z) + (x, 0, 0)$, avec $(0, y, z) \in F$ et $(x, 0, 0) \in G$, donc w appartient à $F + G$.
Remarquons que, dans cet exemple, un élément de $\mathbb{R}^3$ ne s'écrit pas forcément de façon unique comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G. Par exemple $(1, 2, 3) = (0, 2, 3) + (1, 0, 0) = (0, 2, 0) + (1, 0, 3)$.

4.5.2. Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Définition 5 (Définition de la somme directe de deux sous-espaces)**.**
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. F et G sont en **somme directe** dans E si

- $F \cap G = \{0_E\}$,
- $F + G = E$.

On note alors $F \oplus G = E$.

Si F et G sont en somme directe, on dit que F et G sont des sous-espaces vectoriels **supplémentaires** dans E.

Proposition 5.
F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si tout élément de E s'écrit d'une manière **unique** *comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G.*

Remarque.

- Dire qu'un élément w de E s'écrit d'une manière unique comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G signifie que si $w = u + v$ avec $u \in F$, $v \in G$ et $w = u' + v'$ avec $u' \in F$, $v' \in G$ alors $u = u'$ et $v = v'$.
- On dit aussi que F est un sous-espace supplémentaire de G (ou que G est un sous-espace supplémentaire de F).
- Il n'y a pas unicité du supplémentaire d'un sous-espace vectoriel donné (voir un exemple ci-dessous).
- L'existence d'un supplémentaire d'un sous-espace vectoriel sera prouvée dans le cadre des espaces vectoriels de dimension finie.

Démonstration.

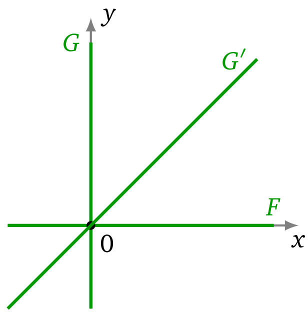
- Supposons $E = F \oplus G$ et montrons que tout élément $u \in E$ se décompose de manière unique. Soient donc $u = v + w$ et $u = v' + w'$ avec $v, v' \in F$ et $w, w' \in G$. On a alors $v + w = v' + w'$, donc $v - v' = w' - w$. Comme F est un sous-espace vectoriel alors $v - v' \in F$, mais d'autre part G est aussi un sous-espace vectoriel donc $w' - w \in G$. Conclusion : $v - v' = w' - w \in F \cap G$. Mais par définition d'espaces supplémentaires $F \cap G = \{0_E\}$, donc $v - v' = 0_E$ et aussi $w' - w = 0_E$. On en déduit $v = v'$ et $w = w'$, ce qu'il fallait démontrer.
- Supposons que tout $u \in E$ se décompose de manière unique et montrons $E = F \oplus G$.
  - Montrons $F \cap G = \{0_E\}$. Si $u \in F \cap G$, il peut s'écrire des deux manières suivantes comme somme d'un élément de F et d'un élément de G :
  $$u = 0_E + u \qquad \text{et} \qquad u = u + 0_E.$$
  Par l'unicité de la décomposition, $u = 0_E$.
  - Montrons $F + G = E$. Il n'y rien à prouver, car par hypothèse tout élément u se décompose en $u = v + w$, avec $v \in F$ et $w \in G$.

□

Exemple 17.

1. Soient $F = \left\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\right\}$ et $G = \left\{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{R}\right\}$.

   Montrons que $F \oplus G = \mathbb{R}^2$. La première façon de le voir est que l'on a clairement $F \cap G = \{(0,0)\}$ et que, comme $(x, y) = (x, 0) + (0, y)$, alors $F + G = \mathbb{R}^2$. Une autre façon de le voir est d'utiliser la proposition 5, car la décomposition $(x, y) = (x, 0) + (0, y)$ est unique.



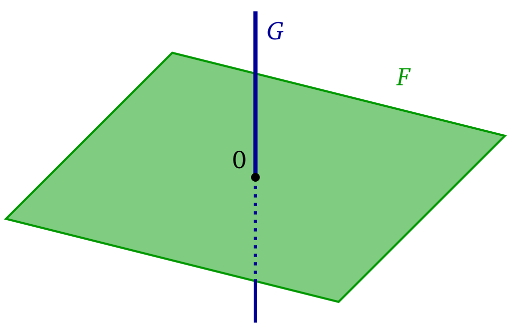
2. Gardons F et notons $G' = \{(x,x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$. Montrons que l'on a aussi $F \oplus G' = \mathbb{R}^2$:

   (a) Montrons $F \cap G' = \{(0,0)\}$. Si $(x,y) \in F \cap G'$ alors d'une part $(x,y) \in F$ donc $y = 0$, et aussi $(x,y) \in G'$ donc $x = y$. Ainsi $(x,y) = (0,0)$.

   (b) Montrons $F + G' = \mathbb{R}^2$. Soit $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Cherchons $v \in F$ et $w \in G'$ tels que $u = v + w$. Comme $v = (x_1, y_1) \in F$ alors $y_1 = 0$, et comme $w = (x_2, y_2) \in G'$ alors $x_2 = y_2$. Il s'agit donc de trouver x_1 et x_2 tels que
$$(x,y) = (x_1, 0) + (x_2, x_2).$$
   Donc $(x,y) = (x_1 + x_2, x_2)$. Ainsi $x = x_1 + x_2$ et $y = x_2$, d'où $x_1 = x - y$ et $x_2 = y$. On trouve bien
$$(x,y) = (x-y, 0) + (y,y),$$
   qui prouve que tout élément de $\mathbb{R}^2$ est somme d'un élément de F et d'un élément de G'.

3. De façon plus générale, deux droites distinctes du plan passant par l'origine forment des sous-espaces supplémentaires.

Exemple 18.
Est-ce que les sous-espaces vectoriels F et G de $\mathbb{R}^3$ définis par
$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0\} \qquad \text{et} \qquad G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z = 0\}$$
sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?



1. Il est facile de vérifier que $F \cap G = \{0\}$. En effet si l'élément $u = (x,y,z)$ appartient à l'intersection de F et de G, alors les coordonnées de u vérifient :

$x - y - z = 0$ (car u appartient à F), et $y = z = 0$ (car u appartient à G), donc $u = (0,0,0)$.

2. Il reste à démontrer que $F + G = \mathbb{R}^3$.

   Soit donc $u = (x, y, z)$ un élément quelconque de $\mathbb{R}^3$; il faut déterminer des éléments v de F et w de G tels que $u = v + w$. L'élément v doit être de la forme $v = (y_1 + z_1, y_1, z_1)$ et l'élément w de la forme $w = (x_2, 0, 0)$. On a $u = v + w$ si et seulement si $y_1 = y$, $z_1 = z$, $x_2 = x - y - z$. On a donc
   $$(x, y, z) = (y + z, y, z) + (x - y - z, 0, 0)$$
   avec $v = (y + z, y, z)$ dans F et $w = (x - y - z, 0, 0)$ dans G.

Conclusion : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

Exemple 19.

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on considère le sous-espace vectoriel des fonctions paires $\mathscr{P}$ et le sous-espace vectoriel des fonctions impaires $\mathscr{I}$. Montrons que $\mathscr{P} \oplus \mathscr{I} = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1. Montrons $\mathscr{P} \cap \mathscr{I} = \{0_{\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}\}$.

   Soit $f \in \mathscr{P} \cap \mathscr{I}$, c'est-à-dire que f est à la fois une fonction paire et impaire. Il s'agit de montrer que f est la fonction identiquement nulle. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $f(-x) = f(x)$ (car f est paire) et $f(-x) = -f(x)$ (car f est impaire), alors $f(x) = -f(x)$, ce qui implique $f(x) = 0$. Ceci est vrai quel que soit $x \in \mathbb{R}$; donc f est la fonction nulle. Ainsi $\mathscr{P} \cap \mathscr{I} = \{0_{\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}\}$.

2. Montrons $\mathscr{P} + \mathscr{I} = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

   Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Il s'agit de montrer que f peut s'écrire comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

   Analyse. Si $f = g + h$, avec $g \in \mathscr{P}$, $h \in \mathscr{I}$, alors pour tout x, d'une part, (a) $f(x) = g(x) + h(x)$, et d'autre part, (b) $f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x)$. Par somme et différence de (a) et (b), on tire que
   $$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \qquad \text{et} \qquad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$
   Synthèse. Pour $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on définit deux fonctions g, h par $g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$. Alors d'une part $f(x) = g(x) + h(x)$ et d'autre part $g \in \mathscr{P}$ (vérifier $g(-x) = g(x)$) et $h \in \mathscr{I}$ (vérifier $h(-x) = -h(x)$). Bilan : $\mathscr{P} + \mathscr{I} = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

En conclusion, $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$ sont en somme directe dans $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$: $\mathscr{P} \oplus \mathscr{I} = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Notez que, comme le prouvent nos calculs, les g et h obtenus sont uniques.

4.5.3. Sous-espace engendré

Théorème 4 (Théorème de structure de l'ensemble des combinaisons linéaires).
Soit $\{v_1,\ldots,v_n\}$ un ensemble fini de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Alors :

- *L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $\{v_1,\ldots,v_n\}$ est un sous-espace vectoriel de E.*
- *C'est le plus petit sous-espace vectoriel de E (au sens de l'inclusion) contenant les vecteurs $v_1,\ldots,v_n$.*

Notation. Ce sous-espace vectoriel est appelé **sous-espace engendré par $v_1,\ldots,v_n$** et est noté $\mathrm{Vect}(v_1,\ldots,v_n)$. On a donc

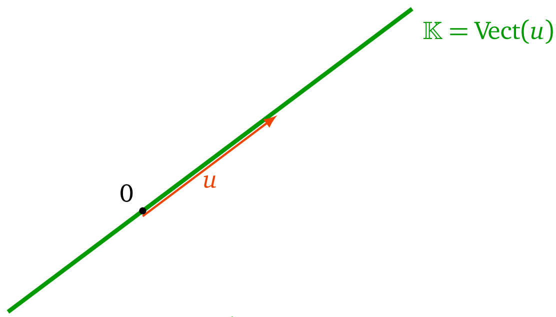
$$\boxed{u \in \mathrm{Vect}(v_1,\ldots,v_n) \iff \text{il existe } \lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{K} \quad \text{tels que} \quad u = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n}$$

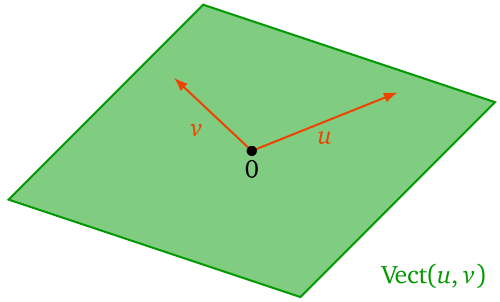
Remarque.

- Dire que $\mathrm{Vect}(v_1,\ldots,v_n)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant les vecteurs $v_1,\ldots,v_n$ signifie que si F est un sous-espace vectoriel de E contenant aussi les vecteurs $v_1,\ldots,v_n$ alors $\mathrm{Vect}(v_1,\ldots,v_n) \subset F$.
- Plus généralement, on peut définir le sous-espace vectoriel engendré par une partie $\mathscr{V}$ quelconque (non nécessairement finie) d'un espace vectoriel : $\mathrm{Vect}\,\mathscr{V}$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant $\mathscr{V}$.

Exemple 20.

1. E étant un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et u un élément quelconque de E, l'ensemble $\mathrm{Vect}(u) = \{\lambda u \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$ est le sous-espace vectoriel de E engendré par u. Il est souvent noté $\mathbb{K}u$. Si u n'est pas le vecteur nul, on parle d'une **droite vectorielle**.





2. Si u et v sont deux vecteurs de E, alors $\mathrm{Vect}(u,v) = \left\{\lambda u + \mu v \mid \lambda, \mu \in \mathbb{K}\right\}$. Si u et v ne sont pas colinéaires, alors $\mathrm{Vect}(u,v)$ est un **plan vectoriel**.
3. Soient $u = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$ et $v = \left(\begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix}\right)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Déterminons $\mathscr{P} = \mathrm{Vect}(u,v)$.

$$\begin{aligned}
\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Vect}(u,v) \quad &\iff \quad \left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) = \lambda u + \mu v \quad \text{pour certains } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\
&\iff \quad \left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) = \lambda \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right) + \mu \left(\begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix}\right) \\
&\iff \quad \left\{\begin{array}{rcl} x &=& \lambda + \mu \\ y &=& \lambda + 2\mu \\ z &=& \lambda + 3\mu \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Nous obtenons bien une équation paramétrique du plan $\mathscr{P}$ passant par l'origine et contenant les vecteurs u et v. On sait en trouver une équation cartésienne : $(x - 2y + z = 0)$.

Exemple 21.

Soient E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et f_0, f_1, f_2 les applications définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f_0(x) = 1, \;\; f_1(x) = x \quad \text{et} \quad f_2(x) = x^2.$$

Le sous-espace vectoriel de E engendré par $\{f_0, f_1, f_2\}$ est l'espace vectoriel des fonctions polynômes f de degré inférieur ou égal à 2, c'est-à-dire de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Méthodologie. On peut démontrer qu'une partie F d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E en montrant que F est égal à l'ensemble des combinaisons linéaires d'un nombre fini de vecteurs de E.

Exemple 22.
Est-ce que $F = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0\big\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?
Un triplet de $\mathbb{R}^3$ est élément de F si et seulement si $x = y + z$. Donc u est élément de F si et seulement s'il peut s'écrire $u = (y + z, y, z)$. Or, on a l'égalité

$$(y + z, y, z) = y(1, 1, 0) + z(1, 0, 1).$$

Donc F est l'ensemble des combinaisons linéaires de $\big\{(1, 1, 0), (1, 0, 1)\big\}$. C'est le sous-espace vectoriel engendré par $\big\{(1, 1, 0), (1, 0, 1)\big\}$: $F = \operatorname{Vect}\big\{(1, 1, 0), (1, 0, 1)\big\}$. C'est bien un plan vectoriel (un plan passant par l'origine).

Preuve du théorème 4.

1. On appelle F l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $\{v_1, \ldots, v_n\}$.
   (a) $0_E \in F$ car F contient la combinaison linéaire particulière $0v_1 + \cdots + 0v_n$.
   (b) Si $u, v \in F$ alors il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $u = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$ et $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{K}$ tels que $v = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n$. On en déduit que $u + v = (\lambda_1 + \mu_1)v_1 + \cdots + (\lambda_n + \mu_n)v_n$ appartient bien à F.
   (c) De même, $\lambda \cdot u = (\lambda\lambda_1)v_1 + \cdots + (\lambda\lambda_n)v_n \in F$.

   Conclusion : F est un sous-espace vectoriel.
2. Si G est un sous-espace vectoriel contenant $\{v_1, \ldots, v_n\}$, alors il est stable par combinaison linéaire ; il contient donc toute combinaison linéaire des vecteurs $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Par conséquent F est inclus dans G : F est le plus petit sous-espace (au sens de l'inclusion) contenant $\{v_1, \ldots, v_n\}$.

□

Mini-exercices.

1. Trouver des sous-espaces vectoriels distincts F et G de $\mathbb{R}^3$ tels que
   (a) $F+G=\mathbb{R}^3$ et $F\cap G\neq\{0\}$;
   (b) $F+G\neq\mathbb{R}^3$ et $F\cap G=\{0\}$;
   (c) $F+G=\mathbb{R}^3$ et $F\cap G=\{0\}$;
   (d) $F+G\neq\mathbb{R}^3$ et $F\cap G\neq\{0\}$.
2. Soient $F=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\big\}$ et $G=\mathrm{Vect}\big\{(1,1,1)\big\}\subset\mathbb{R}^3$.
   (a) Montrer que F est un espace vectoriel. Trouver deux vecteurs u,v tels que $F=\mathrm{Vect}(u,v)$.
   (b) Calculer $F\cap G$ et montrer que $F+G=\mathbb{R}^3$. Que conclure ?
3. Soient $A=\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$, $B=\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$, $C=\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)$, $D=\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ des matrices de $M_2(\mathbb{R})$.
   (a) Quel est l'espace vectoriel F engendré par A et B ? Idem avec G engendré par C et D.
   (b) Calculer $F\cap G$. Montrer que $F+G=M_2(\mathbb{R})$. Conclure.

4.6. Application linéaire (début)

4.6.1. Définition

Nous avons déjà rencontré la notion d'application linéaire dans le cas $f:\mathbb{R}^p\longrightarrow\mathbb{R}^n$ (voir le chapitre « L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ »). Cette notion se généralise à des espaces vectoriels quelconques.

Définition 6.
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application f de E dans F est une **application linéaire** si elle satisfait aux deux conditions suivantes :

1. $f(u+v)=f(u)+f(v)$, pour tous $u,v\in E$;
2. $f(\lambda\cdot u)=\lambda\cdot f(u)$, pour tout $u\in E$ et tout $\lambda\in\mathbb{K}$.

Autrement dit : une application est linéaire si elle « respecte » les deux lois d'un espace vectoriel.

Notation. L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathscr{L}(E,F)$.

4.6.2. Premiers exemples

Exemple 23.
L'application f définie par

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (-2x, y+3z) \end{array}$$

est une application linéaire. En effet, soient $u=(x,y,z)$ et $v=(x',y',z')$ deux éléments de $\mathbb{R}^3$ et λ un réel.

$$\begin{aligned} f(u+v) &= f(x+x', y+y', z+z') \\ &= \big(-2(x+x'), y+y'+3(z+z')\big) \\ &= (-2x, y+3z)+(-2x', y'+3z') \\ &= f(u)+f(v) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f(\lambda\cdot u) &= f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \\ &= (-2\lambda x, \lambda y+3\lambda z) \\ &= \lambda\cdot(-2x, y+3z) \\ &= \lambda\cdot f(u) \end{aligned}$$

Toutes les applications ne sont pas des applications linéaires !

Exemple 24.
Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ l'application définie par $f(x)=x^2$. On a $f(1)=1$ et $f(2)=4$. Donc $f(2)\neq 2\cdot f(1)$. Ce qui fait que l'on n'a pas l'égalité $f(\lambda x)=\lambda f(x)$ pour un certain choix de λ, x. Donc f n'est pas linéaire. Notez que l'on n'a pas non plus $f(x+x')=f(x)+f(x')$ dès que $xx'\neq 0$.

Voici d'autres exemples d'applications linéaires :

1. Pour une matrice fixée $A\in M_{n,p}(\mathbb{R})$, l'application $f:\mathbb{R}^p\longrightarrow\mathbb{R}^n$ définie par

   $$f(X)=AX$$

   est une application linéaire.

2. L'**application nulle**, notée $0_{\mathscr{L}(E,F)}$:

   $$f:E\longrightarrow F \qquad f(u)=0_F \qquad \text{pour tout } u\in E.$$

3. L'**application identité**, notée id_E :

$$f : E \longrightarrow E \qquad f(u) = u \qquad \text{pour tout } u \in E.$$

4.6.3. Premières propriétés

Proposition 6.
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Si f est une application linéaire de E dans F, alors :

- $f(0_E) = 0_F$,
- $f(-u) = -f(u)$, *pour tout* $u \in E$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer la définition de la linéarité avec $\lambda = 0$, puis avec $\lambda = -1$. □

Pour démontrer qu'une application est linéaire, on peut aussi utiliser une propriété plus « concentrée », donnée par la caractérisation suivante :

Proposition 7 (Caractérisation d'une application linéaire)**.**
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application de E dans F. L'application f est linéaire si et seulement si, pour tous vecteurs u et v de E et pour tous scalaires λ et μ de $\mathbb{K}$,

$$\boxed{f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v).}$$

Plus généralement, une application linéaire f préserve les combinaisons linéaires : pour tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ et tous $v_1, \ldots, v_n \in E$, on a

$$f(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_n f(v_n).$$

Démonstration.

- Soit f une application linéaire de E dans F. Soient $u, v \in E$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. En utilisant les deux axiomes de la définition, on a

$$f(\lambda u + \mu v) = f(\lambda u) + f(\mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v).$$

- Montrons la réciproque. Soit $f : E \to F$ une application telle que $f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$ (pour tous $u, v \in E$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$). Alors, d'une part $f(u+v) = f(u) + f(v)$ (en considérant le cas particulier où $\lambda = \mu = 1$), et d'autre part $f(\lambda u) = \lambda f(u)$ (cas particulier où $\mu = 0$).

□

Vocabulaire.
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

- Une application linéaire de E dans F est aussi appelée **morphisme** ou **homomorphisme** d'espaces vectoriels. L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathscr{L}(E, F)$.
- Une application linéaire de E dans E est appelée **endomorphisme** de E. L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathscr{L}(E)$.

Mini-exercices.
Montrer que les applications suivantes $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sont linéaires. Caractériser géométriquement ces applications et faire un dessin.

1. $f_1(x, y) = (-x, -y)$;
2. $f_2(x, y) = (3x, 3y)$;
3. $f_3(x, y) = (x, -y)$;
4. $f_4(x, y) = (-x, y)$;
5. $f_5(x, y) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)$.

4.7. Application linéaire (milieu)

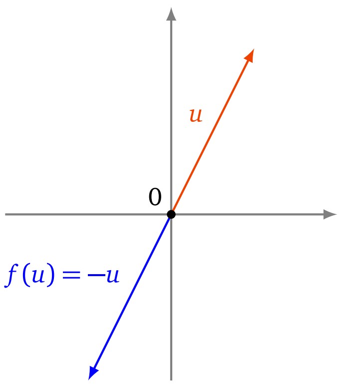
4.7.1. Exemples géométriques

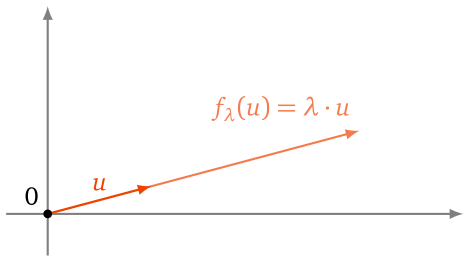
Symétrie centrale.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On définit l'application f par :

$$\begin{array}{rcl} f : E & \to & E \\ u & \mapsto & -u \end{array}$$

f est linéaire et s'appelle la **symétrie centrale** par rapport à l'origine 0_E.





Homothétie.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit l'application f_λ par :

$$\begin{array}{rcl} f_\lambda : E & \to & E \\ u & \mapsto & \lambda u \end{array}$$

f_λ est linéaire. f_λ est appelée **homothétie** de rapport λ.

Cas particuliers notables :

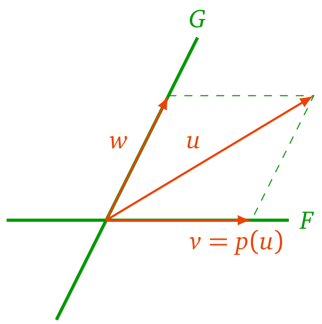
- $\lambda = 1$, f_λ est l'application identité ;
- $\lambda = 0$, f_λ est l'application nulle ;
- $\lambda = -1$, on retrouve la symétrie centrale.

Preuve que f_λ est une application linéaire :

$$f_\lambda(\alpha u + \beta v) = \lambda(\alpha u + \beta v) = \alpha(\lambda u) + \beta(\lambda v) = \alpha f_\lambda(u) + \beta f_\lambda(v).$$

Projection.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E, c'est-à-dire $E = F \oplus G$. Tout vecteur u de E s'écrit de façon unique $u = v + w$ avec $v \in F$ et $w \in G$. La **projection** sur F parallèlement à G est l'application $p : E \to E$ définie par $p(u) = v$.



- Une projection est une application linéaire.

  En effet, soient $u, u' \in E$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On décompose u et u' en utilisant que $E = F \oplus G$: $u = v + w$, $u' = v' + w'$ avec $v, v' \in F$, $w, w' \in G$. Commençons par écrire

  $$\lambda u + \mu u' = \lambda(v + w) + \mu(v' + w') = (\lambda v + \mu v') + (\lambda w + \mu w').$$

  Comme F et G sont des un sous-espaces vectoriels de E, alors $\lambda v + \mu v' \in F$ et $\lambda w + \mu w' \in G$. Ainsi :

  $$p(\lambda u + \mu u') = \lambda v + \mu v' = \lambda p(u) + \mu p(u').$$

- Une projection p vérifie l'égalité $p^2 = p$.

  Note : $p^2 = p$ signifie $p \circ p = p$, c'est-à-dire pour tout $u \in E$: $p\big(p(u)\big) = p(u)$. Il s'agit juste de remarquer que si $v \in F$ alors $p(v) = v$ (car $v = v + 0$, avec $v \in F$ et $0 \in G$). Maintenant, pour $u \in E$, on a $u = v + w$ avec $v \in F$ et $w \in G$. Par définition $p(u) = v$. Mais alors $p\big(p(u)\big) = p(v) = v$. Bilan : $p \circ p(u) = v = p(u)$. Donc $p \circ p = p$.

Exemple 25.

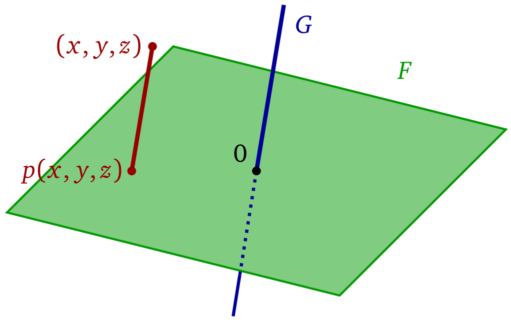
Nous avons vu que les sous-espaces vectoriels F et G de $\mathbb{R}^3$ définis par

$$F = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0\big\} \qquad \text{et} \qquad G = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z = 0\big\}$$

sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$: $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$ (exemple 18). Nous avions vu que la décomposition s'écrivait :

$$(x,y,z) = (y+z,y,z) + (x-y-z,0,0).$$

Si p est la projection sur F parallèlement à G, alors on a $p(x,y,z) = (y+z,y,z)$.



Exemple 26.

Nous avons vu dans l'exemple 19 que l'ensemble des fonctions paires $\mathscr{P}$ et l'ensemble des fonctions impaires $\mathscr{I}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Notons p la projection sur $\mathscr{P}$ parallèlement à $\mathscr{I}$. Si f est un élément de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on a $p(f) = g$ où

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}. \end{array}$$

4.7.2. Autres exemples

1. La **dérivation**. Soient $E = \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables avec f' continue et $F = \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues. Soit
$$\begin{array}{rcl} d : \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$$
Alors d est une application linéaire, car $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$ et donc $d(\lambda f + \mu g) = \lambda d(f) + \mu d(g)$.
2. L'**intégration**. Soient $E = \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $F = \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Soit
$$\begin{array}{rcl} I : \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f(x) & \longmapsto & \int_0^x f(t)\,dt \end{array}$$

L'application I est linéaire car $\int_0^x \big(\lambda f(t) + \mu g(t)\big)\, dt = \lambda \int_0^x f(t)\, dt + \mu \int_0^x g(t)\, dt$ pour toutes fonctions f et g et pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

3. Avec les **polynômes**.

   Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leqslant n$. Soit $F = \mathbb{R}_{n+1}[X]$ et soit

$$\begin{array}{rccc} f : & E & \longrightarrow & F \\ & P(X) & \longmapsto & XP(X) \end{array}$$

   Autrement dit, si $P(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$, alors $f(P(X)) = a_n X^{n+1} + \cdots + a_1 X^2 + a_0 X$.

