Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Analyse Complexe – LMDS4 – 2019

§TD 2: Fonctions élémentaires- Fonctions analytiques (holomorphes)

1. Représenter A sur le z-plan et $B = f(A)$ sur le w-plan dans les cas suivants :

(a) $A = \left\{ z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 2 \text{ et } 0 \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{2} \right\}$, avec $f(z) = z^3$.

(b) $A = \{z \in \mathbb{C} : -1 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 < y \leq \pi\}$ et $f(z) = e^z$.

2. Calculer les limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{\sin z}{\sinh(iz)}$ (b) $\lim\limits_{z \to (1+i)} \left(\dfrac{z-1-i}{z^2-2z+2} \right)^2$ (c) $\lim\limits_{z \to -\frac{\pi}{2}i} \dfrac{e^{2z}+1}{e^z+i}$

3. Étudier l'analycité des fonctions suivantes :

(a) $f(z) = \cosh(z)$ (b) $f(z) = |z| \operatorname{Re}(\overline{z})$ (c) $f(z) = z^2 \overline{z}$ (d) $f(z) = \overline{z} \operatorname{Im}(z)$

4. Montrer que si la fonction $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ est holomorphe dans un domaine U, l'égalité : $\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$ est vérifiée dans ce domaine.

5. Trouver les réels a, b, c, et d tels que f soit partout analytique.

(a) $f(z) = (3x - y + 5) + i(ax + by - 3)$ (b) $f(z) = (x^2 + axy + by^2) + i(cx^2 + dxy + y^2)$

6. Montrer que les fonctions suivantes sont différentiables sur les courbes indiquées mais sont nulle-part analytiques.

(a) $f(z) = x^2 + y^2 + 2ixy; \quad y = 0$ (b) $f(z) = 3x^2y^2 - 6ix^2y^2; \quad xy = 0$

7. Montrer que $f(z) = \left(x^3 - 3xy^2 + \pi\right) + i\left(3x^2y - y^3 + 5\right)$ est analytique sur $\mathbb{C}$, puis donner l'expression de $f'(z)$ en z.

8. Calculer $f'(z)$ si $f(z)$ une fonction entière telle que $\operatorname{Im}[f(z)] = e^{-y}\sin(x)$.

9. Est ce que la fonction $v(x,y) = \dfrac{x^2+1}{2}y^2$ peut former la partie imaginaire de la fonction holomorphe $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$.

10. Trouver la fonction holomorphe $f(z)$ si l'on connait sa partie imaginaire pour :

(a) $v(x,y) = x^3 - 3xy^2$ (b) $v(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$ (c) $v(x,y) = \cos x \cosh y$

11. Trouver le domaine d'analycité et la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

(a) $f(z) = \cos(ie^z)$ (b) $f(z) = 3z^2 - e^{3iz} + i \operatorname{Log} z$ (c) $f(z) = z^{1+i}$