   C'est une application linéaire : $f(\lambda P(X) + \mu Q(X)) = \lambda X P(X) + \mu X Q(X) = \lambda f(P(X)) + \mu f(Q(X))$.

4. La **transposition**.

   Considérons l'application T de $M_n(\mathbb{K})$ dans $M_n(\mathbb{K})$ donnée par la transposition :

$$\begin{array}{rcl} T : M_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & A^T \end{array}$$

   T est linéaire, car on sait que pour toutes matrices $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ et tous scalaires $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

$$(\lambda A + \mu B)^T = (\lambda A)^T + (\mu B)^T = \lambda A^T + \mu B^T.$$

5. La **trace**.

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{tr} : M_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ A & \longmapsto & \mathrm{tr}\, A \end{array}$$

   est une application linéaire car $\mathrm{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda\, \mathrm{tr}\, A + \mu\, \mathrm{tr}\, B$.

Mini-exercices.

1. Les applications suivantes sont-elles linéaires ?
   (a) $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto 3x - 2$
   (b) $\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y, x', y') \longmapsto x \cdot x' + y \cdot y'$
   (c) $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f \longmapsto f(1)$
   (d) $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad f \longmapsto f' + f$
   (e) $\mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f \longmapsto \int_0^1 |f(t)|\, dt$

(f) $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f \longmapsto \max_{x\in[0,1]} f(x)$

(g) $\mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X], \quad P(X) \longmapsto P(X+1) - P(0)$

2. Soient $f, g : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$ définies par $A \longmapsto \frac{A+A^T}{2}$ et $A \longmapsto \frac{A-A^T}{2}$. Montrer que f et g sont des applications linéaires. Montrer que $f(A)$ est une matrice symétrique, $g(A)$ une matrice antisymétrique et que $A = f(A) + g(A)$. En déduire que les matrices symétriques et les matrices antisymétriques sont en somme directe dans $M_n(\mathbb{R})$. Caractériser géométriquement f et g.

4.8. Application linéaire (fin)

4.8.1. Image d'une application linéaire

Commençons par des rappels. Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F. Soit A un sous-ensemble de E. L'ensemble des images par f des éléments de A, appelé **image directe** de A par f, est noté $f(A)$. C'est un sous-ensemble de F. On a par définition :

$$f(A) = \big\{f(x) \mid x \in A\big\}.$$

Dans toute la suite, E et F désigneront des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$ sera une application linéaire.

$f(E)$ s'appelle l'**image** de l'application linéaire f et est noté $\operatorname{Im} f$.

Proposition 8 (Structure de l'image d'un sous-espace vectoriel)**.**

1. *Si E' est un sous-espace vectoriel de E, alors $f(E')$ est un sous-espace vectoriel de F.*
2. *En particulier,* $\operatorname{Im} f$ *est un sous-espace vectoriel de F.*

Remarque.

On a par définition de l'image directe $f(E)$:

$$f \text{ est surjective si et seulement si } \operatorname{Im} f = F.$$

Démonstration. Tout d'abord, comme $0_E \in E'$ alors $0_F = f(0_E) \in f(E')$. Ensuite on montre que pour tout couple (y_1, y_2) d'éléments de $f(E')$ et pour tous scalaires λ, μ, l'élément $\lambda y_1 + \mu y_2$ appartient à $f(E')$. En effet :

$$y_1 \in f(E') \iff \exists x_1 \in E', f(x_1) = y_1$$
$$y_2 \in f(E') \iff \exists x_2 \in E', f(x_2) = y_2.$$

Comme f est linéaire, on a

$$\lambda y_1 + \mu y_2 = \lambda f(x_1) + \mu f(x_2) = f(\lambda x_1 + \mu x_2).$$

Or $\lambda x_1 + \mu x_2$ est un élément de E', car E' est un sous-espace vectoriel de E, donc $\lambda y_1 + \mu y_2$ est bien un élément de $f(E')$.

□

4.8.2. Noyau d'une application linéaire

Définition 7 (Définition du noyau).
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. Le **noyau** de f, noté $\mathrm{Ker}(f)$, est l'ensemble des éléments de E dont l'image est 0_F :

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \left\{x \in E \mid f(x) = 0_F\right\}}$$

Autrement dit, le noyau est l'image réciproque du vecteur nul de l'espace d'arrivée : $\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}\{0_F\}$.

Proposition 9.
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. Le noyau de f est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. $\mathrm{Ker}(f)$ est non vide car $f(0_E) = 0_F$ donc $0_E \in \mathrm{Ker}(f)$. Soient $x_1, x_2 \in \mathrm{Ker}(f)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Montrons que $\lambda x_1 + \mu x_2$ est un élément de $\mathrm{Ker}(f)$. On a, en utilisant la linéarité de f et le fait que x_1 et x_2 sont des éléments de $\mathrm{Ker}(f)$: $f(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda f(x_1) + \mu f(x_2) = \lambda 0_F + \mu 0_F = 0_F$. □

Exemple 27.

Reprenons l'exemple de l'application linéaire f définie par

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (-2x, y+3z) \end{array}$$

- Calculons le noyau $\operatorname{Ker}(f)$.

$$\begin{aligned} (x,y,z) \in \operatorname{Ker}(f) & \iff f(x,y,z) = (0,0) \\ & \iff (-2x, y+3z) = (0,0) \\ & \iff \left\{ \begin{array}{rcl} -2x & = & 0 \\ y+3z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \iff (x,y,z) = (0,-3z,z), \quad z \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

  Donc $\operatorname{Ker}(f) = \{(0,-3z,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$. Autrement dit, $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}\{(0,-3,1)\}$: c'est une droite vectorielle.

- Calculons l'image de f. Fixons $(x',y') \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} (x',y') = f(x,y,z) & \iff (-2x, y+3z) = (x',y') \\ & \iff \left\{ \begin{array}{rcl} -2x & = & x' \\ y+3z & = & y' \end{array} \right. \end{aligned}$$

  On peut prendre par exemple $x = -\frac{x'}{2}$, $y' = y$, $z = 0$. Conclusion : pour n'importe quel $(x',y') \in \mathbb{R}^2$, on a $f(-\frac{x'}{2}, y', 0) = (x',y')$. Donc $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^2$, et f est surjective.

Exemple 28.

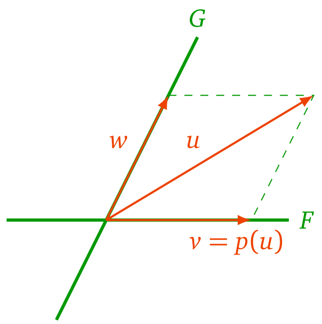
Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$. Soit $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ l'application linéaire définie par $f(X) = AX$. Alors $\operatorname{Ker}(f) = \{X \in \mathbb{R}^p \mid AX = 0\}$: c'est donc l'ensemble des $X \in \mathbb{R}^p$ solutions du système linéaire homogène $AX = 0$. On verra plus tard que $\operatorname{Im}(f)$ est l'espace engendré par les colonnes de la matrice A.

Le noyau fournit une nouvelle façon d'obtenir des sous-espaces vectoriels.

Exemple 29.

Un plan $\mathscr{P}$ passant par l'origine, d'équation $(ax+by+cz=0)$, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. En effet, soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x,y,z) = ax+by+cz$. Il est facile de vérifier que f est linéaire, de sorte que $\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax+by+cz=0\} = \mathscr{P}$ est un sous-espace vectoriel.

Exemple 30.
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E, supplémentaires : $E = F \oplus G$. Soit p la projection sur F parallèlement à G. Déterminons le noyau et l'image de p.



Un vecteur u de E s'écrit d'une manière unique $u = v + w$ avec $v \in F$ et $w \in G$ et par définition $p(u) = v$.

- $\mathrm{Ker}(p) = G$: le noyau de p est l'ensemble des vecteurs u de E tels que $v = 0$, c'est donc G.
- $\mathrm{Im}(p) = F$. Il est immédiat que $\mathrm{Im}(p) \subset F$. Réciproquement, si $u \in F$ alors $p(u) = u$, donc $F \subset \mathrm{Im}(p)$.

Conclusion :

$$\mathrm{Ker}(p) = G \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(p) = F.$$

Théorème 5 (Caractérisation des applications linéaires injectives)**.**
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. Alors :

$$\boxed{f \text{ injective} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}}$$

Autrement dit, f est injective si et seulement si son noyau ne contient que le vecteur nul. En particulier, pour montrer que f est injective, il suffit de vérifier que :

$$\text{si } f(x) = 0_F \text{ alors } x = 0_E.$$

Démonstration.

- Supposons que f soit injective et montrons que $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$. Soit x un élément de $\mathrm{Ker}(f)$. On a $f(x) = 0_F$. Or, comme f est linéaire, on a aussi $f(0_E) = 0_F$. De l'égalité $f(x) = f(0_E)$, on déduit $x = 0_E$ car f est injective. Donc $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.
- Réciproquement, supposons maintenant que $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$. Soient x et y deux éléments de E tels que $f(x) = f(y)$. On a donc $f(x) - f(y) = 0_F$. Comme f est linéaire, on en déduit $f(x - y) = 0_F$, c'est-à-dire $x - y$ est un élément de $\mathrm{Ker}(f)$. Donc $x - y = 0_E$, soit $x = y$.

□

Exemple 31.
Considérons, pour $n \geqslant 1$, l'application linéaire

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_{n+1}[X] \\ P(X) &\longmapsto X \cdot P(X). \end{aligned}$$

Étudions d'abord le noyau de f : soit $P(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $X \cdot P(X) = 0$. Alors

$$a_n X^{n+1} + \cdots + a_1 X^2 + a_0 X = 0.$$

Ainsi, $a_i = 0$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$ et donc $P(X) = 0$. Le noyau de f est donc nul : $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.
L'espace $\mathrm{Im}(f)$ est l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ sans terme constant : $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left\{X, X^2, \ldots, X^{n+1}\right\}$.
Conclusion : f est injective, mais n'est pas surjective.

4.8.3. L'espace vectoriel $\mathscr{L}(E, F)$

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Remarquons tout d'abord que, similairement à l'exemple 4, l'ensemble des applications de E dans F, noté $\mathscr{F}(E, F)$, peut être muni d'une loi de composition interne $+$ et d'une loi de composition externe, définies de la façon suivante : f, g étant deux éléments de $\mathscr{F}(E, F)$, et λ étant un élément de $\mathbb{K}$, pour tout vecteur u de E,

$$(f + g)(u) = f(u) + g(u) \qquad \text{et} \qquad (\lambda \cdot f)(u) = \lambda f(u).$$

Proposition 10.
L'ensemble des applications linéaires entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F, noté $\mathcal{L}(E,F)$, muni des deux lois définies précédemment, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Démonstration. L'ensemble $\mathcal{L}(E,F)$ est inclus dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(E,F)$. Pour montrer que $\mathcal{L}(E,F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, il suffit donc de montrer que $\mathcal{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E,F)$:

- Tout d'abord, l'application nulle appartient à $\mathcal{L}(E,F)$.
- Soient $f,g \in \mathcal{L}(E,F)$, et montrons que $f+g$ est linéaire. Pour tous vecteurs u et v de E et pour tous scalaires α, β de $\mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}
(f+g)(\alpha u+\beta v) &= f(\alpha u+\beta v)+g(\alpha u+\beta v) && \text{(définition de } f+g\text{)}\\
&= \alpha f(u)+\beta f(v)+\alpha g(u)+\beta g(v) && \text{(linéarité de } f \text{ et de } g\text{)}\\
&= \alpha\left(f(u)+g(u)\right)+\beta\left(f(v)+g(v)\right) && \text{(propriétés des lois de } F\text{)}\\
&= \alpha(f+g)(u)+\beta(f+g)(v) && \text{(définition de } f+g\text{)}
\end{aligned}$$

  $f+g$ est donc linéaire et $\mathcal{L}(E,F)$ est stable pour l'addition.
- Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $\lambda \in \mathbb{K}$, et montrons que λf est linéaire.

$$\begin{aligned}
(\lambda f)(\alpha u+\beta v) &= \lambda f(\alpha u+\beta v) && \text{(définition de } \lambda f\text{)}\\
&= \lambda\left(\alpha f(u)+\beta f(v)\right) && \text{(linéarité de } f\text{)}\\
&= \alpha\lambda f(u)+\beta\lambda f(v) && \text{(propriétés des lois de } F\text{)}\\
&= \alpha(\lambda f)(u)+\beta(\lambda f)(v) && \text{(définition de } \lambda f\text{)}
\end{aligned}$$

  λf est donc linéaire et $\mathcal{L}(E,F)$ est stable pour la loi externe.

$\mathcal{L}(E,F)$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E,F)$. □

En particulier, $\mathcal{L}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E,E)$.

4.8.4. Composition et inverse d'applications linéaires

Proposition 11 (Composée de deux applications linéaires)**.**
Soient E,F,G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, f une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G. Alors $g\circ f$ est une application linéaire de E dans G.

Remarque.
En particulier, le composé de deux endomorphismes de E est un endomorphisme de E. Autrement dit, $\circ$ est une loi de composition interne sur $\mathscr{L}(E)$.

Démonstration. Soient u et v deux vecteurs de E, et α et β deux éléments de $\mathbb{K}$. Alors :

$$\begin{array}{rcll}
(g \circ f)(\alpha u + \beta v) & = & g(f(\alpha u + \beta v)) & \text{(définition de } g \circ f\text{)} \\
 & = & g(\alpha f(u) + \beta f(v)) & \text{(linéarité de } f\text{)} \\
 & = & \alpha g(f(u)) + \beta g(f(v)) & \text{(linéarité de } g\text{)} \\
 & = & \alpha (g \circ f)(u) + \beta (g \circ f)(v) & \text{(définition de } g \circ f\text{)}
\end{array}$$

□

La composition des applications linéaires se comporte bien :

$$g \circ (f_1 + f_2) = g \circ f_1 + g \circ f_2 \quad (g_1 + g_2) \circ f = g_1 \circ f + g_2 \circ f \quad (\lambda g) \circ f = g \circ (\lambda f) = \lambda (g \circ f)$$

Vocabulaire.
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

- Une application linéaire ***bijective*** de E sur F est appelée **isomorphisme** d'espaces vectoriels. Les deux espaces vectoriels E et F sont alors dits **isomorphes**.
- Un endomorphisme bijectif de E (c'est-à-dire une application linéaire bijective de E dans E) est appelé **automorphisme** de E. L'ensemble des automorphismes de E est noté $GL(E)$.

Proposition 12 (Linéarité de l'application réciproque d'un isomorphisme).
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Si f est un isomorphisme de E sur F, alors f^{-1} est un isomorphisme de F sur E.

Démonstration. Comme f est une application bijective de E sur F, alors f^{-1} est une application bijective de F sur E. Il reste donc à prouver que f^{-1} est bien linéaire. Soient u' et v' deux vecteurs de F et soient α et β deux éléments de $\mathbb{K}$. On pose $f^{-1}(u') = u$ et $f^{-1}(v') = v$, et on a alors $f(u) = u'$ et $f(v) = v'$. Comme f est linéaire, on a

$$f^{-1}(\alpha u' + \beta v') = f^{-1}(\alpha f(u) + \beta f(v)) = f^{-1}(f(\alpha u + \beta v)) = \alpha u + \beta v$$

car $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$ (où id_E désigne l'application identité de E dans E). Ainsi

$$f^{-1}(\alpha u' + \beta v') = \alpha f^{-1}(u') + \beta f^{-1}(v'),$$

et f^{-1} est donc linéaire. □

Exemple 32.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (2x+3y, x+y)$. Il est facile de prouver que f est linéaire. Pour prouver que f est bijective, on pourrait calculer son noyau et son image. Mais ici nous allons calculer directement son inverse : on cherche à résoudre $f(x,y) = (x',y')$. Cela correspond à l'équation $(2x+3y, x+y) = (x',y')$ qui est un système linéaire à deux équations et deux inconnues. On trouve $(x,y) = (-x'+3y', x'-2y')$. On pose donc $f^{-1}(x',y') = (-x'+3y', x'-2y')$. On vérifie aisément que f^{-1} est l'inverse de f, et on remarque que f^{-1} est une application linéaire.

Exemple 33.
Plus généralement, soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'application linéaire définie par $f(X) = AX$ (où A est une matrice de $M_n(\mathbb{R})$). Si la matrice A est inversible, alors f^{-1} est une application linéaire bijective et est définie par $f^{-1}(X) = A^{-1}X$.
Dans l'exemple précédent,

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Mini-exercices.

1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (-x, y+z, 2z)$. Montrer que f est une application linéaire. Calculer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$. f admet-elle un inverse ? Même question avec $f(x,y,z) = (x-y, x+y, y)$.
2. Soient E un espace vectoriel, et F,G deux sous-espaces tels que $E = F \oplus G$. Chaque $u \in E$ se décompose de manière unique $u = v + w$ avec $v \in F$, $w \in G$. La **symétrie** par rapport à F parallèlement à G est l'application $s : E \to E$ définie par $s(u) = v - w$. Faire un dessin. Montrer que s est une application linéaire. Montrer que $s^2 = \mathrm{id}_E$. Calculer $\mathrm{Ker}(s)$ et $\mathrm{Im}(s)$. s admet-elle un inverse ?
3. Soit $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ définie par $P(X) \mapsto P''(X)$ (où P'' désigne la

dérivée seconde). Montrer que f est une application linéaire. Calculer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$. f admet-elle un inverse ?

Chapitre 5

Dimension finie

Les espaces vectoriels qui sont engendrés par un nombre fini de vecteurs sont appelés espaces vectoriels de dimension finie. Pour ces espaces, nous allons voir comment calculer une base, c'est-à-dire une famille minimale de vecteurs qui engendrent tout l'espace. Le nombre de vecteurs dans une base s'appelle la dimension et nous verrons comment calculer la dimension des espaces et des sous-espaces.

5.1. Famille libre

5.1.1. Combinaison linéaire (rappel)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 1.
Soient $v_1, v_2, \dots, v_p$, $p \geqslant 1$ vecteurs d'un espace vectoriel E. Tout vecteur de la forme

$$u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_p v_p$$

(où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ sont des éléments de $\mathbb{K}$) est appelé **combinaison linéaire** des vecteurs $v_1, v_2, \dots, v_p$. Les scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ sont appelés **coefficients** de la combinaison linéaire.

5.1.2. Définition

Définition 2.
Une famille $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ de E est une **famille libre** ou **linéairement indépendante** si toute combinaison linéaire nulle

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_p v_p = 0$$

est telle que tous ses coefficients sont nuls, c'est-à-dire

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \dots \quad \lambda_p = 0.$$

Dans le cas contraire, c'est-à-dire s'il existe une combinaison linéaire nulle à coefficients non tous nuls, on dit que la famille est **liée** ou **linéairement dépendante**. Une telle combinaison linéaire s'appelle alors une **relation de dépendance linéaire** entre les v_j.

5.1.3. Premiers exemples

Pour des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, décider si une famille $\{v_1, \dots, v_p\}$ est libre ou liée revient à résoudre un système linéaire.

Exemple 1.
Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, considérons la famille

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

On souhaite déterminer si elle est libre ou liée. On cherche des scalaires $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ tels que

$$\lambda_1 \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) + \lambda_2 \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{smallmatrix}\right) + \lambda_3 \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$$

ce qui équivaut au système :

$$\begin{cases} \lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 5\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + 6\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

On calcule (voir un peu plus bas) que ce système est équivalent à :

$$\begin{cases} \lambda_1 & & - & 2\lambda_3 & = & 0 \\ & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{cases}$$

Ce système a une infinité de solutions et en prenant par exemple $\lambda_3 = 1$ on obtient $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = -1$, ce qui fait que

$$2\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

La famille

$$\left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \right\}$$

est donc une famille liée.

Voici les calculs de la réduction de Gauss sur la matrice associée au système :

$$\begin{pmatrix}1&4&2\\2&5&1\\3&6&0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&4&2\\0&-3&-3\\0&-6&-6\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&4&2\\0&-3&-3\\0&0&0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&4&2\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Exemple 2.

Soient $v_1 = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$, $v_2 = \left(\begin{smallmatrix}2\\-1\\0\end{smallmatrix}\right)$, $v_3 = \left(\begin{smallmatrix}2\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$. Est-ce que la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre ou liée ? Résolvons le système linéaire correspondant à l'équation $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$:

$$\begin{cases} \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \end{cases}$$

On résout ce système et on trouve comme seule solution $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$. La famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est donc une famille libre.

Exemple 3.

Soient $v_1 = \left(\begin{smallmatrix}2\\-1\\0\\3\end{smallmatrix}\right)$, $v_2 = \left(\begin{smallmatrix}1\\2\\5\\-1\end{smallmatrix}\right)$ et $v_3 = \left(\begin{smallmatrix}7\\-1\\5\\8\end{smallmatrix}\right)$. Alors $\{v_1, v_2, v_3\}$ forme une famille liée, car

$$3v_1 + v_2 - v_3 = 0.$$

5.1.4. Autres exemples

Exemple 4.
Les polynômes $P_1(X) = 1 - X$, $P_2(X) = 5 + 3X - 2X^2$ et $P_3(X) = 1 + 3X - X^2$ forment une famille liée dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$, car

$$3P_1(X) - P_2(X) + 2P_3(X) = 0.$$

Exemple 5.
Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on considère la famille $\{\cos,\sin\}$. Montrons que c'est une famille libre. Supposons que l'on ait $\lambda\cos + \mu\sin = 0$. Cela équivaut à

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \lambda\cos(x) + \mu\sin(x) = 0.$$

En particulier, pour $x = 0$, cette égalité donne $\lambda = 0$. Et pour $x = \frac{\pi}{2}$, elle donne $\mu = 0$. Donc la famille $\{\cos,\sin\}$ est libre. En revanche la famille $\{\cos^2,\sin^2,1\}$ est liée car on a la relation de dépendance linéaire $\cos^2 + \sin^2 - 1 = 0$. Les coefficients de dépendance linéaire sont $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$.

5.1.5. Famille liée

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Si $v \neq 0$, la famille à un seul vecteur $\{v\}$ est libre (et liée si $v = 0$). Considérons le cas particulier d'une famille de deux vecteurs.

> **Proposition 1.**
> *La famille $\{v_1, v_2\}$ est liée si et seulement si v_1 est un multiple de v_2 ou v_2 est un multiple de v_1.*

Ce qui se reformule ainsi par contraposition : « La famille $\{v_1, v_2\}$ est libre si et seulement si v_1 n'est pas un multiple de v_2 et v_2 n'est pas un multiple de v_1. »

Démonstration.

- Supposons la famille $\{v_1, v_2\}$ liée, alors il existe λ_1, λ_2 non tous les deux nuls tels que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0$. Si c'est λ_1 qui n'est pas nul, on peut diviser par λ_1, ce qui donne $v_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2$ et v_1 est un multiple de v_2. Si c'est λ_2 qui n'est pas nul, alors de même v_2 est un multiple de v_1.

- Réciproquement, si v_1 est un multiple de v_2, alors il existe un scalaire μ tel que $v_1 = \mu v_2$, soit $1v_1 + (-\mu)v_2 = 0$, ce qui est une relation de dépendance linéaire entre v_1 et v_2 puisque $1 \neq 0$: la famille $\{v_1, v_2\}$ est alors liée. Même conclusion si c'est v_2 qui est un multiple de v_1.

□

Généralisons tout de suite cette proposition à une famille d'un nombre quelconque de vecteurs.

Théorème 1.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une famille $\mathscr{F} = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ de $p \geqslant 2$ vecteurs de E est une famille liée si et seulement si au moins un des vecteurs de $\mathscr{F}$ est combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathscr{F}$.

Démonstration. C'est essentiellement la même démonstration que ci-dessus.

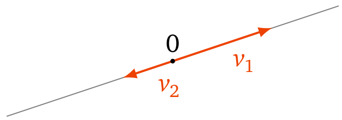
- Supposons d'abord $\mathscr{F}$ liée. Il existe donc une relation de dépendance linéaire
$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_p v_p = 0,$$
avec $\lambda_k \neq 0$ pour au moins un indice k. Passons tous les autres termes à droite du signe égal. Il vient
$$\lambda_k v_k = -\lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2 - \cdots - \lambda_p v_p,$$
où v_k ne figure pas au second membre. Comme $\lambda_k \neq 0$, on peut diviser cette égalité par λ_k et l'on obtient
$$v_k = -\frac{\lambda_1}{\lambda_k} v_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_k} v_2 - \cdots - \frac{\lambda_p}{\lambda_k} v_p,$$
c'est-à-dire que v_k est combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathscr{F}$, ce qui peut encore s'écrire $v_k \in \mathrm{Vect}\big(\mathscr{F} \setminus \{v_k\}\big)$ (avec la notation ensembliste $A \setminus B$ pour l'ensemble des éléments de A qui n'appartiennent pas à B).
- Réciproquement, supposons que pour un certain k, on ait $v_k \in \mathrm{Vect}\big(\mathscr{F} \setminus \{v_k\}\big)$. Ceci signifie que l'on peut écrire
$$v_k = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \cdots + \mu_p v_p,$$
où v_k ne figure pas au second membre. Passant v_k au second membre, il vient
$$0 = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \cdots - v_k + \cdots + \mu_p v_p,$$

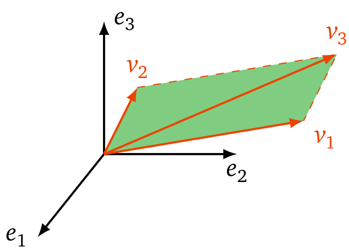
ce qui est une relation de dépendance linéaire pour $\mathscr{F}$ (puisque $-1 \neq 0$) et ainsi la famille $\mathscr{F}$ est liée.

□

5.1.6. Interprétation géométrique de la dépendance linéaire

- Dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, deux vecteurs sont linéairement dépendants si et seulement s'ils sont colinéaires. Ils sont donc sur une même droite vectorielle.
- Dans $\mathbb{R}^3$, trois vecteurs sont linéairement dépendants si et seulement s'ils sont coplanaires. Ils sont donc dans un même plan vectoriel.





Proposition 2.
Soit $\mathscr{F} = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Si $\mathscr{F}$ contient plus de n éléments (c'est-à-dire $p > n$), alors $\mathscr{F}$ est une famille liée.

Démonstration. Supposons que

$$v_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ \vdots \\ v_{n2} \end{pmatrix} \qquad \dots \qquad v_p = \begin{pmatrix} v_{1p} \\ v_{2p} \\ \vdots \\ v_{np} \end{pmatrix}.$$

L'équation

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_p v_p = 0$$

donne alors le système suivant

$$\begin{cases} v_{11}x_1 + v_{12}x_2 + \cdots + v_{1p}x_p & = & 0 \\ v_{21}x_1 + v_{22}x_2 + \cdots + v_{2p}x_p & = & 0 \\ \vdots & & \\ v_{n1}x_1 + v_{n2}x_2 + \cdots + v_{np}x_p & = & 0 \end{cases}$$

C'est un système homogène de n équations à p inconnues. Lorsque $p > n$, ce système a des solutions non triviales (voir le chapitre « Systèmes linéaires », dernier théorème) ce qui montre que la famille $\mathscr{F}$ est une famille liée. $\square$

Mini-exercices.

1. Pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$, $\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t^2 \\ -t \end{pmatrix}\right\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^2$? Même question avec la famille $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que toute famille contenant une famille liée est liée.
3. Montrer que toute famille inclue dans une famille libre est libre.
4. Montrer que si $f : E \to F$ est une application linéaire et que $\{v_1, \ldots, v_p\}$ est une famille liée de E, alors $\{f(v_1), \ldots, f(v_p)\}$ est une famille liée de F.
5. Montrer que si $f : E \to F$ est une application linéaire *injective* et que $\{v_1, \ldots, v_p\}$ est une famille libre de E, alors $\{f(v_1), \ldots, f(v_p)\}$ est une famille libre de F.

5.2. Famille génératrice

Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$.

5.2.1. Définition

Définition 3.
Soient $v_1, \ldots, v_p$ des vecteurs de E. La famille $\{v_1, \ldots, v_p\}$ est une **famille génératrice** de l'espace vectoriel E si tout vecteur de E est une combinaison linéaire des vecteurs $v_1, \ldots, v_p$.

> Ce qui peut s'écrire aussi :
> $$\forall v \in E \qquad \exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K} \qquad v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p$$

On dit aussi que la famille $\{v_1, \dots, v_p\}$ **engendre** l'espace vectoriel E.

Cette notion est bien sûr liée à la notion de sous-espace vectoriel engendré : les vecteurs $\{v_1, \dots, v_p\}$ forment une famille génératrice de E si et seulement si $E = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_p)$.

5.2.2. Exemples

Exemple 6.
Considérons par exemple les vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ de $E = \mathbb{R}^3$. La famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est génératrice car tout vecteur $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ peut s'écrire

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les coefficients sont ici $\lambda_1 = x$, $\lambda_2 = y$, $\lambda_3 = z$.

Exemple 7.
Soient maintenant les vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ de $E = \mathbb{R}^3$. Les vecteurs $\{v_1, v_2\}$ *ne forment pas* une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$. Par exemple, le vecteur $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ n'est pas dans $\mathrm{Vect}(v_1, v_2)$. En effet, si c'était le cas, alors il existerait $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$. Ce qui s'écrirait aussi $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, d'où le système linéaire :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 & = & 1 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 & = & 0 \end{cases}$$

Ce système n'a pas de solution. (La première et la dernière ligne impliquent $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$, ce qui est incompatible avec la deuxième.)

Exemple 8.
Soit $E = \mathbb{R}^2$.

- Soient $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. La famille $\{v_1, v_2\}$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$ car tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ se décompose comme $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Soient maintenant $v_1' = \binom{2}{1}$ et $v_2' = \binom{1}{1}$. Alors $\{v_1', v_2'\}$ est aussi une famille génératrice. En effet, soit $v = \binom{x}{y}$ un élément quelconque de $\mathbb{R}^2$. Montrer que v est combinaison linéaire de v_1' et v_2' revient à démontrer l'existence de deux réels λ et μ tels que $v = \lambda v_1' + \mu v_2'$. Il s'agit donc d'étudier l'existence de solutions au système :
$$\begin{cases} 2\lambda + \mu &= x \\ \lambda + \mu &= y \end{cases}$$
Il a pour solution $\lambda = x - y$ et $\mu = -x + 2y$, et ceci, quels que soient les réels x et y.

Ceci prouve qu'il peut exister plusieurs familles finies différentes, non incluses les unes dans les autres, engendrant le même espace vectoriel.

Exemple 9.
Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leqslant n$. Alors les polynômes $\{1, X, \dots, X^n\}$ forment une famille génératrice. Par contre, l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ de tous les polynômes ne possède pas de famille finie génératrice.

5.2.3. Liens entre familles génératrices

La proposition suivante est souvent utile :

Proposition 3.
Soit $\mathscr{F} = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ une famille génératrice de E. Alors $\mathscr{F}' = \{v_1', v_2', \dots, v_q'\}$ est aussi une famille génératrice de E si et seulement si tout vecteur de $\mathscr{F}$ est une combinaison linéaire de vecteurs de $\mathscr{F}'$.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la définition de $\operatorname{Vect}\mathscr{F}$ et de $\operatorname{Vect}\mathscr{F}'$. □

Nous chercherons bientôt à avoir un nombre minimal de générateurs. Voici une proposition sur la réduction d'une famille génératrice.

Proposition 4.
Si la famille de vecteurs $\{v_1, \dots, v_p\}$ engendre E et si l'un des vecteurs, par exemple v_p, est combinaison linéaire des autres, alors la famille $\{v_1, \dots, v_p\} \setminus \{v_p\} =$

$\{v_1, \ldots, v_{p-1}\}$ *est encore une famille génératrice de* E.

Démonstration. En effet, comme les vecteurs $v_1, \ldots, v_p$ engendrent E, alors pour tout élément v de E, il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tels que

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p.$$

Or l'hypothèse v_p est combinaison linéaire des vecteurs $v_1, \ldots, v_{p-1}$ se traduit par l'existence de scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}$ tels que

$$v_p = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{p-1} v_{p-1}.$$

Alors, le vecteur v s'écrit :

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{p-1} v_{p-1} + \lambda_p \big(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{p-1} v_{p-1}\big).$$

Donc

$$v = \big(\lambda_1 + \lambda_p \alpha_1\big) v_1 + \cdots + \big(\lambda_{p-1} + \lambda_p \alpha_{p-1}\big) v_{p-1},$$

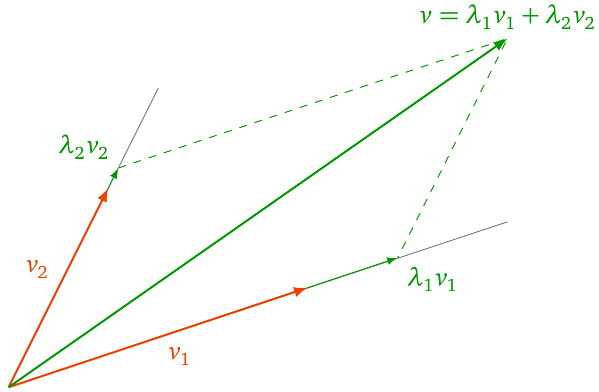
ce qui prouve que v est combinaison linéaire des vecteurs $v_1, \ldots, v_{p-1}$. Ceci achève la démonstration. Il est clair que si l'on remplace v_p par n'importe lequel des vecteurs v_i, la démonstration est la même. □

Mini-exercices.

1. À quelle condition sur $t \in \mathbb{R}$, la famille $\left\{\begin{pmatrix}0\\t-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}t\\-t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t^2-t\\t-1\end{pmatrix}\right\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$?
2. Même question avec la famille $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\t\\t^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\t^2\\1\end{pmatrix}\right\}$ de $\mathbb{R}^3$.
3. Montrer qu'une famille de vecteurs contenant une famille génératrice est encore une famille génératrice de E.
4. Montrer que si $f : E \to F$ est une application linéaire *surjective* et que $\{v_1, \ldots, v_p\}$ est une famille génératrice de E , alors $\{f(v_1), \ldots, f(v_p)\}$ est une famille génératrice de F.

5.3. Base

La notion de base généralise la notion de repère. Dans $\mathbb{R}^2$, un repère est donné par un couple de vecteurs non colinéaires. Dans $\mathbb{R}^3$, un repère est donné par un triplet de vecteurs non coplanaires. Dans un repère, un vecteur se décompose suivant les vecteurs d'une base. Il en sera de même pour une base d'un espace vectoriel.



5.3.1. Définition

Définition 4 (Base d'un espace vectoriel)**.**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une famille $\mathscr{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ de vecteurs de E est une **base** de E si $\mathscr{B}$ est une famille libre ***et*** génératrice.

Théorème 2.
Soit $\mathscr{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ une base de l'espace vectoriel E. Tout vecteur $v \in E$ s'exprime de façon unique comme combinaison linéaire d'éléments de $\mathscr{B}$. Autrement dit, il **existe** *des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$* **uniques** *tels que :*

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n.$$

Remarque.

1. $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ s'appellent les **coordonnées** du vecteur v dans la base $\mathscr{B}$.
2. Il faut observer que pour une base $\mathscr{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ on introduit un ***ordre*** sur les vecteurs. Bien sûr, si on permutait les vecteurs on obtiendrait

toujours une base, mais il faudrait aussi permuter les coordonnées.

3. Notez que l'application

$$\begin{array}{rcl} \phi & : & \mathbb{K}^n & \to & E \\ (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) & \mapsto & \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n \end{array}$$

est un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ vers l'espace vectoriel E.

Preuve du théorème 2.

- Par définition, $\mathscr{B}$ est une famille génératrice de E, donc pour tout $v \in E$ il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n.$$

  Cela prouve la partie existence.

- Il reste à montrer l'unicité des $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Soient $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \in \mathbb{K}$ d'autres scalaires tels que $v = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \cdots + \mu_n v_n$. Alors, par différence on a : $(\lambda_1 - \mu_1)v_1 + (\lambda_2 - \mu_2)v_2 + \cdots + (\lambda_n - \mu_n)v_n = 0$. Comme $\mathscr{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ est une famille libre, ceci implique $\lambda_1 - \mu_1 = 0, \quad \lambda_2 - \mu_2 = 0, \quad \dots, \quad \lambda_n - \mu_n = 0$ et donc $\lambda_1 = \mu_1, \quad \lambda_2 = \mu_2, \quad \dots, \lambda_n = \mu_n$.

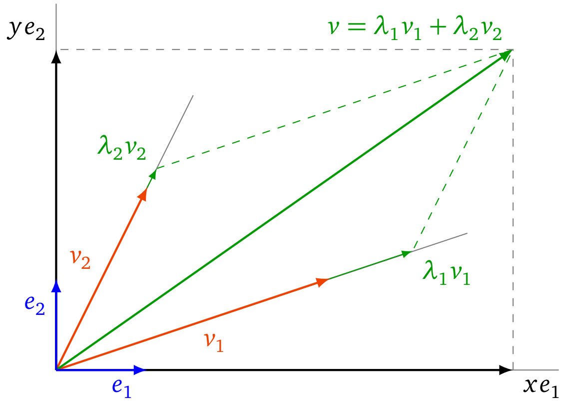
$\square$

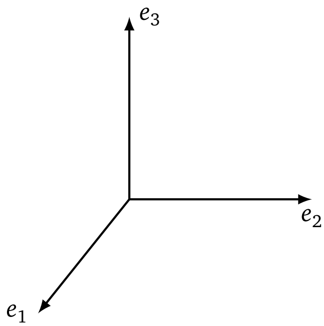
5.3.2. Exemples

Exemple 10.

1. Soient les vecteurs $e_1 = \binom{1}{0}$ et $e_2 = \binom{0}{1}$. Alors (e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^2$, appelée **base canonique** de $\mathbb{R}^2$.

2. Soient les vecteurs $v_1 = \binom{3}{1}$ et $v_2 = \binom{1}{2}$. Alors (v_1, v_2) forment aussi une base de $\mathbb{R}^2$.





3. De même dans $\mathbb{R}^3$, si $e_1 = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$, $e_2 = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$, $e_3 = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$, alors (e_1, e_2, e_3) forment la **base canonique** de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 11.
Soient $v_1 = \left(\begin{smallmatrix}1\\2\\1\end{smallmatrix}\right)$, $v_2 = \left(\begin{smallmatrix}2\\9\\0\end{smallmatrix}\right)$ et $v_3 = \left(\begin{smallmatrix}3\\3\\4\end{smallmatrix}\right)$. Montrons que la famille $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Dans les deux premiers points, nous ramenons le problème à l'étude d'un système linéaire.

1. Montrons d'abord que $\mathscr{B}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$. Soit $v = \left(\begin{smallmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{smallmatrix}\right)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$. On cherche $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3.$$

Ceci se reformule comme suit :

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 \\ 2\lambda_1 + 9\lambda_2 + 3\lambda_3 \\ \lambda_1 + 4\lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Ceci conduit au système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & 3\lambda_3 & = & a_1 \\ 2\lambda_1 & + & 9\lambda_2 & + & 3\lambda_3 & = & a_2 \\ \lambda_1 & & & + & 4\lambda_3 & = & a_3. \end{array}\right. \tag{S}$$

Il nous restera à montrer que ce système a une solution $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

2. Pour montrer que $\mathcal{B}$ est une famille libre, il faut montrer que l'unique solution de

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$$

est

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Ceci équivaut à montrer que le système

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & 3\lambda_3 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & + & 9\lambda_2 & + & 3\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & + & 4\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \tag{S'}$$

a une unique solution

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

3. Nous pouvons maintenant répondre à la question sans explicitement résoudre les systèmes.

   Remarquons que les deux systèmes ont la même matrice de coefficients. On peut donc montrer simultanément que $\mathcal{B}$ est une famille génératrice et une famille libre de $\mathbb{R}^3$ en montrant que la matrice des coefficients est inversible. En effet, si la matrice des coefficients est inversible, alors (S) admet une solution $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ quel que soit (a_1, a_2, a_3) et d'autre part (S') admet la seule solution $(0, 0, 0)$.

   Cette matrice est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

   Pour montrer qu'elle est inversible, on peut calculer son inverse ou seulement son déterminant qui vaut $\det A = -1$ (le déterminant étant non nul la matrice est inversible).

   Conclusion : $\mathcal{B}$ est une famille libre et génératrice ; c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 12.
Les vecteurs de $\mathbb{K}^n$:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \ldots \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

forment une base de $\mathbb{K}^n$, appelée la **base canonique** de $\mathbb{K}^n$.

Remarque.
L'exemple 11 se généralise de la façon suivante. Pour montrer que n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ forment une base de $\mathbb{R}^n$, il suffit de montrer la chose suivante : la matrice A constituée des composantes de ces vecteurs (chaque vecteur formant une colonne de A) est inversible.

Application : montrer que les vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \ldots \qquad v_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$$

forment aussi une base de $\mathbb{R}^n$.

Voici quelques autres exemples :

Exemple 13.

1. La base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est $\mathscr{B} = (1, X, X^2, \ldots, X^n)$. Attention, il y a $n+1$ vecteurs !
2. Voici une autre base de $\mathbb{R}_n[X]$: $(1, 1+X, 1+X+X^2, \ldots, 1+X+X^2+\cdots+X^n)$.
3. L'espace vectoriel $M_2(\mathbb{R})$ des matrices 2×2 admet une base formée des vecteurs :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En effet, n'importe quelle matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $M_2(\mathbb{R})$ se décompose de manière unique en

$$M = aM_1 + bM_2 + cM_3 + dM_4.$$

4. C'est un bon exercice de prouver que les quatre matrices suivantes forment aussi une base de $M_2(\mathbb{R})$:

$$M_1' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_2' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_3' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_4' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

5.3.3. Existence d'une base

Voyons maintenant un théorème d'existence d'une base finie. Dans la suite, les espaces vectoriels sont supposés non réduits à $\{0\}$.

> **Théorème 3** (Théorème d'existence d'une base)**.**
> *Tout espace vectoriel admettant une famille finie génératrice admet une base.*

5.3.4. Théorème de la base incomplète

Une version importante et plus générale de ce qui précède est le théorème suivant :

> **Théorème 4** (Théorème de la base incomplète)**.**
> *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel admettant une famille génératrice finie.*
>
> *1.* Toute famille libre $\mathscr{L}$ peut être complétée en une base. *C'est-à-dire qu'il existe une famille $\mathscr{F}$ telle que $\mathscr{L} \cup \mathscr{F}$ soit une famille libre et génératrice de E.*
>
> *2.* De toute famille génératrice $\mathscr{G}$ on peut extraire une base de E. *C'est-à-dire qu'il existe une famille $\mathscr{B} \subset \mathscr{G}$ telle que $\mathscr{B}$ soit une famille libre et génératrice de E.*

5.3.5. Preuves

Les deux théorèmes précédents sont la conséquence d'un résultat encore plus général :

> **Théorème 5.**
> *Soit $\mathscr{G}$ une famille génératrice finie de E et $\mathscr{L}$ une famille libre de E. Alors il existe une famille $\mathscr{F}$ de $\mathscr{G}$ telle que $\mathscr{L} \cup \mathscr{F}$ soit une base de E.*

Le théorème 4 de la base incomplète se déduit du théorème 5 ainsi :

1. On sait qu'il existe une famille génératrice de E : notons-la $\mathscr{G}$. On applique le théorème 5 avec ce $\mathscr{L}$ et ce $\mathscr{G}$.
2. On applique le théorème 5 avec $\mathscr{L} = \varnothing$ et la famille $\mathscr{G}$ de l'énoncé.

En particulier, le théorème 3 d'existence d'une base se démontre comme le point (2) ci-dessus avec $\mathscr{L} = \varnothing$ et $\mathscr{G}$ une famille génératrice de E.

5.3.6. Preuves (suite)

Nous avons : Théorème 5 $\implies$ Théorème 4 $\implies$ Théorème 3.
Il nous reste donc à prouver le théorème 5. La démonstration que nous en donnons est un algorithme.

Démonstration.

- Étape 0. Si $\mathscr{L}$ est une famille génératrice de E, on pose $\mathscr{F} = \varnothing$ et c'est fini puisque $\mathscr{L}$ est une famille génératrice et libre, donc une base. Sinon on passe à l'étape suivante.
- Étape 1. Comme $\mathscr{L}$ n'est pas une famille génératrice, alors il existe au moins un élément g_1 de $\mathscr{G}$ qui n'est pas combinaison linéaire des éléments de $\mathscr{L}$. (En effet, par l'absurde, si tous les éléments de $\mathscr{G}$ sont dans $\operatorname{Vect}\mathscr{L}$, alors $\mathscr{L}$ serait aussi une famille génératrice.) On pose $\mathscr{L}_1 = \mathscr{L} \cup \{g_1\}$. Alors la famille $\mathscr{L}_1$ vérifie les propriétés suivantes :
  (i) $\mathscr{L} \subsetneq \mathscr{L}_1 \subset E$: la famille $\mathscr{L}_1$ est strictement plus grande que $\mathscr{L}$.
  (ii) $\mathscr{L}_1$ est une famille libre. (En effet, si $\mathscr{L}_1$ n'était pas une famille libre, alors une combinaison linéaire nulle impliquerait que $g_1 \in \operatorname{Vect}\mathscr{L}$.)

  On recommence le même raisonnement à partir de $\mathscr{L}_1$: si $\mathscr{L}_1$ est une famille génératrice de E, alors on pose $\mathscr{F} = \{g_1\}$ et on s'arrête. Sinon on passe à l'étape suivante.
- Étape 2. Il existe au moins un élément g_2 de $\mathscr{G}$ qui n'est pas combinaison linéaire des éléments de $\mathscr{L}_1$. Alors la famille $\mathscr{L}_2 = \mathscr{L}_1 \cup \{g_2\} = \mathscr{L} \cup \{g_1, g_2\}$ est strictement plus grande que $\mathscr{L}_1$ et est encore une famille libre.

  Si $\mathscr{L}_2$ est une famille génératrice, on pose $\mathscr{F} = \{g_1, g_2\}$ et c'est fini. Sinon on passe à l'étape d'après.

- ...

L'algorithme consiste donc à construire une suite, strictement croissante pour l'inclusion, de familles libres, où, si $\mathscr{L}_{k-1}$ n'engendre pas E, alors $\mathscr{L}_k$ est construite partir de $\mathscr{L}_{k-1}$ en lui ajoutant un vecteur g_k de $\mathscr{G}$, de sorte que $\mathscr{L}_k = \mathscr{L}_{k-1} \cup \{g_k\}$ reste une famille libre.

- L'algorithme se termine. Comme la famille $\mathscr{G}$ est finie, le processus s'arrête en moins d'étapes qu'il y a d'éléments dans $\mathscr{G}$. Notez que, comme $\mathscr{G}$ est une famille génératrice, dans le pire des cas on peut être amené à prendre $\mathscr{F} = \mathscr{G}$.
- L'algorithme est correct. Lorsque l'algorithme s'arrête, disons à l'étape s : on a $\mathscr{L}_s = \mathscr{L} \cup \mathscr{F}$ où $\mathscr{F} = \{g_1, \ldots, g_s\}$. Par construction, $\mathscr{L}_s$ est une famille finie, libre et aussi génératrice (car c'est la condition d'arrêt). Donc $\mathscr{L} \cup \mathscr{F}$ est une base de E.

$\square$

Exemple 14.
Soit $\mathbb{R}[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes réels et E le sous-espace de $\mathbb{R}[X]$ engendré par la famille $\mathscr{G} = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$ définie par :

$$P_1(X) = 1 \qquad P_2(X) = X \qquad P_3(X) = X+1 \qquad P_4(X) = 1+X^3 \qquad P_5(X) = X-X^3$$

Partons de $\mathscr{L} = \varnothing$ et cherchons $\mathscr{F} \subset \mathscr{G}$ telle que $\mathscr{F}$ soit une base de E.

- Étape 0. Comme $\mathscr{L}$ n'est pas génératrice (vu que $\mathscr{L} = \varnothing$), on passe à l'étape suivante.
- Étape 1. On pose $\mathscr{L}_1 = \mathscr{L} \cup \{P_1\} = \{P_1\}$. Comme P_1 est non nul, $\mathscr{L}_1$ est une famille libre.
- Étape 2. Considérons P_2. Comme les éléments P_1 et P_2 sont linéairement indépendants, $\mathscr{L}_2 = \{P_1, P_2\}$ est une famille libre.
- Étape 3. Considérons P_3 : ce vecteur est combinaison linéaire des vecteurs P_1 et P_2 car $P_3(X) = X + 1 = P_1(X) + P_2(X)$ donc $\{P_1, P_2, P_3\}$ est une famille liée. Considérons alors P_4. Un calcul rapide prouve que les vecteurs P_1, P_2 et P_4 sont linéairement indépendants. Alors $\mathscr{L}_3 = \{P_1, P_2, P_4\}$ est une famille libre.

Il ne reste que le vecteur P_5 à considérer. Il s'agit, pour pouvoir conclure, d'étudier l'indépendance linéaire des vecteurs P_1, P_2, P_4, P_5. Or un calcul rapide montre l'égalité

$$P_1 + P_2 - P_4 - P_5 = 0,$$

ce qui prouve que la famille $\{P_1, P_2, P_4, P_5\}$ est liée. Donc avec les notations de l'algorithme, $s = 3$ et $\mathscr{L}_3 = \{P_1, P_2, P_4\}$ est une base de E.

Mini-exercices.

1. Trouver toutes les façons d'obtenir une base de $\mathbb{R}^2$ avec les vecteurs suivants : $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -3 \end{smallmatrix}\right)$, $v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$, $v_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $v_4 = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $v_5 = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 6 \end{smallmatrix}\right)$.
2. Montrer que la famille $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ des vecteurs $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{smallmatrix}\right)$, $v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$, $v_3 = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$, $v_4 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ est une famille génératrice du sous-espace vectoriel d'équation $2x - y + z = 0$ de $\mathbb{R}^3$. En extraire une base.
3. Déterminer une base du sous-espace vectoriel E_1 de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x + 3y - 2z = 0$. Compléter cette base en une base de $\mathbb{R}^3$. Idem avec E_2 vérifiant les deux équations $x + 3y - 2z = 0$ et $y = z$.
4. Donner une base de l'espace vectoriel des matrices 3×3 ayant une diagonale nulle. Idem avec l'espace vectoriel des polynômes $P \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $P(0) = 0$, $P'(0) = 0$.

5.4. Dimension d'un espace vectoriel

5.4.1. Définition

Définition 5.
Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E admettant une base ayant un nombre fini d'éléments est dit de **dimension finie**.

Par le théorème 3 d'existence d'une base, c'est équivalent à l'existence d'une famille finie génératrice.

On va pouvoir parler de ***la*** dimension d'un espace vectoriel grâce au théorème suivant :

> **Théorème 6** (Théorème de la dimension).
> *Toutes les bases d'un espace vectoriel E de dimension finie ont le même nombre d'éléments.*

Nous détaillerons la preuve un peu plus loin.

> **Définition 6.**
> La **dimension** d'un espace vectoriel de dimension finie E, notée $\dim E$, est par définition le nombre d'éléments d'une base de E.

Méthodologie. Pour déterminer la dimension d'un espace vectoriel, il suffit de trouver une base de E (une famille à la fois libre et génératrice) : le cardinal (nombre d'éléments) de cette famille donne la dimension de E. Le théorème 6 de la dimension prouve que même si on choisissait une base différente alors ces deux bases auraient le même nombre d'éléments.
Convention. On convient d'attribuer à l'espace vectoriel $\{0\}$ la dimension 0.

5.4.2. Exemples

Exemple 15.

1. La base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $\left(\binom{1}{0},\binom{0}{1}\right)$. La dimension de $\mathbb{R}^2$ est donc 2.
2. Les vecteurs $\left(\binom{2}{1},\binom{1}{1}\right)$ forment aussi une base de $\mathbb{R}^2$, et illustrent qu'une autre base contient le même nombre d'éléments.
3. Plus généralement, $\mathbb{K}^n$ est de dimension n, car par exemple sa base canonique $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ contient n éléments.
4. $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$ car une base de $\mathbb{R}_n[X]$ est $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$, qui contient $n+1$ éléments.

Exemple 16.
Les espaces vectoriels suivants ne sont pas de dimension finie :

- $\mathbb{R}[X]$: l'espace vectoriel de tous les polynômes,
- $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$: l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$,
- $\mathscr{S} = \mathscr{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$: l'espace vectoriel des suites réelles.

Exemple 17.
Nous avons vu que l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires ***homogène*** est un espace vectoriel. On considère par exemple le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & & & + & x_5 & = & 0 \\ -x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & & & - & x_5 & = & 0 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 0. \end{array}\right.$$

On vérifie que la solution générale de ce système est

$$x_1 = -s - t \qquad x_2 = s \qquad x_3 = -t \qquad x_4 = 0 \qquad x_5 = t\,.$$

Donc les vecteurs solutions s'écrivent sous la forme

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s-t \\ s \\ -t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s \\ s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ -t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ceci montre que les vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

engendrent l'espace des solutions du système. D'autre part, on vérifie que v_1 et v_2 sont linéairement indépendants. Donc (v_1, v_2) est une base de l'espace des solutions du système. Ceci montre que cet espace vectoriel est de dimension 2.

5.4.3. Compléments

Lorsqu'un espace vectoriel est de dimension finie, le fait de connaître sa dimension est une information très riche ; les propriétés suivantes montrent comment exploiter cette information.

Le schéma de preuve sera : Lemme 1 $\Longrightarrow$ Proposition 5 $\Longrightarrow$ Théorème 6.

> **Lemme 1.**
> *Soit E un espace vectoriel. Soit $\mathscr{L}$ une famille libre et soit $\mathscr{G}$ une famille génératrice finie de E. Alors* $\operatorname{Card}\mathscr{L} \leqslant \operatorname{Card}\mathscr{G}$.

Ce lemme implique le résultat important :

Proposition 5.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel admettant une base ayant n éléments. Alors :

1. *Toute famille libre de E a au plus n éléments.*
2. *Toute famille génératrice de E a au moins n éléments.*

En effet, soit $\mathscr{B}$ une base de E telle que $\operatorname{Card}\mathscr{B} = n$.

1. On applique le lemme 1 à la famille $\mathscr{B}$ considérée génératrice ; alors une famille libre $\mathscr{L}$ vérifie $\operatorname{Card}\mathscr{L} \leqslant \operatorname{Card}\mathscr{B} = n$.
2. On applique le lemme 1 à la famille $\mathscr{B}$ considérée maintenant comme une famille libre, alors une famille génératrice $\mathscr{G}$ vérifie $n = \operatorname{Card}\mathscr{B} \leqslant \operatorname{Card}\mathscr{G}$.

Cette proposition impliquera bien le théorème 6 de la dimension :

Corollaire 1.
Si E est un espace vectoriel admettant une base ayant n éléments, alors toute base de E possède n éléments.

La preuve du corollaire (et donc du théorème 6 de la dimension) est la suivante : par la proposition 5, si $\mathscr{B}$ est une base quelconque de E, alors $\mathscr{B}$ est à la fois une famille libre et génératrice, donc possède à la fois au plus n éléments et au moins n éléments, donc exactement n éléments.

Il reste à énoncer un résultat important et très utile :

Théorème 7.
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, et $\mathscr{F} = (v_1, \ldots, v_n)$ une famille de n vecteurs de E. Il y a équivalence entre :

(i) $\mathscr{F}$ est une base de E,

(ii) $\mathscr{F}$ est une famille libre de E,

(iii) $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de E.

La preuve sera une conséquence du théorème 6 de la dimension et du théorème 4 de la base incomplète.
Autrement dit, lorsque le nombre de vecteurs considéré est exactement égal à la dimension de l'espace vectoriel, l'une des deux conditions – être libre ou bien génératrice – suffit pour que ces vecteurs déterminent une base de E.

Démonstration.

- Les implications (i) $\Longrightarrow$ (ii) et (i) $\Longrightarrow$ (iii) découlent de la définition d'une base.

- Voici la preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (i).

  Si $\mathscr{F}$ est une famille libre ayant n éléments, alors par le théorème de la base incomplète (théorème 4) il existe une famille $\mathscr{F}'$ telle que $\mathscr{F} \cup \mathscr{F}'$ soit une base de E. D'une part $\mathscr{F} \cup \mathscr{F}'$ est une base de E qui est de dimension n, donc par le théorème 6, $\operatorname{Card}\left(\mathscr{F} \cup \mathscr{F}'\right) = n$. Mais d'autre part $\operatorname{Card}\left(\mathscr{F} \cup \mathscr{F}'\right) = \operatorname{Card} \mathscr{F} + \operatorname{Card} \mathscr{F}'$ (par l'algorithme du théorème 4) et par hypothèse $\operatorname{Card} \mathscr{F} = n$. Donc $\operatorname{Card} \mathscr{F}' = 0$, ce qui implique que $\mathscr{F}' = \varnothing$ et donc que $\mathscr{F}$ est déjà une base de E.

- Voici la preuve de (iii) $\Longrightarrow$ (i).

  Par hypothèse, $\mathscr{F}$ est cette fois une famille génératrice. Toujours par le théorème 4, on peut extraire de cette famille une base $\mathscr{B} \subset \mathscr{F}$. Puis par le théorème 6, $\operatorname{Card} \mathscr{B} = n$, donc $n = \operatorname{Card} \mathscr{B} \leqslant \operatorname{Card} \mathscr{F} = n$. Donc $\mathscr{B} = \mathscr{F}$ et $\mathscr{F}$ est bien une base.

$\square$

Exemple 18.
Pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$ les vecteurs (v_1, v_2, v_3) suivants forment une base de $\mathbb{R}^3$?

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ t \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$$

- Nous avons une famille de 3 vecteurs dans l'espace $\mathbb{R}^3$ de dimension 3. Donc pour montrer que la famille (v_1, v_2, v_3) est une base, par le théorème 7, il suffit de montrer que la famille est libre ou bien de montrer qu'elle est génératrice. Dans la pratique, il est souvent plus facile de vérifier qu'une famille est libre.

- À quelle condition la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre ? Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$. Cela implique le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \\ 4\lambda_1 + t\lambda_2 + t\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. .$$

Ce système est équivalent à :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \\ 2\lambda_2 & = & 0 \\ (t-4)\lambda_2 + (t-4)\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 + \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \\ (t-4)\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

- Il est clair que si $t \neq 4$, alors la seule solution est $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0,0,0)$ et donc $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une famille libre. Si $t = 4$, alors par exemple $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (1, 0, -1)$ est une solution non nulle, donc la famille n'est pas libre.
- Conclusion : si $t \neq 4$ la famille est libre, donc par le théorème 7 la famille (v_1, v_2, v_3) est en plus génératrice, donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$. Si $t = 4$, la famille n'est pas libre et n'est donc pas une base.

5.4.4. Preuve

Il nous reste la preuve du lemme 1. La démonstration est délicate et hors-programme.

Démonstration. La preuve de ce lemme se fait en raisonnant par récurrence.
On démontre par récurrence que, pour tout $n \geqslant 1$, la propriété suivante est vraie :
« Dans un espace vectoriel engendré par n vecteurs, toute famille ayant $n+1$ éléments est liée. »
Initialisation. On vérifie que la propriété est vraie pour $n = 1$. Soit E un espace vectoriel engendré par un vecteur noté g_1, et soit $\{v_1, v_2\}$ une famille de E ayant deux éléments. Les vecteurs v_1 et v_2 peuvent s'écrire comme combinaisons linéaires du vecteur g_1 ; autrement dit, il existe des scalaires α_1, α_2 tels que $v_1 = \alpha_1 g_1$ et $v_2 = \alpha_2 g_1$, ce qui donne la relation : $\alpha_2 v_1 - \alpha_1 v_2 = 0_E$. En supposant v_2 non nul (sinon il est évident que $\{v_1, v_2\}$ est liée), le scalaire α_2 est donc non nul. On a trouvé une combinaison linéaire nulle des vecteurs v_1, v_2, avec des coefficients non tous nuls. Donc la famille $\{v_1, v_2\}$ est liée.

Hérédité. On démontre maintenant que si la propriété est vraie au rang $n-1$ ($n \geqslant 2$), alors elle vraie au rang n. Soit E un espace vectoriel engendré par n vecteurs notés $g_1, g_2, \ldots, g_n$, et soit $\{v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1}\}$ une famille de E ayant $n+1$ éléments. Tout vecteur v_j, pour $j = 1, 2, \ldots, n+1$, est combinaison linéaire de $g_1, g_2, \ldots, g_n$, donc il existe des scalaires $\alpha_1^j, \alpha_2^j, \ldots, \alpha_n^j$ tels que :

$$v_j = \alpha_1^j g_1 + \alpha_2^j g_2 + \cdots + \alpha_n^j g_n.$$

Remarque. On est contraint d'utiliser ici deux indices i, j pour les scalaires (attention ! j n'est pas un exposant) car deux informations sont nécessaires : l'indice j indique qu'il s'agit de la décomposition du vecteur v_j, et i indique à quel vecteur de la famille génératrice est associé ce coefficient.

En particulier, pour $j = n+1$, le vecteur v_{n+1} s'écrit :

$$v_{n+1} = \alpha_1^{n+1} g_1 + \alpha_2^{n+1} g_2 + \cdots + \alpha_n^{n+1} g_n.$$

Si v_{n+1} est nul, c'est terminé, la famille est liée ; sinon, v_{n+1} est non nul, et au moins un des coefficients α_j^{n+1} est non nul. On suppose, pour alléger l'écriture, que α_n^{n+1} est non nul (sinon il suffit de changer l'ordre des vecteurs). On construit une nouvelle famille de n vecteurs de E de telle sorte que ces vecteurs soient combinaisons linéaires de $g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}$, c'est-à-dire appartiennent au sous-espace engendré par $\{g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}\}$. Pour $j = 1, 2, \ldots, n$, on définit w_j par :

$$w_j = \alpha_n^{n+1} v_j - \alpha_n^j v_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} (\alpha_n^{n+1} \alpha_k^j - \alpha_n^j \alpha_k^{n+1}) g_k.$$

Le coefficient de g_n est nul. Donc w_j est bien combinaison linéaire de $g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}$. On a n vecteurs qui appartiennent à un espace vectoriel engendré par $n-1$ vecteurs ; on peut appliquer l'hypothèse de récurrence : la famille $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ est liée. Par conséquent, il existe des scalaires non tous nuls λ_1, λ_2, …, λ_n tels que

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \cdots + \lambda_n w_n = 0.$$

En remplaçant les w_j par leur expression en fonction des vecteurs v_i, on obtient :

$$\alpha_n^{n+1} \lambda_1 v_1 + \alpha_n^{n+1} \lambda_2 v_2 + \cdots + \alpha_n^{n+1} \lambda_n v_n - (\lambda_1 \alpha_n^1 + \cdots + \lambda_n \alpha_n^n) v_{n+1} = 0_E$$

Le coefficient α_n^{n+1} a été supposé non nul et au moins un des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ est non nul ; on a donc une combinaison linéaire nulle des vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1}$ avec des coefficients qui ne sont pas tous nuls, ce qui prouve que ces vecteurs forment une famille liée.

Conclusion. La démonstration par récurrence est ainsi achevée. □

Mini-exercices.
Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Justifier votre réponse par un résultat du cours ou un contre-exemple :

1. Une famille de $p \geqslant n$ vecteurs dans un espace vectoriel de dimension n est génératrice.
2. Une famille de $p > n$ vecteurs dans un espace vectoriel de dimension n est liée.
3. Une famille de $p < n$ vecteurs dans un espace vectoriel de dimension n est libre.
4. Une famille génératrice de $p \leqslant n$ vecteurs dans un espace vectoriel de dimension n est libre.
5. Une famille de $p \neq n$ vecteurs dans un espace vectoriel de dimension n n'est pas une base.
6. Toute famille libre à p éléments d'un espace vectoriel de dimension n se complète par une famille ayant exactement $n-p$ éléments en une base de E.

5.5. Dimension des sous-espaces vectoriels

Tout sous-espace vectoriel F d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E étant lui même un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, la question est de savoir s'il est de dimension finie ou s'il ne l'est pas.
Prenons l'exemple de l'espace vectoriel $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

- il contient le sous-espace vectoriel $F_1 = \mathbb{R}_n[X]$ des (fonctions) polynômes de degré $\leqslant n$, qui est de dimension finie ;
- et aussi le sous-espace vectoriel $F_2 = \mathbb{R}[X]$ de l'ensemble des (fonctions) polynômes, qui lui est de dimension infinie.

5.5.1. Dimension d'un sous-espace vectoriel

Nous allons voir par contre que lorsque E est de dimension finie alors F aussi.

Théorème 8.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. *Alors tout sous-espace vectoriel F de E est de dimension finie ;*
2. $\dim F \leqslant \dim E$ *;*
3. $F = E \iff \dim F = \dim E$.

Démonstration.

- Soit E un espace vectoriel de dimension n et soit F un sous-espace vectoriel de E. Si $F = \{0\}$ il n'y a rien à montrer. On suppose donc $F \neq \{0\}$ et soit v un élément non nul de F. La famille $\{v\}$ est une famille libre de F, donc F contient des familles libres. Toute famille libre d'éléments de F étant une famille libre d'éléments de E (voir la définition des familles libres), alors comme E est de dimension n, toutes les familles libres de F ont au plus n éléments.
- On considère l'ensemble K des entiers k tels qu'il existe une famille libre de F ayant k éléments :
  $$K = \Big\{ k \in \mathbb{N} \mid \exists \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subset F \text{ et } \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \text{ est une famille libre de } F \Big\}$$
  Cet ensemble K est non vide (car $1 \in K$) ; K est un sous-ensemble borné de $\mathbb{N}$ (puisque tout élément de K est compris entre 1 et n) donc K admet un maximum. Notons p ce maximum et soit $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ une famille libre de F ayant p éléments.
- Montrons que $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ est aussi génératrice de F. Par l'absurde, s'il existe w un élément de F qui n'est pas dans $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_p)$, alors la famille $\{v_1, \dots, v_p, w\}$ ne peut pas être libre (sinon p ne serait pas le maximum de K). La famille $\{v_1, \dots, v_p, w\}$ est donc liée, mais alors la relation de dépendance linéaire implique que $w \in \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_p)$, ce qui est une contradiction.

  Conclusion : $(v_1, \dots, v_p)$ est une famille libre et génératrice, donc est une base de F.

- On a ainsi démontré simultanément que :
  - — F est de dimension finie (puisque $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ est une base de F).
  - — Ainsi $\dim F = p$, donc $\dim F \leqslant \dim E$ (puisque toute famille libre de F a au plus n éléments).
  - — De plus, lorsque $p = n$, le p-uplet $(v_1, v_2, \dots, v_p)$, qui est une base de F, est aussi une base de E (car $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ est alors une famille libre de E ayant exactement n éléments, donc est une base de E). Tout élément de E s'écrit comme une combinaison linéaire de $v_1, v_2, \dots, v_p$, d'où $E = F$.

□

5.5.2. Exemples

Exemple 19.
Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2, les sous-espaces vectoriels de E sont :

- soit de dimension 0 : c'est alors le sous-espace $\{0\}$;
- soit de dimension 1 : ce sont les droites vectorielles, c'est-à-dire les sous-espaces $\mathbb{K}u = \text{Vect}\{u\}$ engendrés par les vecteurs non nuls u de E ;
- soit de dimension 2 : c'est alors l'espace E tout entier.

Vocabulaire. Plus généralement, dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n ($n \geqslant 2$), tout sous-espace vectoriel de E de dimension 1 est appelé **droite vectorielle** de E et tout sous-espace vectoriel de E de dimension 2 est appelé **plan vectoriel** de E. Tout sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$ est appelé **hyperplan** de E. Pour $n = 3$, un hyperplan est un plan vectoriel ; pour $n = 2$, un hyperplan est une droite vectorielle.

Le théorème 8 précédent permet de déduire le corollaire suivant :

> **Corollaire 2.**
> *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On suppose que F est de dimension finie et que $G \subset F$. Alors :*
>
> $$F = G \iff \dim F = \dim G$$

Autrement dit, sachant qu'un sous-espace est inclus dans un autre, alors pour montrer qu'ils sont égaux il suffit de montrer l'égalité des dimensions.

Exemple 20.

Deux droites vectorielles F et G sont soit égales, soit d'intersection réduite au vecteur nul.

Exemple 21.

Soient les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 3y + z = 0 \right\}$ et $G = \text{Vect}(u, v)$ où $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Est-ce que $F = G$?

1. On remarque que les vecteurs u et v ne sont pas colinéaires, donc G est de dimension 2, et de plus ils appartiennent à F, donc G est contenu dans F.
2. Pour trouver la dimension de F, on pourrait déterminer une base de F et on montrerait alors que la dimension de F est 2. Mais il est plus judicieux ici de remarquer que F est contenu strictement dans $\mathbb{R}^3$ (par exemple le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ n'est pas dans F), donc $\dim F < \dim \mathbb{R}^3 = 3$; mais puisque F contient G alors $\dim F \geqslant \dim G = 2$, donc la dimension de F ne peut être que 2.
3. On a donc démontré que $G \subset F$ et que $\dim G = \dim F$, ce qui entraîne $G = F$.

5.5.3. Théorème des quatre dimensions

Théorème 9 (Théorème des quatre dimensions).

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F, G des sous-espaces vectoriels de E. Alors :

$$\boxed{\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)}$$

Corollaire 3.

Si $E = F \oplus G$, alors $\dim E = \dim F + \dim G$.

Exemple 22.
Dans un espace vectoriel E de dimension 6, on considère deux sous-espaces F et G avec $\dim F = 3$ et $\dim G = 4$. Que peut-on dire de $F \cap G$? de $F + G$? Peut-on avoir $F \oplus G = E$?

- $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel inclus dans F, donc $\dim(F \cap G) \leqslant \dim F = 3$. Donc les dimensions possibles pour $F \cap G$ sont pour l'instant $0, 1, 2, 3$.
- $F + G$ est un sous-espace vectoriel contenant G et inclus dans E, donc $4 = \dim G \leqslant \dim(F + G) \leqslant \dim E = 6$. Donc les dimensions possibles pour $F + G$ sont $4, 5, 6$.
- Le théorème 9 des quatre dimensions nous donne la relation : $\dim(F \cap G) = \dim F + \dim G - \dim(F + G) = 3 + 4 - \dim(F + G) = 7 - \dim(F + G)$. Comme $F + G$ est de dimension 4, 5 ou 6, alors la dimension de $F \cap G$ est 3, 2 ou 1.
- Conclusion : les dimensions possibles pour $F + G$ sont 4, 5 ou 6 ; les dimensions correspondantes pour $F \cap G$ sont alors 3, 2 ou 1. Dans tous les cas, $F \cap G \neq \{0\}$ et en particulier F et G ne sont jamais en somme directe dans E.

La méthode de la preuve du théorème 9 des quatre dimensions implique aussi :

Corollaire 4.
Tout sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E de dimension finie admet un supplémentaire.

Preuve du théorème 9.

- Notez l'analogie de la formule avec la formule pour les ensembles finis :

$$\operatorname{Card}(A \cup B) = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B - \operatorname{Card}(A \cap B).$$

- Nous allons partir d'une base $\mathscr{B}_{F \cap G} = \{u_1, \ldots, u_p\}$ de $F \cap G$. On commence par compléter $\mathscr{B}_{F \cap G}$ en une base $\mathscr{B}_F = \{u_1, \ldots, u_p, v_{p+1}, \ldots, v_q\}$ de F. On complète ensuite $\mathscr{B}_{F \cap G}$ en une base $\mathscr{B}_G = \{u_1, \ldots, u_p, w_{p+1}, \ldots, w_r\}$ de G.
- Nous allons maintenant montrer que la famille

$$\{u_1, \ldots, u_p, v_{p+1}, \ldots, v_q, w_{p+1}, \ldots, w_r\}$$

est une base de $F+G$. Il est tout d'abord clair que c'est une famille génératrice de $F+G$ (car $\mathscr{B}_F$ est une famille génératrice de F et $\mathscr{B}_G$ est une famille génératrice de G).

- Montrons que cette famille est libre. Soit une combinaison linéaire nulle :

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i + \sum_{j=p+1}^{q} \beta_j v_j + \sum_{k=p+1}^{r} \gamma_k w_k = 0 \qquad (1)$$

On pose $u = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i$, $v = \sum_{j=p+1}^{q} \beta_j v_j$, $w = \sum_{k=p+1}^{r} \gamma_k w_k$. Alors d'une part $u + v \in F$ (car $\mathscr{B}_F$ est une base de F) mais comme l'équation (1) équivaut à $u + v + w = 0$, alors $u + v = -w \in G$ (car $w \in G$). Maintenant $u + v \in F \cap G$ et aussi bien sûr $u \in F \cap G$, donc $v = \sum_{j=p+1}^{q} \beta_j v_j \in F \cap G$. Cela implique $\beta_j = 0$ pour tout j (car les $\{v_j\}$ complètent la base de $F \cap G$). La combinaison linéaire nulle (1) devient $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i + \sum_{k=p+1}^{r} \gamma_k w_k = 0$. Or $\mathscr{B}_G$ est une base de G, donc $\alpha_i = 0$ et $\gamma_k = 0$ pour tout i, k. Ainsi $\mathscr{B}_{F+G} = \{u_1, \dots, u_p, v_{p+1}, \dots, v_q, w_{p+1}, \dots, w_r\}$ est une base de $F + G$.

- Il ne reste plus qu'à compter le nombre de vecteurs de chaque base : $\dim F \cap G = \operatorname{Card} \mathscr{B}_{F\cap G} = p$, $\dim F = \operatorname{Card} \mathscr{B}_F = q$, $\dim G = \operatorname{Card} \mathscr{B}_G = r$, $\dim(F + G) = \operatorname{Card} \mathscr{B}_{F+G} = q + r - p$. Ce qui prouve bien $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.

$\square$

Mini-exercices.

1. Soient $F = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}\right)$ et $G = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}-7\\7\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\5\\11\end{pmatrix}\right)$. Montrer que $F = G$.
2. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère $F = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\t\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}t\\1\\1\end{pmatrix}\right)$, $G = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Calculer les dimensions de $F, G, F \cap G, F + G$ en fonction de $t \in \mathbb{R}$.
3. Dans un espace vectoriel de dimension 7, on considère des sous-espaces F et G vérifiant $\dim F = 3$ et $\dim G \leqslant 2$. Que peut-on dire pour $\dim(F \cap G)$? Et pour $\dim(F + G)$?
4. Dans un espace vectoriel E de dimension finie, montrer l'équivalence entre : (i) $F \oplus G = E$; (ii) $F + G = E$ et $\dim F + \dim G = \dim E$; (iii) $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim F + \dim G = \dim E$.
5. Soit H un hyperplan dans un espace vectoriel de dimension finie E. Soit

$v \in E \backslash H$. Montrer que H et $\mathrm{Vect}(v)$ sont des sous-espaces supplémentaires dans E.

Matrices et applications linéaires

Chapitre 6

Ce chapitre est l'aboutissement de toutes les notions d'algèbre linéaire vues jusqu'ici : espaces vectoriels, dimension, applications linéaires, matrices. Nous allons voir que dans le cas des espaces vectoriels de dimension finie, l'étude des applications linéaires se ramène à l'étude des matrices, ce qui facilite les calculs.

6.1. Rang d'une famille de vecteurs

Le rang d'une famille de vecteurs est la dimension du plus petit sous-espace vectoriel contenant tous ces vecteurs.

6.1.1. Définition

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\{v_1, \dots, v_p\}$ une famille finie de vecteurs de E. Le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_p)$ engendré par $\{v_1, \dots, v_p\}$ étant de dimension finie, on peut donc donner la définition suivante :

Définition 1 (Rang d'une famille finie de vecteurs)**.**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $\{v_1, \dots, v_p\}$ une famille finie de vecteurs de E. Le **rang** de la famille $\{v_1, \dots, v_p\}$ est la dimension du sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_p)$ engendré par les vecteurs $v_1, \dots, v_p$. Autrement dit :

$$\boxed{\mathrm{rg}(v_1, \dots, v_p) = \dim \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_p)}$$

Calculer le rang d'une famille de vecteurs n'est pas toujours évident, cependant il y a des inégalités qui découlent directement de la définition.

Proposition 1.
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\{v_1,\dots,v_p\}$ une famille de p vecteurs de E. Alors :

1. $0 \leqslant \operatorname{rg}(v_1,\dots,v_p) \leqslant p$ *: le rang est inférieur ou égal au nombre d'éléments dans la famille.*
2. *Si E est de dimension finie alors* $\operatorname{rg}(v_1,\dots,v_p) \leqslant \dim E$ *: le rang est inférieur ou égal à la dimension de l'espace ambiant E.*

Remarque.

- Le rang d'une famille vaut 0 si et seulement si tous les vecteurs sont nuls.
- Le rang d'une famille $\{v_1,\dots,v_p\}$ vaut p si et seulement si la famille $\{v_1,\dots,v_p\}$ est libre.

Exemple 1.
Quel est le rang de la famille $\{v_1,v_2,v_3\}$ suivante dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$?

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

- Ce sont des vecteurs de $\mathbb{R}^4$ donc $\operatorname{rg}(v_1,v_2,v_3) \leqslant 4$.
- Mais comme il n'y a que 3 vecteurs alors $\operatorname{rg}(v_1,v_2,v_3) \leqslant 3$.
- Le vecteur v_1 est non nul donc $\operatorname{rg}(v_1,v_2,v_3) \geqslant 1$.
- Il est clair que v_1 et v_2 sont linéairement indépendants donc $\operatorname{rg}(v_1,v_2,v_3) \geqslant \operatorname{rg}(v_1,v_2) = 2$.

Il reste donc à déterminer si le rang vaut 2 ou 3. On cherche si la famille $\{v_1,v_2,v_3\}$ est libre ou liée en résolvant le système linéaire $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$. On trouve $v_1 - v_2 + v_3 = 0$. La famille est donc liée. Ainsi $\operatorname{Vect}(v_1,v_2,v_3) = \operatorname{Vect}(v_1,v_2)$, donc $\operatorname{rg}(v_1,v_2,v_3) = \dim \operatorname{Vect}(v_1,v_2,v_3) = 2$.

6.1.2. Rang d'une matrice

Une matrice peut être vue comme une juxtaposition de vecteurs colonnes.

> **Définition 2.**
> On définit le **rang** d'une matrice comme étant le rang de ses vecteurs colonnes.

Exemple 2.
Le rang de la matrice

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -\frac{1}{2} & 0\\ 2 & 4 & -1 & 0\end{pmatrix}\in M_{2,4}(\mathbb{K})$$

est par définition le rang de la famille de vecteurs de $\mathbb{K}^2$: $\left\{v_1=\binom{1}{2}, v_2=\binom{2}{4}, v_3=\binom{-\frac{1}{2}}{-1}, v_4=\binom{0}{0}\right\}$. Tous ces vecteurs sont colinéaires à v_1, donc le rang de la famille $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ est 1 et ainsi $\operatorname{rg} A=1$.

Réciproquement, on se donne une famille de p vecteurs $\{v_1,\dots,v_p\}$ d'un espace vectoriel E de dimension n. Fixons une base $\mathcal{B}=\{e_1,\dots,e_n\}$ de E. Chaque vecteur v_j se décompose dans la base $\mathcal{B}$: $v_j=a_{1j}e_1+\cdots+a_{ij}e_i+\cdots+a_{nj}e_n$, ce que l'on note $v_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\ \vdots\\ a_{ij}\\ \vdots\\ a_{nj}\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$. En juxtaposant ces vecteurs colonnes, on obtient une matrice $A\in M_{n,p}(\mathbb{K})$. Le rang de la famille $\{v_1,\dots,v_p\}$ est égal au rang de la matrice A.

> **Définition 3.**
> On dit qu'une matrice est **échelonnée** par rapport aux colonnes si le nombre de zéros commençant une colonne croît strictement colonne après colonne, jusqu'à ce qu'il ne reste plus que des zéros. Autrement dit, la matrice transposée est échelonnée par rapport aux lignes.

Voici un exemple d'une matrice échelonnée par colonnes ; les $*$ désignent des coefficients quelconques, les + des coefficients non nuls :

$$\begin{pmatrix} + & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & + & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & + & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & + & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le rang d'une matrice échelonnée est très simple à calculer.

Proposition 2.
Le rang d'une matrice échelonnée par colonnes est égal au nombre de colonnes non nulles.

Par exemple, dans la matrice échelonnée donnée en exemple ci-dessus, 4 colonnes sur 6 sont non nulles, donc le rang de cette matrice est 4.
La preuve de cette proposition consiste à remarquer que les vecteurs colonnes non nuls sont linéairement indépendants, ce qui au vu de la forme échelonnée de la matrice est facile.

6.1.3. Opérations conservant le rang

Proposition 3.
Le rang d'une matrice ayant les colonnes $C_1, C_2, \dots, C_p$ n'est pas modifié par les trois opérations élémentaires suivantes sur les vecteurs :

1. *$C_i \leftarrow \lambda C_i$ avec $\lambda \neq 0$: on peut multiplier une colonne par un scalaire non nul.*
2. *$C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ (et $j \neq i$) : on peut ajouter à la colonne C_i un multiple d'une autre colonne C_j.*
3. *$C_i \leftrightarrow C_j$: on peut échanger deux colonnes.*

Plus généralement, l'opération $C_i \leftarrow C_i + \sum_{i \neq j} \lambda_j C_j$ conserve le rang de la matrice.
On a même un résultat plus fort, comme vous le verrez dans la preuve : l'espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes est conservé par ces opérations.

Démonstration. Le premier et troisième point de la proposition sont faciles.

Pour simplifier l'écriture de la démonstration du deuxième point, montrons que l'opération $C_1 \leftarrow C_1 + \lambda C_2$ ne change pas le rang. Notons v_i le vecteur correspondant à la colonne C_i d'une matrice A. L'opération sur les colonnes $C_1 \leftarrow C_1 + \lambda C_2$ change la matrice A en une matrice A' dont les vecteurs colonnes sont : $v_1 + \lambda v_2, v_2, v_3, \dots, v_p$.

Il s'agit de montrer que les sous-espaces $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_p)$ et $G = \mathrm{Vect}(v_1 + \lambda v_2, v_2, v_3, \dots, v_p)$ ont la même dimension. Nous allons montrer qu'ils sont égaux !

- Tout générateur de G est une combinaison linéaire des v_i, donc $G \subset F$.
- Pour montrer que $F \subset G$, il suffit de montrer v_1 est combinaison linéaire des générateurs de G, ce qui s'écrit : $v_1 = (v_1 + \lambda v_2) - \lambda v_2$.

Conclusion : $F = G$ et donc $\dim F = \dim G$. □

Méthodologie. Comment calculer le rang d'une matrice ou d'un système de vecteurs ?

Il s'agit d'appliquer la méthode de Gauss sur les colonnes de la matrice A (considérée comme une juxtaposition de vecteurs colonnes). Le principe de la méthode de Gauss affirme que par les opérations élémentaires $C_i \leftarrow \lambda C_i$, $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$, $C_i \leftrightarrow C_j$, on transforme la matrice A en une matrice échelonnée par rapport aux colonnes. Le rang de la matrice est alors le nombre de colonnes non nulles.

Remarque : la méthode de Gauss classique concerne les opérations sur les lignes et aboutit à une matrice échelonnée par rapport aux lignes. Les opérations sur les colonnes de A correspondent aux opérations sur les lignes de la matrice transposée A^T.

6.1.4. Exemples

Exemple 3.

Quel est le rang de la famille des 5 vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$?

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad v_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On est ramené à calculer le rang de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 5 & 8 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

En faisant les opérations $C_2 \leftarrow C_2 + C_1$, $C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1$, $C_4 \leftarrow C_4 - 3C_1$, $C_5 \leftarrow C_5 - 3C_1$, on obtient des zéros sur la première ligne à droite du premier pivot :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 5 & 8 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & -4 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & -6 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

On échange C_2 et C_3 par l'opération $C_2 \longleftrightarrow C_3$ pour avoir le coefficient -1 en position de pivot et ainsi éviter d'introduire des fractions.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & -4 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & -6 & -4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & -4 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & -6 & 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

En faisant les opérations $C_3 \leftarrow C_3 + 3C_2$, $C_4 \leftarrow C_4 + 2C_2$ et $C_5 \leftarrow C_5 + 5C_2$, on obtient des zéros à droite de ce deuxième pivot :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & -4 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & -6 & 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & -11 & -11 & -22 \\ 1 & -6 & -16 & -16 & -32 \end{pmatrix}$$

Enfin, en faisant les opérations $C_4 \leftarrow C_4 - C_3$ et $C_5 \leftarrow C_5 - 2C_3$, on obtient une matrice échelonnée par colonnes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & -11 & -11 & -22 \\ 1 & -6 & -16 & -16 & -32 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & -11 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & -16 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il y a 3 colonnes non nulles : on en déduit que le rang de la famille de vecteurs $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ est 3.

En fait, nous avons même démontré que

$$\mathrm{Vect}(v_1,v_2,v_3,v_4,v_5)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\-4\\-6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-11\\-16\end{pmatrix}\right).$$

Exemple 4.

Considérons les trois vecteurs suivants dans $\mathbb{R}^5$: $v_1=(1,2,1,2,0)$, $v_2=(1,0,1,4,4)$ et $v_3=(1,1,1,0,0)$. Montrons que la famille $\{v_1,v_2,v_3\}$ est libre dans $\mathbb{R}^5$. Pour cela, calculons le rang de cette famille de vecteurs ou, ce qui revient au même, celui de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\2&0&1\\1&1&1\\2&4&0\\0&4&0\end{pmatrix}.$$

Par des opérations élémentaires sur les colonnes, on obtient :

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\2&0&1\\1&1&1\\2&4&0\\0&4&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-2&-1\\1&0&0\\2&2&-2\\0&4&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&-1\\1&0&0\\2&1&-2\\0&2&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\1&0&0\\2&1&-3\\0&2&-2\end{pmatrix}$$

Comme la dernière matrice est échelonnée par colonnes et que ses 3 colonnes sont non nulles, on en déduit que la famille $\{v_1,v_2,v_3\}$ constituée de 3 vecteurs est de rang 3, et donc qu'elle est libre dans $\mathbb{R}^5$.

Exemple 5.

Considérons les quatre vecteurs suivants dans $\mathbb{R}^3$: $v_1=(1,2,3)$, $v_2=(2,0,6)$, $v_3=(3,2,1)$ et $v_4=(-1,2,2)$. Montrons que la famille $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ engendre $\mathbb{R}^3$. Pour cela, calculons le rang de cette famille de vecteurs ou, ce qui revient au même, celui de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix}1&2&3&-1\\2&0&2&2\\3&6&1&2\end{pmatrix}.$$

Par des opérations élémentaires sur les colonnes, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & -4 & 4 \\ 3 & 0 & -8 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -8 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -8 & 0 \end{pmatrix}$$

La famille $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ est donc de rang 3. Cela signifie que $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4)$ est un sous-espace vectoriel de dimension 3 de $\mathbb{R}^3$. On a donc $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4) = \mathbb{R}^3$. Autrement dit, la famille $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ engendre $\mathbb{R}^3$.

6.1.5. Rang et matrice inversible

Nous anticipons sur la suite, pour énoncer un résultat important :

> **Théorème 1** (Matrice inversible et rang)**.**
> *Une matrice carrée de taille n est inversible si et seulement si elle est de rang n.*

La preuve repose sur plusieurs résultats qui seront vus au fil de ce chapitre.

Démonstration. Soit A une matrice carrée d'ordre n. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ dont la matrice dans la base canonique est A. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} A \text{ de rang } n &\iff f \text{ de rang } n \\ &\iff f \text{ surjective} \\ &\iff f \text{ bijective} \\ &\iff A \text{ inversible.} \end{aligned}$$

Nous avons utilisé le fait qu'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est bijectif si et seulement s'il est surjectif et le théorème sur la caractérisation de la matrice d'un isomorphisme. □

6.1.6. Rang engendré par les vecteurs lignes

On a considéré jusqu'ici une matrice $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ comme une juxtaposition de vecteurs colonnes $(v_1, \ldots, v_p)$ et défini $\mathrm{rg}\, A = \dim \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_p)$. Considérons maintenant que A est aussi une superposition de vecteurs lignes $(w_1, \ldots, w_n)$.

> **Proposition 4.**
> $\mathrm{rg}\, A = \dim \mathrm{Vect}(w_1, \ldots, w_n)$

Nous admettrons ce résultat. Autrement dit : *l'espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes et l'espace vectoriel engendré par les vecteurs lignes sont de même dimension.*

Une formulation plus théorique est que *le rang d'une matrice égale le rang de sa transposée* :

$$\boxed{\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, A^T}$$

Attention ! Les dimensions $\dim \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_p)$ et $\dim \mathrm{Vect}(w_1, \dots, w_n)$ sont égales, mais les espaces vectoriels $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_p)$ et $\mathrm{Vect}(w_1, \dots, w_n)$ ne sont pas les mêmes.

Mini-exercices.

1. Quel est le rang de la famille de vecteurs $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\right)$?
   Même question pour $\left(\begin{pmatrix}1\\t\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}t\\1\\t\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\t\end{pmatrix}\right)$ en fonction du paramètre $t \in \mathbb{R}$.
2. Mettre sous forme échelonnée par rapport aux colonnes la matrice $\begin{pmatrix}1 & 2 & -4 & -2 & -1\\0 & -2 & 4 & 2 & 0\\1 & 1 & -2 & -1 & 1\end{pmatrix}$. Calculer son rang. Idem avec $\begin{pmatrix}1 & 7 & 2 & 5\\-2 & 1 & 1 & 5\\-1 & 2 & 1 & 4\\1 & 4 & 1 & 2\end{pmatrix}$.
3. Calculer le rang de $\begin{pmatrix}2 & 4 & -5 & -7\\-1 & 3 & 1 & 2\\1 & a & -2 & b\end{pmatrix}$ en fonction de a et b.
4. Calculer les rangs précédents en utilisant les vecteurs lignes.
5. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Quelle inégalité relie $\mathrm{rg}(f(v_1), \dots, f(v_p))$ et $\mathrm{rg}(v_1, \dots, v_p)$? Que se passe-t-il si f est injective ?

6.2. Applications linéaires en dimension finie

Lorsque $f : E \to F$ est une application linéaire et que E est de dimension finie, la théorie de la dimension fournit de nouvelles propriétés très riches pour l'application linéaire f.

6.2.1. Construction et caractérisation

Une application linéaire $f : E \to F$, d'un espace vectoriel de dimension finie dans un espace vectoriel quelconque, est entièrement déterminée par les images des vecteurs d'une base de l'espace vectoriel E de départ. C'est ce qu'affirme le théorème suivant :

Théorème 2 (Construction d'une application linéaire)**.**
Soient E et F deux espaces vectoriels sur un même corps $\mathbb{K}$. On suppose que l'espace vectoriel E est de dimension finie n et que $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E. Alors pour tout choix $(v_1,\dots,v_n)$ de n vecteurs de F, il existe une et une seule application linéaire $f : E \to F$ telle que, pour tout $i = 1,\dots,n$:

$$f(e_i) = v_i.$$

Le théorème ne fait aucune hypothèse sur la dimension de l'espace vectoriel d'arrivée F.

Exemple 6.
Il existe une unique application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}[X]$ telle que $f(e_i) = (X+1)^i$ pour $i = 1,\dots,n$ (où $(e_1,\dots,e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$).
Pour un vecteur $x = (x_1,\dots,x_n)$, on a

$$f(x_1,\dots,x_n) = f(x_1e_1+\cdots+x_ne_n) = x_1f(e_1)+\cdots+x_nf(e_n) = \sum_{i=1}^n x_i(X+1)^i.$$

Démonstration.

- *Unicité.* Supposons qu'il existe une application linéaire $f : E \to F$ telle que $f(e_i) = v_i$, pour tout $i = 1,\dots,n$. Pour $x \in E$, il existe des scalaires $x_1, x_2,\dots,x_n$ uniques tels que $x = \sum_{i=1}^n x_ie_i$. Comme f est linéaire, on a

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^n x_ie_i\right) = \sum_{i=1}^n x_if(e_i) = \sum_{i=1}^n x_iv_i. \qquad (*)$$

Donc, si elle existe, f est unique.

- *Existence.* Nous venons de voir que s'il existe une solution c'est nécessairement l'application définie par l'équation ($*$). Montrons qu'une application définie par l'équation ($*$) est linéaire et vérifie $f(e_i) = v_i$. Si $(x_1,\dots,x_n)$ (resp. $y = (y_1,\dots,y_n)$) sont les coordonnées de x (resp. y) dans la base $(e_1,\dots,e_n)$, alors

$$\begin{aligned}(\lambda x + \mu y) &= f\left(\sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i + \mu y_i)e_i\right) = \sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i + \mu y_i)f(e_i)\\ &= \lambda\sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) + \mu\sum_{i=1}^{n} y_i f(e_i) = \lambda f(x) + \mu f(y).\end{aligned}$$

Enfin les coordonnées de e_i sont $(0,\dots,0,1,0,\dots,0)$ (avec un 1 en i-ème position), donc $f(e_i) = 1\cdot v_i = v_i$. Ce qui termine la preuve du théorème.

□

6.2.2. Rang d'une application linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soit $f : E \to F$ une application linéaire. On rappelle que l'on note $f(E)$ par $\operatorname{Im} f$, c'est-à-dire $\operatorname{Im} f = \{f(x) | x \in E\}$. $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F.

Proposition 5.
Si E est de dimension finie, alors :

- $\operatorname{Im} f = f(E)$ *est un espace vectoriel de dimension finie.*
- *Si $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E, alors* $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\big(f(e_1),\dots,f(e_n)\big)$.

La dimension de cet espace vectoriel $\operatorname{Im} f$ *est appelée* ***rang de f*** *:*

$$\boxed{\operatorname{rg}(f) = \dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Vect}\big(f(e_1),\dots,f(e_n)\big)}$$

Démonstration. Il suffit de démontrer que tout élément de $\operatorname{Im} f$ est combinaison linéaire des vecteurs $f(e_1),\dots,f(e_n)$.

Soit y un élément quelconque de $\operatorname{Im} f$. Il existe donc un élément x de E tel que $y = f(x)$. Comme $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E, il existe des scalaires

$(x_1,\dots,x_n)$ tels que $x=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. En utilisant la linéarité de f, on en déduit que $y=f(x)=\sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)$, ce qui achève la démonstration. □

Le rang est plus petit que la dimension de E et aussi plus petit que la dimension de F, si F est de dimension finie :

Proposition 6.
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $f : E \to F$ une application linéaire. On a

$$\mathrm{rg}(f) \leqslant \min(\dim E, \dim F).$$

Exemple 7.
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par $f(x,y,z)=(3x-4y+2z, 2x-3y-z)$. Quel est le rang de f ?
Si on note $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, alors (e_1,e_2,e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Il s'agit de trouver le rang de la famille $\{v_1,v_2,v_3\}$:
$v_1=f(e_1)=f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, $v_2=f(e_2)=f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\-3\end{pmatrix}$, $v_3=f(e_3)=f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$
ou, ce qui revient au même, trouver le rang de la matrice

$$A=\begin{pmatrix}3 & -4 & 2\\ 2 & -3 & -1\end{pmatrix}.$$

Commençons par estimer le rang sans faire de calculs.

- Nous avons une famille de 3 vecteurs donc $\mathrm{rg}\, f \leqslant 3$.
- Mais en fait les vecteurs v_1,v_2,v_3 vivent dans un espace de dimension 2 donc $\mathrm{rg}\, f \leqslant 2$.
- f n'est pas l'application linéaire nulle (autrement dit v_1,v_2,v_3 ne sont pas tous nuls) donc $\mathrm{rg}\, f \geqslant 1$.

Donc le rang de f vaut 1 ou 2. Il est facile de voir que v_1 et v_2 sont linéairement indépendants, donc le rang est 2 :

$$\mathrm{rg}\, f = \mathrm{rg}\big(f(e_1), f(e_2), f(e_3)\big) = \dim \mathrm{Vect}(v_1,v_2,v_3) = 2$$

Remarque : il est encore plus facile de voir que le rang de la matrice A est 2 en remarquant que ses deux seules lignes ne sont pas colinéaires.

6.2.3. Théorème du rang

Le théorème du rang est un résultat fondamental dans la théorie des applications linéaires en dimension finie.

On se place toujours dans la même situation :

- $f : E \to F$ est une application linéaire entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels,
- E est un espace vectoriel de dimension finie,
- le **noyau** de f est $\operatorname{Ker} f = \left\{x \in E \mid f(x) = 0_F\right\}$; c'est un sous-espace vectoriel de E, donc $\operatorname{Ker} f$ est de dimension finie,
- l'**image** de f est $\operatorname{Im} f = f(E) = \left\{f(x) \mid x \in E\right\}$; c'est un sous-espace vectoriel de F et est de dimension finie.

Le théorème du rang donne une relation entre la dimension du noyau et la dimension de l'image de f.

Théorème 3 (Théorème du rang)**.**
Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, E étant de dimension finie. Alors

$$\boxed{\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f}$$

Autrement dit : $\boxed{\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} f}$

Dans la pratique, cette formule sert à déterminer la dimension du noyau connaissant le rang, ou bien le rang connaissant la dimension du noyau.

Exemple 8.

Soit l'application linéaire

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x_1, x_2, x_3, x_4) & \longmapsto & (x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 4x_4, -x_1 - 2x_3 - x_4) \end{array}$$

Calculons le rang de f et la dimension du noyau de f.

- **Première méthode.** On calcule d'abord le noyau :

$$\begin{aligned}(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\operatorname{Ker} f &\iff f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(0,0,0)\\ &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & = & 0\\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & + & 4x_4 & = & 0\\ -x_1 & & & - & 2x_3 & - & x_4 & = & 0\end{array}\right.\end{aligned}$$

On résout ce système et on trouve qu'il est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & = & 0\\ & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0\end{array}\right.$$

On choisit x_3 et x_4 comme paramètres et on trouve :

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker} f &= \Big\{(-2x_3-x_4,-x_3-x_4,x_3,x_4)\mid x_3,x_4\in\mathbb{R}\Big\}\\ &=\left\{x_3\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\mid x_3,x_4\in\mathbb{R}\right\}\\ &=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)\end{aligned}$$

Les deux vecteurs définissant le noyau sont linéairement indépendants, donc $\dim\operatorname{Ker} f=2$.

On applique maintenant le théorème du rang pour en déduire sans calculs la dimension de l'image : $\dim\operatorname{Im} f=\dim\mathbb{R}^4-\dim\operatorname{Ker} f=4-2=2$. Donc le rang de f est 2.

- **Deuxième méthode.** On calcule d'abord l'image. On note (e_1,e_2,e_3,e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Calculons $v_i=f(e_i)$:

$$v_1=f(e_1)=f\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\quad v_2=f(e_2)=f\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$v_3=f(e_3)=f\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\6\\-2\end{pmatrix}\quad v_4=f(e_4)=f\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\4\\-1\end{pmatrix}$$

On réduit la matrice A, formée des vecteurs colonnes, sous une forme échelonnée :

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\2&2&6&4\\-1&0&-2&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&4&0&0\\-1&-1&0&0\end{pmatrix}$$

Donc le rang de A est 2, ainsi

$$\operatorname{rg} f=\dim\operatorname{Im} f=\dim\operatorname{Vect}\big(f(e_1),f(e_2),f(e_3),f(e_4)\big)=2$$

Maintenant, par le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbb{R}^4 - \operatorname{rg} f = 4-2 = 2$.

On trouve bien sûr le même résultat par les deux méthodes.

Exemple 9.
Soit l'application linéaire

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \longmapsto & P''(X) \end{array}$$

où $P''(X)$ est la dérivée seconde de $P(X)$. Quel est le rang et la dimension du noyau de f ?

- **Première méthode.** On calcule d'abord le noyau :

$$\begin{aligned} P(X) \in \operatorname{Ker} f &\iff f\big(P(X)\big) = 0 \\ &\iff P''(X) = 0 \\ &\iff P'(X) = a \\ &\iff P(X) = aX + b \end{aligned}$$

  où $a, b \in \mathbb{R}$ sont des constantes. Cela prouve que $\operatorname{Ker} f$ est engendré par les deux polynômes : 1 (le polynôme constant) et X. Ainsi $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(1, X)$. Donc $\dim \operatorname{Ker} f = 2$. Par le théorème du rang, $\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}_n[X] - \dim \operatorname{Ker} f = (n+1) - 2 = n-1$.

- **Deuxième méthode.** On calcule d'abord l'image : $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ est une base de l'espace de départ $\mathbb{R}_n[X]$, donc

$$\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Vect}\big(f(1), f(X), \ldots, f(X^n)\big).$$

  Tout d'abord, $f(1) = 0$ et $f(X) = 0$. Pour $k \geqslant 2$, $f(X^k) = k(k-1)X^{k-2}$. Comme les degrés sont échelonnés, il est clair que $\{f(X^2), f(X^3), \ldots, f(X^n)\} = \{2, 6X, 12X^2, \ldots, n(n-1)X^{n-2}\}$ engendre un espace de dimension $n-1$, donc $\operatorname{rg} f = n-1$. Par le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbb{R}_n[X] - \operatorname{rg} f = (n+1) - (n-1) = 2$.

Preuve du théorème du rang.

- Premier cas : f est injective.

  En désignant par $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, nous avons vu que la famille à n éléments $\big(f(e_1), \ldots, f(e_n)\big)$ est une famille libre de F (car f est injective), donc une famille libre de $\operatorname{Im} f$. De plus, $\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$ est une partie génératrice de $\operatorname{Im} f$. Donc $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base de $\operatorname{Im} f$. Ainsi $\dim \operatorname{Im} f = n$, et comme f est injective, $\dim \operatorname{Ker} f = 0$, et ainsi le théorème du rang est vrai.

- Deuxième cas : f n'est pas injective.

  Dans ce cas le noyau de f est un sous-espace de E de dimension p avec $1 \leqslant p \leqslant n$. Soit $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_p)$ une base de $\operatorname{Ker} f$. D'après le théorème de la base incomplète, il existe $n-p$ vecteurs $\epsilon_{p+1}, \dots, \epsilon_n$ de E tels que $(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n)$ soit une base de E.

  Alors $\operatorname{Im} f$ est engendrée par les vecteurs $f(\epsilon_1), f(\epsilon_2), \dots, f(\epsilon_n)$. Mais, comme pour tout i vérifiant $1 \leqslant i \leqslant p$ on a $f(\epsilon_i) = 0$, $\operatorname{Im} f$ est engendrée par les vecteurs $f(\epsilon_{p+1}), \dots, f(\epsilon_n)$.

  Montrons que ces vecteurs forment une famille libre. Soient $\alpha_{p+1}, \dots, \alpha_n$ des scalaires tels que

  $$\alpha_{p+1} f(\epsilon_{p+1}) + \cdots + \alpha_n f(\epsilon_n) = 0.$$

  Puisque f est une application linéaire, cette égalité équivaut à l'égalité $f\left(\alpha_{p+1}\epsilon_{p+1} + \cdots + \alpha_n \epsilon_n\right) = 0$, qui prouve que le vecteur $\alpha_{p+1}\epsilon_{p+1} + \cdots + \alpha_n \epsilon_n$ appartient au noyau de f. Il existe donc des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tels que

  $$\alpha_{p+1}\epsilon_{p+1} + \cdots + \alpha_n \epsilon_n = \lambda_1 \epsilon_1 + \cdots + \lambda_p \epsilon_p.$$

  Comme $(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n)$ est une base de E, les vecteurs $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ sont linéairement indépendants et par conséquent pour tout $i = 1, \dots, p$, $\lambda_i = 0$, et pour tout $i = p+1, \dots, n$, $\alpha_i = 0$. Les vecteurs $f(\epsilon_{p+1}), \dots, f(\epsilon_n)$ définissent donc bien une base de $\operatorname{Im} f$. Ainsi le sous-espace vectoriel $\operatorname{Im} f$ est de dimension $n-p$, ce qui achève la démonstration.

On remarquera le rôle essentiel joué par le théorème de la base incomplète dans cette démonstration. □

6.2.4. Application linéaire entre deux espaces de même dimension

Rappelons qu'un **isomorphisme** est une application linéaire bijective. Un isomorphisme implique que les espaces vectoriels de départ et d'arrivée ont la même dimension. La bijection réciproque est aussi une application linéaire.

Proposition 7.
Soit $f : E \to F$ un isomorphisme d'espaces vectoriels. Si E (respectivement F) est de dimension finie, alors F (respectivement E) est aussi de dimension finie et on a $\dim E = \dim F$.

Démonstration. Si E est de dimension finie, alors comme f est surjective, $F = \operatorname{Im} f$, donc F est engendré par l'image d'une base de E. On a donc F de dimension finie et $\dim F \leqslant \dim E$. De même $f^{-1} : F \to E$ est un isomorphisme, donc $f^{-1}(F) = E$, ce qui prouve cette fois $\dim E \leqslant \dim F$.
Si c'est F qui est de dimension finie, on fait le même raisonnement avec f^{-1}. □

Nous allons démontrer une sorte de réciproque, qui est extrêmement utile.

Théorème 4.
Soit $f : E \to F$ une application linéaire avec E et F de dimension finie.
Supposons $\dim E = \dim F$. *Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) f *est bijective*

(ii) f *est injective*

(iii) f *est surjective*

Autrement dit, dans le cas d'une application linéaire entre deux espaces de ***même*** dimension, pour démontrer qu'elle est bijective, il suffit de démontrer l'une des deux propriétés : injectivité ou surjectivité.

Démonstration. C'est immédiat à partir du théorème du rang. En effet, la propriété f injective équivaut à $\operatorname{Ker} f = \{0\}$, donc d'après le théorème du rang, f est injective si et seulement si $\dim \operatorname{Im} f = \dim E$. D'après l'hypothèse sur l'égalité des dimensions de E et de F, ceci équivaut à $\dim \operatorname{Im} f = \dim F$. Cela équivaut donc à $\operatorname{Im} f = F$, c'est-à-dire f est surjective. □

Exemple 10.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x - y, x + y)$. Une façon simple de montrer que l'application linéaire f est bijective est de remarquer que l'espace de

départ et l'espace d'arrivée ont même dimension. Ensuite on calcule le noyau :

$$(x,y) \in \operatorname{Ker} f \iff f(x,y)=0 \iff (x-y,x+y)=(0,0)$$
$$\iff \begin{cases} x+y &= 0 \\ x-y &= 0 \end{cases} \iff (x,y)=(0,0)$$

Ainsi $\operatorname{Ker} f = \{(0,0)\}$ est réduit au vecteur nul, ce qui prouve que f est injective et donc, par le théorème 4, que f est un isomorphisme.

Exemple 11.

On termine par la justification que si une matrice admet un inverse à droite, alors c'est aussi un inverse à gauche. La preuve se fait en deux temps : (1) l'existence d'un inverse à gauche ; (2) l'égalité des inverses.

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice admettant un inverse à droite, c'est-à-dire il existe $B \in M_n(\mathbb{K})$ tel que $AB = I$.

1. Soit $f : M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K})$ définie par $f(M) = MA$.
   (a) f est une application linéaire, car $f(\lambda M + \mu N) = (\lambda M + \mu N)A = \lambda f(M) + \mu f(N)$.
   (b) f est injective : en effet supposons $f(M) = O$ (où O est la matrice nulle), cela donne $MA = O$. On multiplie cette égalité par B à droite, ainsi $MAB = OB$, donc $MI = O$, donc $M = O$.
   (c) Par le théorème 4, f est donc aussi surjective.
   (d) Comme f est surjective, alors en particulier l'identité est dans l'image de f. C'est-à-dire il existe $C \in M_n(\mathbb{K})$ tel que $f(C) = I$. Ce qui est exactement dire que C est un inverse à gauche de A : $CA = I$.
2. Nous avons $AB = I$ et $CA = I$. Montrons $B = C$. Calculons CAB de deux façons :
$$(CA)B = IB = B \qquad \text{et } C(AB) = CI = C$$
   donc $B = C$.

Mini-exercices.

1. Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Donner l'expression de $f(x,y,z)$ où $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est l'application linéaire qui envoie e_1 sur son opposé, qui envoie e_2 sur le vecteur nul et qui envoie e_3 sur la somme des trois vecteurs e_1, e_2, e_3.

2. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z) = (x-2y-3z, 2y+3z)$. Calculer une base du noyau de f, une base de l'image de f et vérifier le théorème du rang.
3. Même question avec $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (-y+z, x+z, x+y)$.
4. Même question avec l'application linéaire $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ qui à X^k associe X^{k-1} pour $1 \leqslant k \leqslant n$ et qui à 1 associe 0.
5. Lorsque c'est possible, calculer la dimension du noyau, le rang et dire si f peut être injective, surjective, bijective :
   - Une application linéaire surjective $f : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^4$.
   - Une application linéaire injective $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^8$.
   - Une application linéaire surjective $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$.
   - Une application linéaire injective $f : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6$.

6.3. Matrice d'une application linéaire

Nous allons voir qu'il existe un lien étroit entre les matrices et les applications linéaires. À une matrice on associe naturellement une application linéaire. Et réciproquement, étant donné une application linéaire, et des bases pour les espaces vectoriels de départ et d'arrivée, on associe une matrice.
Dans cette section, tous les espaces vectoriels sont de dimension finie.

6.3.1. Matrice associée à une application linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soient p la dimension de E et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E. Soient n la dimension de F et $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F. Soit enfin $f : E \to F$ une application linéaire.
Les propriétés des applications linéaires entre deux espaces de dimension finie permettent d'affirmer que :

- l'application linéaire f est déterminée de façon unique par l'image d'une base de E, donc par les vecteurs $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p)$.

- Pour $j \in \{1, \dots, p\}$, $f(e_j)$ est un vecteur de F et s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la base $\mathscr{B}' = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ de F.

  Il existe donc n scalaires uniques $a_{1,j}, a_{2,j}, \dots, a_{n,j}$ (parfois aussi notés $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}$) tels que

$$f(e_j) = a_{1,j} f_1 + a_{2,j} f_2 + \cdots + a_{n,j} f_n = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}_{\mathscr{B}'} .$$

Ainsi, l'application linéaire f est entièrement déterminée par les coefficients $(a_{i,j})_{(i,j)\in\{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,p\}}$. Il est donc naturel d'introduire la définition suivante :

Définition 4.
La **matrice de l'application linéaire** f par rapport aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ est la matrice $(a_{i,j}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ dont la j-ème colonne est constituée par les coordonnées du vecteur $f(e_j)$ dans la base $\mathscr{B}' = (f_1, f_2, \dots, f_n)$:

$$\begin{array}{c} \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} f(e_1) & \dots & f(e_j) & \dots & f(e_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & & a_{2j} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array}$$

En termes plus simples : c'est la matrice dont les vecteurs colonnes sont l'image par f des vecteurs de la base de départ $\mathscr{B}$, exprimée dans la base d'arrivée $\mathscr{B}'$. On note cette matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$.

Remarque.

- La taille de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$ dépend uniquement de la dimension de E et de celle de F.
- Par contre, les coefficients de la matrice dépendent du choix de la base $\mathscr{B}$ de E et de la base $\mathscr{B}'$ de F.

Exemple 12.

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\begin{array}{rcl} f \quad : \quad \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & (x_1 + x_2 - x_3, x_1 - 2x_2 + 3x_3) \end{array}$$

Il est utile d'identifier vecteurs lignes et vecteurs colonnes ; ainsi f peut être vue comme l'application $f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1+x_2-x_3 \\ x_1-2x_2+3x_3 \end{pmatrix}$.

Soient $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B}' = (f_1, f_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. C'est-à-dire :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Quelle est la matrice de f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$?

   - On a $f(e_1) = f(1,0,0) = (1,1) = f_1 + f_2$. La première colonne de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$ est donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   - De même $f(e_2) = f(0,1,0) = (1,-2) = f_1 - 2f_2$. La deuxième colonne de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$ est donc $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

   - Enfin $f(e_3) = f(0,0,1) = (-1,3) = -f_1 + 3f_2$. La troisième colonne de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$ est donc $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

   Ainsi :

   $$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

2. On va maintenant changer la base de l'espace de départ et celle de l'espace d'arrivée. Soient les vecteurs

   $$\epsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \epsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \epsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad \phi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \phi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   On montre facilement que $\mathscr{B}_0 = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B}'_0 = (\phi_1, \phi_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

   Quelle est la matrice de f dans les bases $\mathscr{B}_0$ et $\mathscr{B}'_0$?

$f(\epsilon_1) = f(1,1,0) = (2,-1) = 3\phi_1 - \phi_2$, $f(\epsilon_2) = f(1,0,1) = (0,4) = -4\phi_1 + 4\phi_2$, $f(\epsilon_3) = f(0,1,1) = (0,1) = -\phi_1 + \phi_2$, donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0,\mathscr{B}'_0}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cet exemple illustre bien le fait que la matrice dépend du choix des bases.

6.3.2. Opérations sur les applications linéaires et les matrices

> **Proposition 8.**
> *Soient $f, g : E \to F$ deux applications linéaires et soient $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{B}'$ une base de F. Alors :*
>
> - $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f+g) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f) + \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(g)$
> - $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\lambda f) = \lambda\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$

Autrement dit, si on note :

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f) \quad B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(g) \quad C = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f+g) \quad D = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\lambda f)$$

Alors :

$$C = A + B \qquad\qquad D = \lambda A$$

Autrement dit : la matrice associée à la somme de deux applications linéaires est la somme des matrices (à condition de considérer la même base sur l'espace de départ pour les deux applications et la même base sur l'espace d'arrivée). Idem avec le produit par un scalaire.

Le plus important sera la composition des applications linéaires.

> **Proposition 9.**
> *Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires et soient $\mathscr{B}$ une base de E, $\mathscr{B}'$ une base de F et $\mathscr{B}''$ une base de G. Alors :*
>
> $$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}''}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)}$$

Autrement dit, si on note :

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f) \qquad B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''}(g) \qquad C = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}''}(g \circ f)$$

Alors

$$C = B \times A$$

Autrement dit, à condition de bien choisir les bases, la matrice associée à la composition de deux applications linéaires est le produit des matrices associées à chacune d'elles, dans le même ordre.
En fait, le produit de matrices, qui semble compliqué au premier abord, est défini afin de correspondre à la composition des applications linéaires.

Démonstration. Posons $p = \dim(E)$ et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E ; $n = \dim F$ et $\mathscr{B}' = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de F ; $q = \dim G$ et $\mathscr{B}'' = (g_1, \ldots, g_q)$ une base de G. Écrivons $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f) = (a_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice de f, $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''}(g) = (b_{ij}) \in M_{q,n}(\mathbb{K})$ la matrice de g, $C = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}''}(g \circ f) = (c_{ij}) \in M_{q,p}(\mathbb{K})$ la matrice de $g \circ f$.
On a

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(e_1) &= g\big(f(e_1)\big) \\
&= g(a_{11}f_1 + \cdots + a_{n1}f_n) \\
&= a_{11}g(f_1) + \cdots + a_{n1}g(f_n) \\
&= a_{11}\Big(b_{11}g_1 + \cdots + b_{q1}g_q\Big) + \cdots + a_{n1}\Big(b_{1n}g_1 + \cdots + b_{qn}g_q\Big)
\end{aligned}$$

Ainsi, la première colonne de $C = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}''}(g \circ f)$ est

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + \cdots + a_{n1}b_{1n} \\ a_{11}b_{21} + \cdots + a_{n1}b_{2n} \\ \vdots \\ a_{11}b_{q1} + \cdots + a_{n1}b_{qn} \end{pmatrix}.$$

Mais ceci est aussi la première colonne de la matrice BA. En faisant la même chose avec les autres colonnes, on remarque que $C = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}''}(g \circ f)$ et BA sont deux matrices ayant leurs colonnes égales. On a donc bien l'égalité cherchée. □

Exemple 13.
On considère deux applications linéaires : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. On pose $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}^3$, $G = \mathbb{R}^2$ avec $f : E \to F$, $g : F \to G$. On se donne des bases : $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ une base de E, $\mathscr{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ une base de F, et $\mathscr{B}'' = (g_1, g_2)$ une base de G.

On suppose connues les matrices de f et g :

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3,2} \qquad B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''}(g) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{2,3}$$

Calculons la matrice associée à $g \circ f : E \to G$, $C = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}''}(g \circ f)$, de deux façons différentes.

1. **Première méthode.** Revenons à la définition de la matrice de l'application linéaire $g \circ f$. Il s'agit d'exprimer l'image des vecteurs de la base de départ $\mathscr{B}$ dans la base d'arrivée $\mathscr{B}''$. C'est-à-dire qu'il faut exprimer $g \circ f(e_j)$ dans la base (g_1, g_2).

   - Calcul des $f(e_j)$. On sait par définition de la matrice A que $f(e_1)$ correspond au premier vecteur colonne : plus précisément, $f(e_1) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)_{\mathscr{B}'} = 1f_1 + 1f_2 + 0f_3 = f_1 + f_2$.
     De même, $f(e_2) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)_{\mathscr{B}'} = 0f_1 + 1f_2 + 2f_3 = f_2 + 2f_3$.
   - Calcul des $g(f_j)$. Par définition, $g(f_j)$ correspond à la j-ème colonne de la matrice B :
     — $g(f_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}''} = 2g_1 + 3g_2$
     — $g(f_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}''} = -g_1 + g_2$
     — $g(f_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}''} = 2g_2$
   - Calcul des $g \circ f(e_j)$. Pour cela on combine les deux séries de calculs précédents :

     $$g \circ f(e_1) = g(f_1 + f_2) = g(f_1) + g(f_2) = (2g_1 + 3g_2) + (-g_1 + g_2) = g_1 + 4g_2$$

     $$g \circ f(e_2) = g(f_2 + 2f_3) = g(f_2) + 2g(f_3) = (-g_1 + g_2) + 2(2g_2) = -g_1 + 5g_2$$

   - Calcul de la matrice $C = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}''}(g \circ f)$: cette matrice est composée des vecteurs $g \circ f(e_j)$ exprimés dans la base $\mathscr{B}''$. Comme

     $$g \circ f(e_1) = g_1 + 4g_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}''} \qquad g \circ f(e_2) = -g_1 + 5g_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}''}$$

alors

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

On trouve bien une matrice de taille 2×2 (car l'espace de départ et d'arrivée de $g \circ f$ est $\mathbb{R}^2$).

2. **Deuxième méthode.** Utilisons le produit de matrices : on sait que $C = BA$. Donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}''}(g \circ f) = C = B \times A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Cet exemple met bien en évidence le gain, en termes de quantité de calculs, réalisé en passant par l'intermédiaire des matrices.

6.3.3. Matrice d'un endomorphisme

Dans cette section, on étudie le cas où l'espace de départ et l'espace d'arrivée sont identiques : $f : E \to E$ est un endomorphisme. Si $\dim E = n$, alors chaque matrice associée à f est une matrice carrée de taille $n \times n$.
Deux situations :

- Si on choisit la même base $\mathscr{B}$ au départ et à l'arrivée, alors on note simplement $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ la matrice associée à f.
- Mais on peut aussi choisir deux bases distinctes pour le même espace vectoriel E ; on note alors comme précédemment $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$.

Exemple 14.

- Cas de l'identité : $\mathrm{id} : E \to E$ est définie par $\mathrm{id}(x) = x$. Alors quelle que soit la base $\mathscr{B}$ de E, la matrice associée est la matrice identité : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{id}) = I_n$. (Attention ! Ce n'est plus vrai si la base d'arrivée est différente de la base de départ.)
- Cas d'une homothétie $h_\lambda : E \to E$, $h_\lambda(x) = \lambda \cdot x$ (où $\lambda \in \mathbb{K}$ est le rapport de l'homothétie) : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(h_\lambda) = \lambda I_n$.
- Cas d'une symétrie centrale $s : E \to E$, $s(x) = -x$: $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s) = -I_n$.

- Cas de $r_\theta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la rotation d'angle θ, centrée à l'origine, dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique $\mathscr{B}$. Alors $r_\theta(x,y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$. On a

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(r_\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Dans le cas particulier de la puissance d'un endomorphisme de E, nous obtenons :

> **Corollaire 1.**
> *Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathscr{B}$ une base de E. Soit $f : E \to E$ une application linéaire. Alors, quel que soit $p \in \mathbb{N}$:*
>
> $$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^p) = \big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\big)^p$$

Autrement dit, si A est la matrice associée à f, alors la matrice associée à $f^p = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{p \text{ occurrences}}$ est $A^p = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{p \text{ facteurs}}$. La démonstration est une récurrence sur p en utilisant la proposition 9.

Exemple 15.
Soit r_θ la matrice de la rotation d'angle θ dans $\mathbb{R}^2$. La matrice de r_θ^p est :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(r_\theta^p) = \big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(r_\theta)\big)^p = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^p$$

Un calcul par récurrence montre ensuite que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(r_\theta^p) = \begin{pmatrix} \cos(p\theta) & -\sin(p\theta) \\ \sin(p\theta) & \cos(p\theta) \end{pmatrix},$$

ce qui est bien la matrice de la rotation d'angle $p\theta$: composer p fois la rotation d'angle θ revient à effectuer une rotation d'angle $p\theta$.

6.3.4. Matrice d'un isomorphisme

Passons maintenant aux isomorphismes. Rappelons qu'un isomorphisme $f : E \to F$ est une application linéaire bijective. Nous avons vu que cela entraîne $\dim E = \dim F$.

> **Théorème 5** (Caractérisation de la matrice d'un isomorphisme).
> *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de même dimension finie. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Soient $\mathscr{B}$ une base de E, $\mathscr{B}'$ une base de F et $A =$*

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

1. *f est bijective si et seulement si la matrice A est inversible. Autrement dit, f est un isomorphisme si et seulement si sa matrice associée* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ *est inversible.*
2. *De plus, si $f : E \to F$ est bijective, alors la matrice de l'application linéaire $f^{-1} : F \to E$ est la matrice A^{-1}. Autrement dit,* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f^{-1}) = \Big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)\Big)^{-1}$.

Voici le cas particulier très important d'un endomorphisme $f : E \to E$ où E est muni de la même base $\mathcal{B}$ au départ et à l'arrivée et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Corollaire 2.

- *f est bijective si et seulement si A est inversible.*
- *Si f est bijective, alors la matrice associée à f^{-1} dans la base $\mathcal{B}$ est A^{-1}.*

Autrement dit : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = \big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\big)^{-1}$.

Exemple 16.
Soient $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$ (centrée à l'origine) et s la réflexion par rapport à l'axe $(y = x)$. Quelle est la matrice associée à $(s \circ r)^{-1}$ dans la base canonique $\mathcal{B}$?

- Pour $\theta = \frac{\pi}{6}$, on trouve la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$.
- La matrice associée à la réflexion est $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- La matrice de $s \circ r$ est $B \times A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
- La matrice de $(s \circ r)^{-1}$ est $(BA)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. On aurait aussi pu calculer ainsi : $(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1} = \cdots$

- On note que $(BA)^{-1} = BA$ ce qui, en termes d'applications linéaires, signifie que $(s \circ r)^{-1} = s \circ r$. Autrement dit, $s \circ r$ est son propre inverse.

Preuve du théorème 5. On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$.

- Si f est bijective, notons $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(f^{-1})$. Alors par la proposition 9 on sait que

  $$BA = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(f^{-1}) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f^{-1} \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(\mathrm{id}_E) = I.$$

  De même $AB = I$. Ainsi $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$ est inversible et son inverse est $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(f^{-1})$.
- Réciproquement, si $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$ est une matrice inversible, notons $B = A^{-1}$. Soit $g : F \to E$ l'application linéaire telle que $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(g)$. Alors, toujours par la proposition 9 :

  $$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f) = BA = I$$

  Donc la matrice de $g \circ f$ est l'identité, ce qui implique $g \circ f = \mathrm{id}_E$. De même $f \circ g = \mathrm{id}_F$. Ainsi f est bijective (et sa bijection réciproque est g).

$\square$

Mini-exercices.

1. Calculer la matrice associée aux applications linéaires $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dans la base canonique :
   (a) f_1 la symétrie par rapport à l'axe (Oy),
   (b) f_2 la symétrie par rapport à l'axe $(y = x)$,
   (c) f_3 la projection orthogonale sur l'axe (Oy),
   (d) f_4 la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$.

   Calculer quelques matrices associées à $f_i \circ f_j$ et, lorsque c'est possible, à f_i^{-1}.
2. Même travail pour $f_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:
   (a) f_1 l'homothétie de rapport λ,
   (b) f_2 la réflexion orthogonale par rapport au plan (Oxz),
   (c) f_3 la rotation d'axe (Oz) d'angle $-\frac{\pi}{2}$,
   (d) f_4 la projection orthogonale sur le plan (Oyz).

6.4. Changement de bases

6.4.1. Application linéaire, matrice, vecteur

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ une base de E. Pour chaque $x \in E$, il existe un p-uplet unique d'éléments de $\mathbb{K}$ $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ tel que

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_p e_p.$$

La matrice des coordonnées de x est un vecteur colonne, noté $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$ ou encore $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$.

Dans $\mathbb{R}^p$, si $\mathscr{B}$ est la base canonique, alors on note simplement $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ en omettant de mentionner la base.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $f : E \to F$ une application linéaire. Le but de ce paragraphe est de traduire l'égalité vectorielle $y = f(x)$ par une égalité matricielle.
Soient $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{B}'$ une base de F.

Proposition 10.

- *Soit* $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$.
- *Pour* $x \in E$, *notons* $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$.
- *Pour* $y \in F$, *notons* $Y = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{\mathscr{B}'}$.

Alors, si $y = f(x)$, *on a*

$$\boxed{Y = AX}$$

Autrement dit :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}\big(f(x)\big) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)}$$

Démonstration.

- On pose $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_p)$, $\mathscr{B}'=(f_1,f_2,\dots,f_n)$, $A=(a_{i,j})=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$ et $X=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_p\end{pmatrix}$.
- On a

$$f(x)=f\left(\sum_{j=1}^{p}x_je_j\right)=\sum_{j=1}^{p}x_jf(e_j)=\sum_{j=1}^{p}x_j\left(\sum_{i=1}^{n}a_{i,j}f_i\right).$$

En utilisant la commutativité de $\mathbb{K}$, on a

$$f(x)=\left(\sum_{j=1}^{p}a_{1,j}x_j\right)f_1+\cdots+\left(\sum_{j=1}^{p}a_{n,j}x_j\right)f_n.$$

- La matrice colonne des coordonnées de $y=f(x)$ dans la base $(f_1,f_2,\dots,f_n)$ est $\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{p}a_{1,j}x_j\\\sum_{j=1}^{p}a_{2,j}x_j\\\vdots\\\sum_{j=1}^{p}a_{n,j}x_j\end{pmatrix}$.
- Ainsi la matrice $Y=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}\big(f(x)\big)=\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{p}a_{1,j}x_j\\\sum_{j=1}^{p}a_{2,j}x_j\\\vdots\\\sum_{j=1}^{p}a_{n,j}x_j\end{pmatrix}$ n'est autre que $A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_p\end{pmatrix}$.

$\square$

Exemple 17.
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3)$ une base de E.
Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est égale à

$$A=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&1\\1&1&0\end{pmatrix}.$$

On se propose de déterminer le noyau de f et l'image de f.

Les éléments x de E sont des combinaisons linéaires de e_1, e_2 et e_3 : $x=x_1e_1+$

$x_2e_2 + x_3e_3$. On a

$$\begin{aligned}
x \in \operatorname{Ker} f \quad &\iff \quad f(x) = 0_E \iff \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(x)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \quad AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

On résout ce système par la méthode du pivot de Gauss. On trouve

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ker} f &= \left\{ x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \in E \mid x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \text{ et } x_2 + x_3 = 0 \right\} \\
&= \left\{ \left(\begin{smallmatrix} t \\ -t \\ t \end{smallmatrix} \right) \mid t \in \mathbb{K} \right\} = \operatorname{Vect}\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right)_{\mathscr{B}} \right)
\end{aligned}$$

Le noyau est donc de dimension 1. Par le théorème du rang, l'image $\operatorname{Im} f$ est de dimension 2. Les deux premiers vecteurs de la matrice A étant linéairement indépendants, ils engendrent $\operatorname{Im} f$: $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \right)_{\mathscr{B}}, \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \right)_{\mathscr{B}} \right)$.

6.4.2. Matrice de passage d'une base à une autre

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. On sait que toutes les bases de E ont n éléments.

> **Définition 5.**
> Soit $\mathscr{B}$ une base de E. Soit $\mathscr{B}'$ une autre base de E.
> On appelle **matrice de passage** de la base $\mathscr{B}$ vers la base $\mathscr{B}'$, et on note $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$, la matrice carrée de taille $n \times n$ dont la j-ème colonne est formée des coordonnées du j-ème vecteur de la base $\mathscr{B}'$, par rapport à la base $\mathscr{B}$.

On résume en :

La matrice de passage $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ contient - en colonnes - les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base $\mathscr{B}'$ exprimés dans l'ancienne base $\mathscr{B}$.

C'est pourquoi on note parfois aussi $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ par $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$.

Exemple 18.

Soit l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^2$. On considère

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad \epsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \epsilon_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

On considère la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ et la base $\mathcal{B}' = (\epsilon_1, \epsilon_2)$.

Quelle est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$?

Il faut exprimer ϵ_1 et ϵ_2 en fonction de (e_1, e_2). On calcule que :

$$\epsilon_1 = -e_1 + 2e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \qquad \epsilon_2 = e_1 + 4e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

La matrice de passage est donc :

$$\mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

On va interpréter une matrice de passage comme la matrice associée à l'application identité de E par rapport à des bases bien choisies.

Proposition 11.

La matrice de passage $\mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$ est la matrice associée à l'identité $\mathrm{id}_E : (E, \mathcal{B}') \to (E, \mathcal{B})$ où E est l'espace de départ muni de la base $\mathcal{B}'$, et E est aussi l'espace d'arrivée, mais muni de la base $\mathcal{B}$:

$$\boxed{\mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E)}$$

Faites bien attention à l'inversion de l'ordre des bases !

Cette interprétation est un outil fondamental pour ce qui suit. Elle permet d'obtenir les résultats de façon très élégante et avec un minimum de calculs.

Démonstration. On pose $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$. On considère

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{id}_E \;: & (E, \mathcal{B}') & \longrightarrow & (E, \mathcal{B}) \\ & x & \longmapsto & \mathrm{id}_E(x) = x \end{array}$$

On a $\mathrm{id}_E(e'_j) = e'_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E)$ est la matrice dont la j-ème colonne est formée des coordonnées de e'_j par rapport à $\mathcal{B}$, soit $\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$. Cette colonne est la j-ème colonne de $\mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$. $\square$

Proposition 12.

1. *La matrice de passage d'une base $\mathscr{B}$ vers une base $\mathscr{B}'$ est inversible et son inverse est égale à la matrice de passage de la base $\mathscr{B}'$ vers la base $\mathscr{B}$:* $\boxed{\mathrm{P}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} = \left(\mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\right)^{-1}}$
2. *Si $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}''$ sont trois bases, alors* $\boxed{\mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{B}''} = \mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times \mathrm{P}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''}}$

Démonstration.

1. On a $\mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}\left(\mathrm{id}_E\right)$. Donc, d'après le théorème 5 caractérisant la matrice d'un isomorphisme, $\mathrm{P}^{-1}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}\left(\mathrm{id}_E\right)\right)^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\left(\mathrm{id}_E^{-1}\right)$. Or $\mathrm{id}_E^{-1} = \mathrm{id}_E$, donc $\mathrm{P}^{-1}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\left(\mathrm{id}_E\right) = \mathrm{P}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$.
2. $\mathrm{id}_E : (E, \mathscr{B}'') \to (E, \mathscr{B})$ se factorise de la façon suivante :

$$(E, \mathscr{B}'') \xrightarrow{\mathrm{id}_E} (E, \mathscr{B}') \xrightarrow{\mathrm{id}_E} (E, \mathscr{B}).$$

Autrement dit, on écrit $\mathrm{id}_E = \mathrm{id}_E \circ \mathrm{id}_E$. Cette factorisation permet d'écrire l'égalité suivante : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'',\mathscr{B}}\left(\mathrm{id}_E\right) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}\left(\mathrm{id}_E\right) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'',\mathscr{B}'}\left(\mathrm{id}_E\right)$, soit $\mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{B}''} = \mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times \mathrm{P}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''}$.

□

Exemple 19.
Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathscr{B}$. Définissons

$$\mathscr{B}_1 = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad \mathscr{B}_2 = \left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\right).$$

Quelle est la matrice de passage de $\mathscr{B}_1$ vers $\mathscr{B}_2$?

On a d'abord

$$\mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{B}_1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\1 & -1 & 2\\0 & 0 & -1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{B}_2} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\-1 & 1 & 0\\0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

La proposition 12 implique que $\mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{B}_2} = \mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{B}_1} \times \mathrm{P}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}$. Donc on a $\mathrm{P}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2} = \mathrm{P}^{-1}_{\mathscr{B},\mathscr{B}_1} \times \mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{B}_2}$. En appliquant la méthode de Gauss pour calculer $\mathrm{P}^{-1}_{\mathscr{B},\mathscr{B}_1}$, on trouve alors :

$$\begin{aligned}
P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Nous allons maintenant étudier l'effet d'un changement de bases sur les coordonnées d'un vecteur.

- Soient $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ deux bases d'un même $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
- Soit $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ vers la base $\mathscr{B}'$.
- Pour $x \in E$, il se décompose en $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ dans la base $\mathscr{B}$ et on note
$$X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}.$$
- Ce même $x \in E$ se décompose en $x = \sum_{i=1}^n x'_i e'_i$ dans la base $\mathscr{B}'$ et on note
$$X' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(x) = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}_{\mathscr{B}'}.$$

Proposition 13.

$$\boxed{X = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times X'}$$

Notez bien l'ordre !

Démonstration. $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ est la matrice de $\mathrm{id}_E : (E, \mathscr{B}') \to (E, \mathscr{B})$. On utilise que $x = \mathrm{id}_E(x)$ et la proposition 10. On a :

$$X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(\mathrm{id}_E(x)\big) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{id}_E) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(x) = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times X'$$

□

6.4.3. Formule de changement de base

- Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.
- Soit $f : E \to F$ une application linéaire.
- Soient $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}'_E$ deux bases de E.
- Soient $\mathcal{B}_F$, $\mathcal{B}'_F$ deux bases de F.
- Soit $P = \mathrm{P}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}'_E}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}_E$ à $\mathcal{B}'_E$.
- Soit $Q = \mathrm{P}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}'_F}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}_F$ à $\mathcal{B}'_F$.
- Soit $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)$ la matrice de l'application linéaire f de la base $\mathcal{B}_E$ vers la base $\mathcal{B}_F$.
- Soit $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}'_F}(f)$ la matrice de l'application linéaire f de la base $\mathcal{B}'_E$ vers la base $\mathcal{B}'_F$.

Théorème 6 (Formule de changement de base)**.**

$$\boxed{B = Q^{-1}AP}$$

Démonstration. L'application $f : (E, \mathcal{B}'_E) \to (F, \mathcal{B}'_F)$ se factorise de la façon suivante :

$$(E, \mathcal{B}'_E) \xrightarrow{\mathrm{id}_E} (E, \mathcal{B}_E) \xrightarrow{f} (F, \mathcal{B}_F) \xrightarrow{\mathrm{id}_F} (F, \mathcal{B}'_F),$$

c'est-à-dire que $f = \mathrm{id}_F \circ f \circ \mathrm{id}_E$.
On a donc l'égalité de matrices suivante :

$$\begin{aligned} B &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}'_F}(f) \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}'_F}(\mathrm{id}_F) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}_E}(\mathrm{id}_E) \\ &= \mathrm{P}_{\mathcal{B}'_F,\mathcal{B}_F} \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f) \times \mathrm{P}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}'_E} \\ &= Q^{-1}AP \end{aligned}$$

□

Dans le cas particulier d'un endomorphisme, nous obtenons une formule plus simple :

- Soit $f : E \to E$ une application linéaire.
- Soient $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases de E.

- Soit $P = \mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.
- Soit $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ la matrice de l'application linéaire f dans la base $\mathscr{B}$.
- Soit $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$ la matrice de l'application linéaire f dans la base $\mathscr{B}'$.

Le théorème 6 devient alors :

Corollaire 3.

$$\boxed{B = P^{-1}AP}$$

Exemple 20.

Reprenons les deux bases de $\mathbb{R}^3$ de l'exemple 19 :

$$\mathscr{B}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \qquad \text{et} \qquad \mathscr{B}_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans la base $\mathscr{B}_1$ est :

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ -2 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Que vaut la matrice de f dans la base $\mathscr{B}_2$, $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(f)$?

1. Nous avions calculé que la matrice de passage de $\mathscr{B}_1$ vers $\mathscr{B}_2$ était

$$P = \mathrm{P}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. On calcule aussi $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. On applique la formule du changement de base du corollaire 3 :

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ -2 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

C'est souvent l'intérêt des changements de base, se ramener à une matrice plus simple. Par exemple ici, il est facile de calculer les puissances B^k, pour en déduire les A^k.

6.4.4. Matrices semblables

Les matrices considérées dans ce paragraphe sont des matrices carrées, éléments de $M_n(\mathbb{K})$.

> **Définition 6.**
> Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{K})$. On dit que la matrice B est **semblable** à la matrice A s'il existe une matrice inversible $P \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

C'est un bon exercice de montrer que la relation « être semblable » est une relation d'équivalence dans l'ensemble $M_n(\mathbb{K})$:

> **Proposition 14.**
>
> - *La relation est* **réflexive** *: une matrice A est semblable à elle-même.*
> - *La relation est* **symétrique** *: si A est semblable à B, alors B est semblable à A.*
> - *La relation est* **transitive** *: si A est semblable à B, et B est semblable à C, alors A est semblable à C.*

Vocabulaire :
Compte tenu de ces propriétés, on peut dire indifféremment que la matrice A est semblable à la matrice B ou que les matrices A et B sont semblables.
Le corollaire 3 se reformule ainsi :

> **Corollaire 4.**
> *Deux matrices semblables représentent le même endomorphisme, mais exprimé dans des bases différentes.*

Mini-exercices.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (2x + y, 3x - 2y)$, Soit $v = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ avec ses coordonnées dans la base canonique $\mathscr{B}_0$ de $\mathbb{R}^2$. Soit $\mathscr{B}_1 = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ une autre base de $\mathbb{R}^2$.

1. Calculer la matrice de f dans la base canonique.

2. Calculer les coordonnées de $f(v)$ dans la base canonique.
3. Calculer la matrice de passage de $\mathscr{B}_0$ à $\mathscr{B}_1$.
4. En déduire les coordonnées de v dans la base $\mathscr{B}_1$, et de $f(v)$ dans la base $\mathscr{B}_1$.
5. Calculer la matrice de f dans la base $\mathscr{B}_1$.

Même exercice dans $\mathbb{R}^3$ avec $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (x-2y, y-2z, z-2x)$, $v = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B}_1 = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

Chapitre 7

Déterminants

Le déterminant est un nombre que l'on associe à n vecteurs $(v_1, \ldots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$. Il correspond au volume du parallélépipède engendré par ces n vecteurs. On peut aussi définir le déterminant d'une matrice A. Le déterminant permet de savoir si une matrice est inversible ou pas, et de façon plus générale, joue un rôle important dans le calcul matriciel et la résolution de systèmes linéaires.

Dans tout ce qui suit, nous considérons des matrices à coefficients dans un corps commutatif $\mathbb{K}$, les principaux exemples étant $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Nous commençons par donner l'expression du déterminant d'une matrice en petites dimensions.

7.1. Déterminant en dimension 2 et 3

7.1.1. Matrice 2×2

En dimension 2, le déterminant est très simple à calculer :

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

C'est donc le produit des éléments sur la diagonale principale (en bleu) moins le produit des éléments sur l'autre diagonale (en orange).

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

7.1.2. Matrice 3×3

Soit $A \in M_3(\mathbb{K})$ une matrice 3×3 :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Voici la formule pour le déterminant :

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}\ .$$

Il existe un moyen facile de retenir cette formule, c'est la **règle de Sarrus** : on recopie les deux premières colonnes à droite de la matrice (colonnes grisées), puis on additionne les produits de trois termes en les regroupant selon la direction de la diagonale descendante (à gauche), et on soustrait ensuite les produits de trois termes regroupés selon la direction de la diagonale montante (à droite).

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

Exemple 1.

Calculons le déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Par la règle de Sarrus :

$$\begin{aligned} \det A = {} & 2 \times (-1) \times 1 + 1 \times 3 \times 3 + 0 \times 1 \times 2 \\ & - 3 \times (-1) \times 0 - 2 \times 3 \times 2 - 1 \times 1 \times 1 = -6. \end{aligned}$$

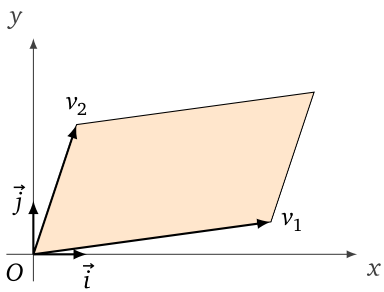
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Attention : cette méthode ne s'applique pas pour les matrices de taille supérieure à 3. Nous verrons d'autres méthodes qui s'appliquent aux matrices carrées de toute taille et donc aussi aux matrices 3×3.

7.1.3. Interprétation géométrique du déterminant

On va voir qu'en dimension 2, les déterminants correspondent à des aires et en dimension 3 à des volumes.

Donnons nous deux vecteurs $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} a \\ c \end{smallmatrix}\right)$ et $v_2 = \left(\begin{smallmatrix} b \\ d \end{smallmatrix}\right)$ du plan $\mathbb{R}^2$. Ces deux vecteurs v_1, v_2 déterminent un parallélogramme.



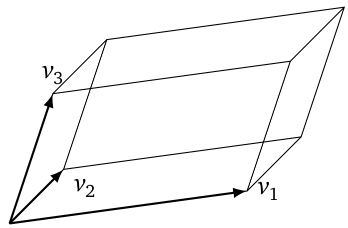
Proposition 1.
L'aire du parallélogramme est donnée par la valeur absolue du déterminant :

$$\mathscr{A} = \left|\det(v_1, v_2)\right| = \left|\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right|.$$

De manière similaire, trois vecteurs de l'espace $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$$

définissent un parallélépipède.



À partir de ces trois vecteurs on définit, en juxtaposant les colonnes, une matrice et un déterminant :

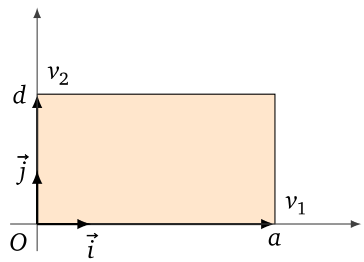
$$\det(v_1, v_2, v_3) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Proposition 2.
Le volume du parallélépipède est donné par la valeur absolue du déterminant :

$$\mathscr{V} = \Big| \det(v_1, v_2, v_3) \Big|.$$

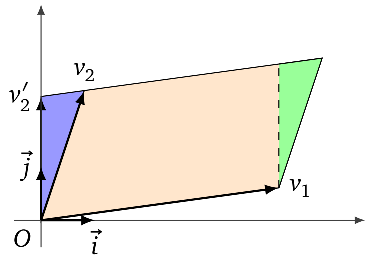
On prendra comme unité d'aire dans $\mathbb{R}^2$ l'aire du carré unité dont les côtés sont les vecteurs de la base canonique $\left(\binom{1}{0}, \binom{0}{1}\right)$, et comme unité de volume dans $\mathbb{R}^3$, le volume du cube unité.

Démonstration. Traitons le cas de la dimension 2. Le résultat est vrai si $v_1 = \binom{a}{0}$ et $v_2 = \binom{0}{d}$. En effet, dans ce cas on a affaire à un rectangle de côtés $|a|$ et $|d|$, donc d'aire $|ad|$, alors que le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ vaut ad.



Si les vecteurs v_1 et v_2 sont colinéaires alors le parallélogramme est aplati, donc d'aire nulle ; on calcule facilement que lorsque deux vecteurs sont colinéaires, leur déterminant est nul.

Dans la suite on suppose que les vecteurs ne sont pas colinéaires. Notons $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} a \\ c \end{smallmatrix}\right)$ et $v_2 = \left(\begin{smallmatrix} b \\ d \end{smallmatrix}\right)$. Si $a \neq 0$, alors $v_2' = v_2 - \frac{b}{a} v_1$ est un vecteur vertical : $v_2' = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ d - \frac{b}{a} c \end{smallmatrix}\right)$. L'opération de remplacer v_2 par v_2' ne change pas l'aire du parallélogramme (c'est comme si on avait coupé le triangle vert et on l'avait collé à la place le triangle bleu).

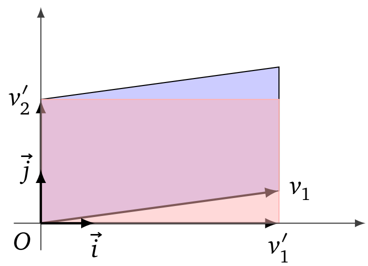


Cette opération ne change pas non plus le déterminant car on a toujours :

$$\det(v_1, v_2') = \det \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & d - \frac{b}{a} c \end{pmatrix} = ad - bc = \det(v_1, v_2).$$

On pose alors $v_1' = \left(\begin{smallmatrix} a \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$: c'est un vecteur horizontal. Encore une fois l'opération de remplacer v_1 par v_1' ne change ni l'aire des parallélogrammes ni le déterminant car

$$\det(v_1', v_2') = \det \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d - \frac{b}{a} c \end{pmatrix} = ad - bc = \det(v_1, v_2).$$



On s'est donc ramené au premier cas d'un rectangle aux côtés parallèles aux axes, pour lequel le résultat est déjà acquis.

Le cas tridimensionnel se traite de façon analogue. □

Mini-exercices.

1. Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}$ calculer les déterminants de A, B, $A \times B$, $A+B$, A^{-1}, λA, A^T.
2. Mêmes questions pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a' & 0 \\ c' & d' \end{pmatrix}$.
3. Mêmes questions pour $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
4. Calculer l'aire du parallélogramme défini par les vecteurs $\binom{7}{3}$ et $\binom{1}{4}$.
5. Calculer le volume du parallélépipède défini par les vecteurs $\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

7.2. Définition du déterminant

Cette partie est consacrée à la définition du déterminant. La définition du déterminant est assez abstraite et il faudra attendre encore un peu pour pouvoir vraiment calculer des déterminants.

7.2.1. Définition et premières propriétés

Nous allons caractériser le déterminant comme une application, qui à une matrice carrée associe un scalaire :

$$\det : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$$

Théorème 1 (Existence et d'unicité du déterminant)**.**
*Il existe une unique application de $M_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$, appelée **déterminant**, telle que*

(i) le déterminant est linéaire par rapport à chaque vecteur colonne, les autres étant fixés ;

(ii) si une matrice A a deux colonnes identiques, alors son déterminant est nul ;

(iii) le déterminant de la matrice identité I_n vaut 1.

Une preuve de l'existence du déterminant sera donnée plus bas en section 7.2.4. On note le déterminant d'une matrice $A=(a_{ij})$ par :

$$\det A \qquad \text{ou} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Si on note C_i la i-ème colonne de A, alors

$$\det A = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_n \end{vmatrix} = \det(C_1, C_2, \ldots, C_n).$$

Avec cette notation, la propriété (i) de linéarité par rapport à la colonne j s'écrit : pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\det(C_1, \ldots, \lambda C_j + \mu C'_j, \ldots, C_n) = \lambda \det(C_1, \ldots, C_j, \ldots, C_n) + \mu \det(C_1, \ldots, C'_j, \ldots, C_n)$, soit

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \lambda a_{1j} + \mu a'_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & \lambda a_{ij} + \mu a'_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \lambda a_{nj} + \mu a'_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$= \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a'_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a'_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Exemple 2.

$$\begin{vmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 7 & -10 & -3 \\ 12 & 25 & -1 \end{vmatrix} = 5 \times \begin{vmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 7 & -2 & -3 \\ 12 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

Car la seconde colonne est un multiple de 5.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4-3 \\ 7 & -5 & 3-2 \\ 9 & 2 & 10-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 7 & -5 & 3 \\ 9 & 2 & 10 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 7 & -5 & 2 \\ 9 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

Par linéarité sur la troisième colonne.

Remarque.

- Une application de $M_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ qui satisfait la propriété (i) est appelée **forme multilinéaire**.
- Si elle satisfait (ii), on dit qu'elle est **alternée**.

Le déterminant est donc la seule forme multilinéaire alternée qui prend comme valeur 1 sur la matrice I_n. Les autres formes multilinéaires alternées sont les multiples scalaires du déterminant. On verra plus loin comment on peut calculer en pratique les déterminants.

7.2.2. Premières propriétés

Nous connaissons déjà le déterminant de deux matrices :

- le déterminant de la matrice nulle 0_n vaut 0 (par la propriété (ii)),
- le déterminant de la matrice identité I_n vaut 1 (par la propriété (iii)).

Donnons maintenant quelques propriétés importantes du déterminant : comment se comporte le déterminant face aux opérations élémentaires sur les colonnes ?

Proposition 3.
Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice ayant les colonnes $C_1, C_2, \dots, C_n$. On note A' la matrice obtenue par une des opérations élémentaires sur les colonnes, qui sont :

1. *$C_i \leftarrow \lambda C_i$ avec $\lambda \neq 0$: A' est obtenue en multipliant une colonne de A par un scalaire non nul. Alors $\det A' = \lambda \det A$.*
2. *$C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ (et $j \neq i$) : A' est obtenue en ajoutant à une colonne de A un multiple d'une autre colonne de A. Alors $\det A' = \det A$.*
3. *$C_i \leftrightarrow C_j$: A' est obtenue en échangeant deux colonnes distinctes de A. Alors $\boxed{\det A' = -\det A}$.*

Plus généralement pour (2) : l'opération $C_i \leftarrow C_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \lambda_j C_j$ d'ajouter une combinaison linéaire des autres colonnes conserve le déterminant.
Attention ! Échanger deux colonnes change le signe du déterminant.

Démonstration.

1. La première propriété découle de la partie (i) de la définition du déterminant.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_i & \cdots & C_j & \cdots & C_n \end{pmatrix}$ une matrice représentée par ses vecteurs colonnes C_k. L'opération $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ transforme la matrice A en la matrice $A' = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_i + \lambda C_j & \cdots & C_j & \cdots & C_n \end{pmatrix}$. Par linéarité par rapport à la colonne i, on sait que
$$\det A' = \det A + \lambda \det \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_j & \cdots & C_j & \cdots & C_n \end{pmatrix}.$$
Or les colonnes i et j de la matrice $\begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_j & \cdots & C_j & \cdots & C_n \end{pmatrix}$ sont identiques, donc son déterminant est nul.
3. Si on échange les colonnes i et j de $A = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_i & \cdots & C_j & \cdots & C_n \end{pmatrix}$ on obtient la matrice $A' = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_i & \cdots & C_j & \cdots & C_n \end{pmatrix}$, où le vecteur C_j se retrouve en colonne i et le vecteur C_i en colonne j. Introduisons alors une troisième matrice $B = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_i + C_j & \cdots & C_j + C_i & \cdots & C_n \end{pmatrix}$. Cette matrice a deux colonnes distinctes égales, donc d'après (ii), $\det B = 0$.

   D'un autre côté, nous pouvons développer ce déterminant en utilisant la propriété (i) de multilinéarité, c'est-à-dire linéarité par rapport à chaque colonne. Ceci donne
$$\begin{aligned}
0 = \det B &= \det \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_i + C_j & \cdots & C_j + C_i & \cdots & C_n \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_i & \cdots & C_j + C_i & \cdots & C_n \end{pmatrix} \\
&\quad + \det \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_j & \cdots & C_j + C_i & \cdots & C_n \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_i & \cdots & C_j & \cdots & C_n \end{pmatrix} \\
&\quad + \det \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_i & \cdots & C_i & \cdots & C_n \end{pmatrix} \\
&\quad + \det \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_j & \cdots & C_j & \cdots & C_n \end{pmatrix} \\
&\quad + \det \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_j & \cdots & C_i & \cdots & C_n \end{pmatrix} \\
&= \det A + 0 + 0 + \det A',
\end{aligned}$$
encore grâce à (i) pour les deux déterminants nuls du milieu.

□

Corollaire 1.
Si une colonne C_i de la matrice A est combinaison linéaire des autres colonnes, alors $\det A = 0$.

7.2.3. Déterminants de matrices particulières

Calculer des déterminants n'est pas toujours facile. Cependant il est facile de calculer le déterminant de matrices triangulaires.

Proposition 4.
Le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure (ou inférieure) est égal au produit des termes diagonaux.

Autrement dit, pour une matrice triangulaire $A = (a_{ij})$ on a

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}.$$

Comme cas particulièrement important on obtient :

Corollaire 2.
Le déterminant d'une matrice diagonale est égal au produit des termes diagonaux.

Démonstration. On traite le cas des matrices triangulaires supérieures (le cas des matrices triangulaires inférieures est identique). Soit donc

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

La façon de procéder utilise l'algorithme du pivot de Gauss (sur les colonnes, alors qu'il est en général défini sur les lignes). Par linéarité par rapport à la première colonne, on a

$$\det A = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

On soustrait maintenant de chaque colonne C_j, pour $j \geqslant 2$, la colonne C_1 multipliée par $-a_{1j}$. C'est l'opération élémentaire $C_j \leftarrow C_j - a_{1j}C_1$. Ceci ne modifie pas le déterminant d'après la section précédente. Il vient donc

$$\det A = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Par linéarité par rapport à la deuxième colonne, on en déduit

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

et l'on continue ainsi jusqu'à avoir parcouru toutes les colonnes de la matrice. Au bout de n étapes, on a obtenu

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdots a_{nn} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdots a_{nn} \cdot \det I_n,$$

d'où le résultat, car $\det I_n = 1$, par (iii). □

7.2.4. Démonstration de l'existence du déterminant

La démonstration du théorème d'existence du déterminant, exposée ci-dessous, est ardue et pourra être gardée pour une seconde lecture. Par ailleurs, l'unicité du déterminant, plus difficile, est admise.

Pour démontrer l'existence d'une application satisfaisant aux conditions (i), (ii), (iii) du théorème-définition 1, on donne une formule qui, de plus, nous offre une autre méthode de calcul pratique du déterminant d'une matrice, et on vérifie que les propriétés caractéristiques des déterminants sont satisfaites. On retrouvera cette formule, dite de développement par rapport à une ligne, en section 7.4.2.

Notation. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée de taille $n \times n$. Il est évident que si l'on supprime une ligne et une colonne dans A, la matrice obtenue a $n-1$ lignes et $n-1$ colonnes. On note $A_{i,j}$ ou A_{ij} la matrice obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne de A. Le théorème d'existence peut s'énoncer de la façon suivante :

Théorème 2 (Existence du déterminant)**.**
Les formules suivantes définissent par récurrence, pour $n \geqslant 1$, une application de $M_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ qui satisfait aux propriétés (i), (ii), (iii) caractérisant le déterminant :

- ***Déterminant d'une matrice** 1×1. Si $a \in \mathbb{K}$ et $A = (a)$, $\det A = a$.*
- ***Formule de récurrence.** Si $A = (a_{i,j})$ est une matrice carrée de taille $n \times n$, alors pour tout i fixé*

$$\det A = (-1)^{i+1} a_{i,1} \det A_{i,1} + (-1)^{i+2} a_{i,2} \det A_{i,2} + \cdots + (-1)^{i+n} a_{i,n} \det A_{i,n}.$$

Démonstration. La preuve se fait par récurrence sur l'ordre des matrices.

Initialisation. Dans le cas $n = 1$, il est évident que toutes les propriétés souhaitées sont satisfaites.

Hérédité. Supposons maintenant que l'application $\det : M_{n-1}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ soit définie et satisfasse les propriétés (i), (ii) et (iii). Pour faciliter l'exposition, la preuve va être faite pour $i = n$. Soit $A = (a_{i,j})$ notée aussi $A = (C_1 \ \cdots \ C_n)$ où $C_j = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$

est la j-ème colonne de A. On notera aussi $\bar{C}_j = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n-1,j} \end{pmatrix}$ la colonne à $(n-1)$ éléments, égale à C_j privée de son dernier coefficient.

- **Propriété (i).**

  Il s'agit de vérifier que l'application

$$A \mapsto \det A = (-1)^{n+1} a_{n,1} \det A_{n,1} + (-1)^{n+2} a_{n,2} \det A_{n,2} + \cdots + (-1)^{n+n} a_{n,n} \det A_{n,n}$$

  est linéaire par rapport à chaque colonne. Nous allons le prouver pour la dernière colonne, c'est-à-dire que :

$$\det(C_1, \ldots, C_{n-1}, \lambda C'_n + \mu C''_n) = \lambda \det(C_1, \ldots, C_{n-1}, C'_n) + \mu \det(C_1, \ldots, C_{n-1}, C''_n).$$

  Notons A, A', A'' les matrices $(C_1 \cdots C_{n-1} \cdots \lambda C'_n + \mu C''_n)$, $(C_1 \cdots C_{n-1} \cdots C'_n)$ et $(C_1 \cdots C_{n-1} \cdots C''_n)$, et $A_{n,j}$, $A'_{n,j}$, $A''_{n,j}$ les sous-matrices extraites en enlevant n-ème ligne et la j-ème colonne. En comparant les différentes matrices, on constate que $a'_{n,j} = a''_{n,j} = a_{n,j}$ si $j < n$ tandis que $a_{n,n} = \lambda a'_{n,n} + \mu a''_{n,n}$. Similairement, $A'_{n,n} = A''_{n,n} = A_{n,n} = (\bar{C}_1 \cdots \bar{C}_{n-1})$ puisque la n-ème colonne est enlevée. Par contre, pour $j < n$, $A_{n,j}, A'_{n,j}, A''_{n,j}$ ont leurs $(n-2)$ premières colonnes identiques, et diffèrent par la dernière. Comme ce sont des déterminants de taille $n-1$, on peut utiliser l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}
\det A_{n,j} &= \det(\bar{C}_1, \ldots, \bar{C}_{j-1}, \bar{C}_{j+1}, \ldots, \bar{C}_{n-1}, \lambda \bar{C}'_n + \mu \bar{C}''_n) \\
&= \lambda \det(\bar{C}_1, \ldots, \bar{C}_{j-1}, \bar{C}_{j+1}, \ldots, \bar{C}_{n-1}, \bar{C}'_n) \\
&\quad + \mu \det(\bar{C}_1, \ldots, \bar{C}_{j-1}, \bar{C}_{j+1}, \ldots, \bar{C}_{n-1}, \bar{C}''_n) \\
&= \lambda \det A'_{n,j} + \mu \det A''_{n,j}
\end{aligned}$$

  Finalement, en mettant de côté dans la somme le n-ème terme :

$$\begin{aligned}
\det A &= (-1)^{n+1} a_{n,1} \det A_{n,1} + (-1)^{n+2} a_{n,2} \det A_{1,2} + \cdots + (-1)^{n+n} a_{n,n} \det A_{n,n} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n+j} a_{n,j} \det A_{n,j} \right) + (-1)^{2n} a_{n,n} \det A_{n,n} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n+j} a_{n,j} (\lambda \det A'_{n,j} + \mu \det A''_{n,j}) \right) + (-1)^{2n} (\lambda a'_{n,n} + \mu a''_{n,n}) \det A_{n,n} \\
&= \lambda \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j} a'_{n,j} \det A'_{n,j} + \mu \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j} a''_{n,j} \det A''_{n,j} \\
&= \lambda \det A' + \mu \det A''
\end{aligned}$$

La démonstration est similaire pour les autres colonnes (on peut aussi utiliser la propriété (ii) ci-dessous).

- **Propriété (ii).**

  Supposons que $C_r = C_s$ pour $r < s$. Si k est différent de r et de s, la matrice $A_{n,k}$ possède encore deux colonnes identiques $\bar{C}_r$ et $\bar{C}_s$. Par hypothèse de récurrence, $\det A_{n,k} = 0$. Par conséquent,

  $$\det A = (-1)^{n+r} \det A_{n,r} + (-1)^{n+s} \det A_{n,s}$$

  Or $A_{n,r}$ et $A_{n,s}$ possèdent toutes les deux les mêmes colonnes : $A_{n,r} = (\bar{C}_1 \cdots \bar{C}_{r-1} \bar{C}_{r+1} \cdots \bar{C}_s \cdots \bar{C}_n)$ et $A_{n,s} = (\bar{C}_1 \cdots \bar{C}_r \cdots \bar{C}_{s-1} \bar{C}_{s+1} \cdots \bar{C}_n)$, car $\bar{C}_r = \bar{C}_s$. Pour passer de $A_{n,s}$ à $A_{n,r}$, il faut faire $s - r - 1$ échanges de colonnes $\bar{C}_j \leftrightarrow \bar{C}_{j+1}$ successifs, qui par hypothèse de récurrence changent le signe par $(-1)^{s-r-1}$: $\det A_{n,s} = (-1)^{s-r-1} \det A_{n,r}$. On conclut immédiatement que

  $$\det A = \left((-1)^{n+r} + (-1)^{n+2s-r-1}\right) \det A_{n,r} = 0\,.$$

- **Propriété (iii).** Si l'on considère pour A la matrice identité I_n, ses coefficients $a_{i,j}$ sont tels que :

  $$\begin{aligned} i = j &\Longrightarrow a_{i,j} = 1 \\ i \neq j &\Longrightarrow a_{i,j} = 0. \end{aligned}$$

  Donc $\det I_n = (-1)^{n+n} \det A_{n,n}$. Or, la matrice $A_{n,n}$ obtenue à partir de la matrice identité en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne est la matrice identité de taille $(n-1) \times (n-1)$. Par hypothèse de récurrence, on a $\det I_{n-1} = 1$. On en déduit $\det I_n = 1$.

Conclusion. Le principe de récurrence termine la preuve du théorème d'existence du déterminant. □

Remarque.

La définition donnée ci-dessus suppose le choix d'un indice i de ligne ($i = n$ dans la démonstration) et peut paraître arbitraire. Alors se pose naturellement la question : que se passe-t-il si l'on prend une autre valeur de i ? L'unicité du déterminant d'une matrice permet de répondre : quelle que soit la ligne choisie, le résultat est le même.

Mini-exercices.

1. En utilisant la linéarité du déterminant, calculer $\det(-I_n)$.
2. Pour $A \in M_n(\mathbb{K})$, calculer $\det(\lambda A)$ en fonction de $\det A$.
3. Montrer que le déterminant reste invariant par l'opération $C_i \leftarrow C_i + \sum_{\substack{j=1..n \\ j\neq i}} \lambda_j C_j$ (on ajoute à une colonne de A une combinaison linéaire des autres colonnes de A).

7.3. Propriétés du déterminant

Nous allons voir trois propriétés importantes du déterminant : le déterminant d'un produit de matrices, le déterminant de l'inverse d'une matrice, le déterminant de la transposée d'une matrice. Pour prouver ces propriétés, nous aurons besoin des matrices élémentaires.

7.3.1. Déterminant et matrices élémentaires

Pour chacune des opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice A, on associe une matrice élémentaire E, telle que la matrice obtenue par l'opération élémentaire sur A soit $A' = A \times E$.

1. $C_i \leftarrow \lambda C_i$ avec $\lambda \neq 0$: $E_{C_i \leftarrow \lambda C_i} = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, \lambda, 1, \ldots, 1)$ est la matrice diagonale ne comportant que des 1, sauf en position (i,i) ;
2. $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ (et $j \neq i$) : $E_{C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j}$ est comme la matrice identité, sauf en position (j,i) où son coefficient vaut λ ;
3. $C_i \leftrightarrow C_j$: $E_{C_i \leftrightarrow C_j}$ est comme la matrice identité, sauf que ses coefficients (i,i) et (j,j) s'annulent, tandis que les coefficients (i,j) et (j,i) valent 1.

$$E_{C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & \lambda & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \qquad E_{C_i \leftrightarrow C_j} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & 0 & & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & & 0 & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Nous allons détailler le cas de chaque opération et son effet sur le déterminant :

Proposition 5.

1. $\det E_{C_i \leftarrow \lambda C_i} = \lambda$
2. $\det E_{C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j} = +1$
3. $\det E_{C_i \leftrightarrow C_j} = -1$
4. *Si E est une des matrices élémentaires ci-dessus,* $\det(A \times E) = \det A \times \det E$

Démonstration. Nous utilisons les propositions 3 et 4.

1. La matrice $E_{C_i \leftarrow \lambda C_i}$ est une matrice diagonale, tous les éléments diagonaux valent 1, sauf un qui vaut λ. Donc son déterminant vaut λ.
2. La matrice $E_{C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j}$ est triangulaire inférieure ou supérieure avec des 1 sur la diagonale. Donc son déterminant vaut 1.
3. La matrice $E_{C_i \leftrightarrow C_j}$ est aussi obtenue en échangeant les colonnes i et j de la matrice I_n. Donc son déterminant vaut -1.
4. La formule $\det A \times E = \det A \times \det E$ est une conséquence immédiate de la proposition 3.

□

Cette proposition nous permet de calculer le déterminant d'une matrice A de façon relativement simple, en utilisant l'algorithme de Gauss. En effet, si en multipliant successivement A par des matrices élémentaires $E_1, \ldots, E_r$ on obtient une matrice T échelonnée, donc triangulaire

$$T = A \cdot E_1 \cdots E_r$$

alors, en appliquant r-fois la proposition précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} \det T &= \det(A \cdot E_1 \cdots E_r) \\ &= \det(A \cdot E_1 \cdots E_{r-1}) \cdot \det E_r \\ &= \cdots \\ &= \det A \cdot \det E_1 \cdot \det E_2 \cdots \det E_r \end{aligned}$$

Comme on sait calculer le déterminant de la matrice triangulaire T et les déterminants des matrices élémentaires E_i, on en déduit le déterminant de A.
En pratique cela ce passe comme sur l'exemple suivant.

Exemple 3.

Calculer $\det A$, où $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & -6 & 6 \\ 5 & 9 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
\det A &= \det \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & -6 & 6 \\ 5 & 9 & 1 \end{pmatrix} \\
&\quad \text{(opération } C_1 \leftrightarrow C_2 \text{ pour avoir un pivot en haut à gauche)} \\
&= (-1) \times \det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -6 & 1 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \end{pmatrix} \\
&\quad (C_1 \leftarrow \tfrac{1}{3} C_1 \text{, linéarité par rapport à la première colonne)} \\
&= (-1) \times 3 \times \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \\
&= (-1) \times 3 \times \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 10 \\ 3 & 5 & -5 \end{pmatrix} \qquad C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1 \\
&= (-1) \times 3 \times \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -55 \end{pmatrix} \qquad C_3 \leftarrow C_3 - 10C_2 \\
&= (-1) \times 3 \times (-55) \qquad \text{car la matrice est triangulaire} \\
&= 165
\end{aligned}$$

7.3.2. Déterminant d'un produit

Théorème 3.

$$\boxed{\det(AB) = \det A \cdot \det B}$$

Démonstration. La preuve utilise les matrices élémentaires ; en effet, par la proposition 5, pour A une matrice quelconque et E une matrice d'une opération élémentaire alors :

$$\det(A \times E) = \det A \times \det E.$$

Passons maintenant à la démonstration du théorème. On a vu dans le chapitre « Matrices » qu'une matrice B est inversible si et seulement si sa forme échelonnée réduite par le pivot de Gauss est égale à I_n, c'est-à-dire qu'il existe des matrices élémentaires E_i telles que

$$BE_1 \cdots E_r = I_n\,.$$

D'après la remarque préliminaire appliquée r fois, on a

$$\det(B \cdot E_1 E_2 \cdots E_r) = \det B \cdot \det E_1 \cdot \det E_2 \cdots \det E_r = \det I_n = 1$$

On en déduit

$$\det B = \frac{1}{\det E_1 \cdots \det E_r}\cdot$$

Pour la matrice AB, il vient

$$(AB) \cdot (E_1 \cdots E_r) = A \cdot I_n = A.$$

Ainsi

$$\det(ABE_1 \cdots E_r) = \det(AB) \cdot \det E_1 \cdots \det E_r = \det A.$$

Donc :

$$\det(AB) = \det A \times \frac{1}{\det E_1 \cdots \det E_r} = \det A \times \det B.$$

D'où le résultat dans ce cas.

Si B n'est pas inversible, $\operatorname{rg} B < n$, il existe donc une relation de dépendance linéaire entre les colonnes de B, ce qui revient à dire qu'il existe un vecteur colonne X tel que $BX = 0$. Donc $\det B = 0$, d'après le corollaire 1. Or $BX = 0$ implique $(AB)X = 0$. Ainsi AB n'est pas inversible non plus, d'où $\det(AB) = 0 = \det A \det B$ dans ce cas également.

□

7.3.3. Déterminant des matrices inversibles

Comment savoir si une matrice est inversible ? Il suffit de calculer son déterminant !

> **Corollaire 3.**
> *Une matrice carrée A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.*
> *De plus si A est inversible, alors :*

$$\boxed{\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det A}}$$

Démonstration.

- Si A est inversible, il existe une matrice A^{-1} telle que $AA^{-1} = I_n$, donc $\det(A)\det(A^{-1}) = \det I_n = 1$. On en déduit que $\det A$ est non nul et $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.
- Si A n'est pas inversible, alors elle est de rang strictement inférieur à n. Il existe donc une relation de dépendance linéaire entre ses colonnes, c'est-à-dire qu'au moins l'une de ses colonnes est combinaison linéaire des autres. On en déduit $\det A = 0$.

□

Exemple 4.
Deux matrices semblables ont même déterminant.
En effet : soit $B = P^{-1}AP$ avec $P \in GL_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible. Par multiplicativité du déterminant, on en déduit que :

$$\det B = \det(P^{-1}AP) = \det P^{-1} \det A \det P = \det A,$$

puisque $\det P^{-1} = \frac{1}{\det P}$.

7.3.4. Déterminant de la transposée

Corollaire 4.

$$\boxed{\det\left(A^T\right) = \det A}$$

Démonstration. Commençons par remarquer que la matrice E d'une opération élémentaire est soit triangulaire (substitution), soit symétrique c'est-à-dire égale à sa transposée (échange de lignes et homothétie). On vérifie facilement que $\det E^T = \det E$.

Supposons d'abord que A soit inversible. On peut alors l'écrire comme produit de matrices élémentaires, $A = E_1 \cdots E_r$. On a alors

$$A^T = E_r^T \cdots E_1^T$$

et

$$\det(A^T) = \det(E_r^T) \cdots \det(E_1^T) = \det(E_r) \cdots \det(E_1) = \det(A).$$

D'autre part, si A n'est pas inversible, alors A^T n'est pas inversible non plus, et $\det A = 0 = \det A^T$.

□

Remarque.

Une conséquence du dernier résultat, est que par transposition, tout ce que l'on a dit des déterminants à propos des colonnes est vrai pour les lignes. Ainsi, le déterminant est multilinéaire par rapport aux lignes, si une matrice a deux lignes égales, son déterminant est nul, on ne modifie pas un déterminant en ajoutant à une ligne une combinaison linéaire des autres lignes, etc.

Voici le détail pour les opérations élémentaires sur les lignes :

1. $L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \neq 0$: le déterminant est multiplié par λ.
2. $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ (et $j \neq i$) : le déterminant ne change pas.
3. $L_i \leftrightarrow L_j$: le déterminant change de signe.

Mini-exercices.

1. Soient $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 3 \\ 0 & b & 2 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & d & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer, lorsque c'est possible, les déterminants des matrices A, B, A^{-1}, B^{-1}, A^T, B^T, AB, BA.
2. Calculer le déterminant de chacune des matrices suivantes en se ramenant par des opérations élémentaires à une matrice triangulaire.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix} \text{ avec } j = e^{\frac{2i\pi}{3}} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{pmatrix}$$

7.4. Calculs de déterminants

Une des techniques les plus utiles pour calculer un déterminant est le « développement par rapport à une ligne (ou une colonne) ».

7.4.1. Cofacteur

Définition 1.
Soit $A = \left(a_{ij}\right) \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.

- On note A_{ij} la matrice extraite, obtenue en effaçant la ligne i et la colonne j de A.
- Le nombre $\det A_{ij}$ est un **mineur d'ordre $n-1$** de la matrice A.
- Le nombre $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ est le **cofacteur** de A relatif au coefficient a_{ij}.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Exemple 5.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculons $A_{11}, C_{11}, A_{32}, C_{32}$.

$$A_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2} \det A_{32} = (-1) \times (-11) = 11.$$

Pour déterminer si $C_{ij} = +\det A_{ij}$ ou $C_{ij} = -\det A_{ij}$, on peut se souvenir que l'on associe des signes en suivant le schéma d'un échiquier :

$$A = \begin{pmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

Donc $C_{11} = +\det A_{11}$, $C_{12} = -\det A_{12}$, $C_{21} = -\det A_{21}$...

7.4.2. Développement suivant une ligne ou une colonne

Théorème 4 (Développement suivant une ligne ou une colonne)**.**
Formule de développement par rapport à la ligne i :

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$$

Formule de développement par rapport à la colonne j :

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$$

Démonstration. Nous avons déjà démontré la formule de développement suivant une ligne lors de la démonstration du théorème 1 d'existence et d'unicité du déterminant. Comme $\det A = \det A^T$, on en déduit la formule de développement par rapport à une colonne. $\square$

Exemple 6.
Retrouvons la formule des déterminants 3 × 3, déjà présentée par la règle de Sarrus, en développement par rapport à la première ligne.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} \\
&= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) \\
&\quad + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} + a_{12}a_{31}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} \\
&\quad + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22}.
\end{aligned}$$

7.4.3. Exemple

Exemple 7.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

On choisit de développer par rapport à la seconde colonne (car c'est là qu'il y a le plus de zéros) :

$$\begin{aligned}
\det A &= 0C_{12} + 2C_{22} + 3C_{32} + 0C_{42} \\
&\qquad \text{(développement par rapport à la deuxième colonne)} \\
&= +2\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\
&\qquad \text{on n'oublie pas les signes des cofacteurs et on recommence} \\
&\quad \text{en développant chacun de ces deux déterminants } 3 \times 3 \\
&= +2\left(+4\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right) \\
&\qquad \text{(par rapport à la première colonne)} \\
&\quad -3\left(-4\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right) \\
&\qquad \text{(par rapport à la deuxième ligne)} \\
&= +2\big(+4 \times 5 - 0 + 1 \times (-4)\big) - 3\big(-4 \times 7 + 1 \times 11 - 0\big) \\
&= 83
\end{aligned}$$

Remarque.

Le développement par rapport à une ligne permet de ramener le calcul d'un déterminant $n \times n$ à celui de n déterminants $(n-1) \times (n-1)$. Par récurrence descendante, on se ramène ainsi au calcul de $n!$ sous-déterminants, ce qui devient vite fastidieux. C'est pourquoi le développement par rapport à une ligne ou une colonne n'est utile pour calculer explicitement un déterminant que si la matrice de départ a beaucoup de zéros. On commence donc souvent par faire apparaître un maximum de zéros par des opérations élémentaires sur les lignes et/ou les colonnes qui ne modifient pas le déterminant, avant de développer le déterminant suivant la ligne ou la colonne qui a le plus de zéros.

7.4.4. Inverse d'une matrice

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.

Nous lui associons la matrice C des cofacteurs, appelée **comatrice**, et notée $\mathrm{Com}(A)$:

$$C = (C_{ij}) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

Théorème 5.

Soient A une matrice inversible, et C sa comatrice. On a alors

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} C^T}$$

Exemple 8.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Le calcul donne que $\det A = 2$. La comatrice C s'obtient en calculant 9 déterminants 2×2 (sans oublier les signes $+/-$). On trouve :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et donc} \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot C^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La démonstration se déduit directement du lemme suivant.

Lemme 1.

Soit A une matrice (inversible ou pas) et C sa comatrice. Alors $AC^T = (\det A) I_n$, autrement dit

$$\sum_k a_{ik} C_{jk} = \begin{cases} \det A & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Démonstration. Le terme de position (i, j) dans AC^T est $\sum_k a_{ik} C_{jk}$, et donc si $i = j$, le résultat découle de la formule de développement par rapport à la ligne i.

Pour le cas $i \neq j$, imaginons que l'on remplace A par une matrice $A' = (a'_{ij})$ identique, si ce n'est que la ligne L_j est remplacée par la ligne L_i, autrement dit $a'_{jk} = a_{ik}$ pour tout k. De plus, comme A' possède deux lignes identiques, son déterminant est nul. On appelle C' la comatrice de A', et la formule de développement pour la ligne j de A' donne

$$0 = \det A' = \sum_k a'_{jk} C'_{jk} = \sum_k a_{ik} C'_{jk}$$

Or, C'_{jk} se calcule à partir de la matrice extraite A'_{jk}, qui ne contient que les éléments de A' sur les lignes différentes de j et colonnes différents de k. Mais sur les lignes différentes de j, A' est identique à A, donc $C'_{jk} = C_{jk}$. On conclut que $\sum_k a_{ik} C_{jk} = 0$.

Finalement,

$$AC^T = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \det A \end{pmatrix} = \det A \cdot I$$

et en particulier, si $\det A \neq 0$, c'est-à-dire si A est inversible, alors on a

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} C^T .$$

□

Mini-exercices.

1. Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} t & 0 & t \\ 0 & t & 0 \\ -t & 0 & t \end{pmatrix}$. Calculer les matrices extraites, les mineurs d'ordre 2 et les cofacteurs de chacune des matrices A et B. En déduire le déterminant de A et de B. En déduire l'inverse de A et de B lorsque c'est possible.

2. Par développement suivant une ligne (ou une colonne) bien choisie, calculer les déterminants :
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} t & 0 & 1 & 0 \\ 1 & t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \end{vmatrix}$$

3. En utilisant la formule de développement par rapport à une ligne, recal-

culer le déterminant d'une matrice triangulaire.

7.5. Applications des déterminants

Nous allons voir plusieurs applications des déterminants.

7.5.1. Méthode de Cramer

Le théorème suivant, appelé **règle de Cramer**, donne une formule explicite pour la solution de certains systèmes d'équations linéaires ayant autant d'équations que d'inconnues. Considérons le système d'équations linéaires à n équations et n inconnues suivant :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \cdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

Ce système peut aussi s'écrire sous forme matricielle $AX = B$ où

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K}), \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Définissons la matrice $A_j \in M_n(\mathbb{K})$ par

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Autrement dit, A_j est la matrice obtenue en remplaçant la j-ème colonne de A par le second membre B. La règle de Cramer va nous permettre de calculer la solution du système dans le cas où $\det A \neq 0$ en fonction des déterminants des matrices A et A_j.

Théorème 6 (Règle de Cramer)**.**
Soit

$$AX = B$$

un système de n équations à n inconnues. Supposons que $\det A \neq 0$. *Alors l'unique solution* $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *du système est donnée par :*

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} \qquad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} \qquad \dots \qquad x_n = \frac{\det A_n}{\det A}.$$

Démonstration. Nous avons supposé que $\det A \neq 0$. Donc A est inversible. Alors $X = A^{-1}B$ est l'unique solution du système. D'autre part, nous avons vu que $A^{-1} = \frac{1}{\det A} C^T$ où C est la comatrice. Donc $X = \frac{1}{\det A} C^T B$. En développant,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} C_{11} & \dots & C_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} C_{11}b_1 + C_{21}b_2 + \cdots + C_{n1}b_n \\ \vdots \\ C_{1n}b_1 + C_{2n}b_2 + \cdots + C_{nn}b_n \end{pmatrix}$$

C'est-à-dire

$$x_1 = \frac{C_{11}b_1 + \cdots + C_{n1}b_n}{\det A}, \; x_i = \frac{C_{1i}b_1 + \cdots + C_{ni}b_n}{\det A}, \; x_n = \frac{C_{1n}b_1 + \cdots + C_{nn}b_n}{\det A}$$

Mais $b_1 C_{1i} + \cdots + b_n C_{ni}$ est le développement en cofacteurs de $\det A_i$ par rapport à sa i-ème colonne. Donc

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}.$$

□

Exemple 9.
Résolvons le système suivant :

$$\begin{cases} x_1 & & + \; 2x_3 = 6 \\ -3x_1 & + \; 4x_2 & + \; 6x_3 = 30 \\ -x_1 & - \; 2x_2 & + \; 3x_3 = 8. \end{cases}$$

On a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 6 \\ 30 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

et

$$\det A = 44 \qquad \det A_1 = -40 \qquad \det A_2 = 72 \qquad \det A_3 = 152.$$

La solution est alors

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = -\frac{40}{44} = -\frac{10}{11} \quad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{72}{44} = \frac{18}{11} \quad x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{152}{44} = \frac{38}{11}.$$

La méthode de Cramer n'est pas la méthode la plus efficace pour résoudre un système, mais est utile si le système contient des paramètres.

7.5.2. Déterminant et base

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Fixons une base $\mathscr{B}$ de E. On veut décider si n vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_n$ forment aussi une base de E. Pour cela, on écrit la matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ dont la j-ème colonne est formée des coordonnées du vecteur v_j par rapport à la base $\mathscr{B}$ (comme pour la matrice de passage). Le calcul de déterminant apporte la réponse à notre problème.

Théorème 7.
Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n, et $v_1, v_2, \ldots, v_n$, n vecteurs de E. Soit A la matrice obtenue en juxtaposant les coordonnées des vecteurs par rapport à une base $\mathscr{B}$ de E. Les vecteurs $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ forment une base de E si et seulement si $\det A \neq 0$.

Corollaire 5.
Une famille de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} \quad \cdots \quad \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

forme une base si et seulement si $\det(a_{ij}) \neq 0$.

Exemple 10.
Pour quelles valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$ les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$$

forment une base de $\mathbb{R}^3$? Pour répondre, il suffit de calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & b & 0 \\ b & 0 & a \end{vmatrix} = -a^3 - b^3 .$$

Conclusion : si $a^3 \neq -b^3$ alors les trois vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^3$. Si $a^3 = -b^3$ alors les trois vecteurs sont liés. (Exercice : montrer que $a^3 + b^3 = 0$ si et seulement si $a = -b$.)

Démonstration. La preuve fait appel à des résultats du chapitre « Matrices et applications linéaires » (section « Rang d'une famille de vecteurs ») :

$$\begin{aligned} (v_1, v_2, \ldots, v_n) \text{ forment une base} \quad &\iff \quad \mathrm{rg}(v_1, v_2, \ldots, v_n) = n \\ &\iff \quad \mathrm{rg} A = n \\ &\iff \quad A \text{ est inversible} \\ &\iff \quad \det A \neq 0 \end{aligned}$$

□

7.5.3. Mineurs d'une matrice

> **Définition 2.**
> Soit $A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Soit k un entier inférieur à n et à p. On appelle **mineur d'ordre k** le déterminant d'une matrice carrée de taille k obtenue à partir de A en supprimant $n-k$ lignes et $p-k$ colonnes.

Noter que A n'a pas besoin d'être une matrice carrée.

Exemple 11.
Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

- Un mineur d'ordre 1 est simplement un coefficient de la matrice A.
- Un mineur d'ordre 2 est le déterminant d'une matrice 2×2 extraite de A. Par exemple en ne retenant que la ligne 1 et 3 et la colonne 2 et 4, on obtient la matrice extraite $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$. Donc un des mineurs d'ordre 2 de A est $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 6$.
- Un mineur d'ordre 3 est le déterminant d'une matrice 3×3 extraite de A. Par exemple, en ne retenant que les colonnes 1, 3 et 4 on obtient le mineur
$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 7 \\ 0 & 6 & 5 \end{vmatrix} = -28$$
- Il n'y a pas de mineur d'ordre 4 (car la matrice n'a que 3 lignes).

7.5.4. Calcul du rang d'une matrice

Rappelons la définition du rang d'une matrice.

Définition 3.
Le **rang** d'une matrice est la dimension de l'espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes. C'est donc le nombre maximum de vecteurs colonnes linéairement indépendants.

Théorème 8.
Le rang d'une matrice $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ est le plus grand entier r tel qu'il existe un mineur d'ordre r extrait de A non nul.

La preuve sera vue en section 7.5.6.

Exemple 12.
Soit α un paramètre réel. Calculons le rang de la matrice $A \in M_{3,4}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

- Clairement, le rang ne peut pas être égal à 4, puisque 4 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ ne sauraient être indépendants.
- On obtient les mineurs d'ordre 3 de A en supprimant une colonne. Calculons le mineur d'ordre 3 obtenu en supprimant la première colonne, en le développant par rapport à *sa* première colonne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ \alpha & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ \alpha & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \alpha - 2\,.$$

  Par conséquent, si $\alpha \neq 2$, le mineur précédent est non nul et le rang de la matrice A est 3.
- Si $\alpha = 2$, on vérifie que les 4 mineurs d'ordre 3 de A sont nuls :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

  Donc dans ce cas, A est de rang inférieur ou égal à 2. Or $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$ (lignes $1,2$, colonnes $1,2$ de A) est un mineur d'ordre 2 non nul. Donc si $\alpha = 2$, le rang de A est 2.

7.5.5. Rang d'une matrice transposée

Proposition 6.
Le rang de A est égal au rang de sa transposée A^T.

Démonstration. Les mineurs de A^T sont obtenus à partir des mineurs de A par transposition. Comme les déterminants d'une matrice et de sa transposée sont égaux, la proposition découle de la caractérisation du rang d'une matrice à l'aide des mineurs (théorème 8). □

7.5.6. Indépendance et déterminant

Revenons sur le théorème 8 et sa preuve avec une version améliorée.

Théorème 9 (Caractérisation de l'indépendance linéaire de p vecteurs).
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soient $v_1, \dots, v_p$ des vecteurs de E avec $p \leqslant n$. Posons $v_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i$ pour $1 \leqslant j \leqslant n$. Alors les vecteurs $\{v_1, \dots, v_p\}$ forment une famille libre si et seulement s'il existe un mineur d'ordre p non nul extrait de la matrice $A = \left(a_{i,j}\right) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$.

Démonstration. Supposons d'abord que la famille $\mathscr{F} = \{v_1, \dots, v_p\}$ soit libre.

- Si $p = n$, le résultat est une conséquence du théorème 7.
- Si $p < n$, on peut appliquer le théorème de la base incomplète à la famille $\mathscr{F}$ et à la base $\mathscr{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$; et quitte à renuméroter les vecteurs de $\mathscr{B}$, on peut supposer que $\mathscr{B}' = (v_1, \dots, v_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ est une base de E. (Note : cette renumérotation change l'ordre de e_i, autrement dit échange les lignes de la matrice A, ce qui n'a pas d'impact sur ses mineurs ; on appellera encore $\mathscr{B}$ la base renumérotée.) La matrice P de passage de $\mathscr{B}$ vers $\mathscr{B}'$ contient les composantes des vecteurs $(v_1, \dots, v_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ par rapport à la base (renumérotée) $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ c'est-à-dire
$$P = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,1} & \dots & a_{p,p} & 0 & \dots & 0 \\ a_{p+1,1} & \dots & a_{p+1,p} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$
Le déterminant $\det P$ est non nul puisque les vecteurs $(v_1, \dots, v_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ forment une base de E. Or ce déterminant se calcule en développant par

rapport aux dernières colonnes autant de fois que nécessaire (soit $n-p$ fois). Et l'on trouve que

$$\det P = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,1} & \dots & a_{p,p} \end{vmatrix}$$

Le mineur $\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,1} & \dots & a_{p,p} \end{vmatrix}$ est donc non nul.

Montrons maintenant la réciproque. Supposons que le mineur correspondant aux lignes $i_1, i_2, \dots, i_p$ soit non nul. Autrement dit, la matrice

$$B = \begin{pmatrix} a_{i_1,1} & \dots & a_{i_1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_p,1} & \dots & a_{i_p,p} \end{pmatrix}$$

satisfait $\det B \neq 0$. Supposons aussi

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p = 0$$

En exprimant chaque v_i dans la base $(e_1, \dots, e_n)$, on voit aisément que cette relation équivaut au système suivant à n lignes et p inconnues :

$$\begin{cases} a_{1,1}\lambda_1 & + & \dots & + & a_{1,p}\lambda_p & = & 0 \\ a_{2,1}\lambda_1 & + & \dots & + & a_{2,p}\lambda_p & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1}\lambda_1 & + & \dots & + & a_{n,p}\lambda_p & = & 0 \end{cases}$$

Ce qui implique, en ne retenant que les lignes $i_1, \dots, i_p$:

$$\begin{cases} a_{i_1,1}\lambda_1 & + & \dots & + & a_{i_1,p}\lambda_p & = & 0 \\ a_{i_2,1}\lambda_1 & + & \dots & + & a_{i_2,p}\lambda_p & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i_p,1}\lambda_1 & + & \dots & + & a_{i_p,p}\lambda_p & = & 0 \end{cases}$$

ce qui s'écrit matriciellement

$$B \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} = 0.$$

Comme B est inversible (car $\det B \neq 0$), cela implique $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$. Ce qui montre l'indépendance des v_i. $\square$

Mini-exercices.

1. Résoudre ce système linéaire, en fonction du paramètre $t \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} ty + z & = & 1 \\ 2x + ty & = & 2 \\ -y + tz & = & 3 \end{cases}$
2. Pour quelles valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$, les vecteurs suivants forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?
$$\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2a \\ 1 \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3a \\ 1 \\ -2b \end{pmatrix}$$
3. Calculer le rang de la matrice suivante selon les paramètres $a, b \in \mathbb{R}$.
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & b \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Index