Université Ferhat Abbas Setif 1 — Année Universitaire 2018/2019
Faculté des Sciences, Département de Mathématiques — $2^{ème}$ Année Maths
Module: Algébre 4
Enseignant: T. Rouabhi

Série d'exercices N° 1 : Formes Bilinéaires

Exercice 1:
(i) Soit φ la forme linéaire de $\mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(2,1)=15$ et $\varphi(1,-2)=-10$.
Trouver $\varphi(x,y)$ pour tous (x,y) dans $\mathbb{R}^2$ et en particulier $\varphi(-2,7)$.
(ii) Trouver la base duale de la base $\{v_1=(2,1), v_2=(1,-2)\}$ de $\mathbb{R}^2$.
(iii) Trouver la base duale de la base $B=\{v_1{=}(1,0,0), v_2{=}(1,1,0), v_3{=}(1,1,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2: Soit l'espace vectoriel $E=\mathbb{R}_n[X]$ et soit $B=\left\{\frac{X^k}{k!}/0\leq k\leq n\right\}$.Montrer que B est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer la base duale de la base $B=\left\{\frac{X^k}{k!}/0\leq k\leq 2\right\}$.

Exercice 3: Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soient $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base de E et $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ sa base duale. Montrer que $\{f_{ij},\ \ 1\leq i,j\leq n\}$ est une base de l'espace des formes bilinéaires $B(E)$ où $f_{ij}(x,y)=\varphi_i(x)\varphi_j(y)$, $\forall x,y\in E$.

Exercice 4: Soit f la forme bilinéaire de $\mathbb{R}^2$ définie dans la base canonique par:

$$f(x,y)=3x_1y_1-2x_1y_2+4x_2y_1-x_2y_2$$

(i) Trouver la matrice A de f relativement à la base $\{u_1=(1,1), u_2=(1,2)\}$.
(ii) Trouver La matrice B de f relativement à la base $\{v_1=(1,-1), v_2=(3,1)\}$.
(iii) Trouver la matrice de passage P de $\{u_1,u_2\}$ à $\{v_1,v_2\}$ et vérifier que $B=P^tAP$.

Exercice 5: Soit f la forme bilinéaire de $\mathbb{R}^3$ définie dans la base canonique par:

$$f(x,y)=x_1y_1+x_2y_2+3x_3y_3+6x_1y_3+2x_2y_1-3x_2y_3+3x_3y_1+x_3y_2$$

(i) Ecrire la matrice de f relativement à la base canonique. Calculer le noyau de f.
(ii) Ecrire la matrice de f relativement à la base $\{v_1=(1,1,1), v_2=(0,1,1), v_3=(0,0,1)\}$.
(iii) Quel est le rang de f , f est-elle non-dégénérée ?

Exercice 6: Soit $M=\begin{pmatrix}1&2\\3&5\end{pmatrix}$ de $M_2(\mathbb{R})$ et soit $f : M_2(\mathbb{R})\times M_2(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ une application définie par: $f(A,B)=tr(A^t\ M\ B)$.
(i) Montrer que f est une forme bilinéaires sur $M_2(\mathbb{R})$.
(ii) Trouver la matrice de f dans la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$.

Exercice 7: Soit f_1, f_2 deux formes bilinéaires sur $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans la base canonique sont

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1/2 \\ 1 & -2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Donner les matrices B_1 et B_2 de f_1 et f_2 respectivement dans la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ où $v_1 = (1,0,0), v_2 = (1/2, 1/2, 0), v_3 = (-1/2, -1/2, 1)$. Quel est le rang de f_1 et f_2. En déduire si f_1 et f_2 sont non-dégénérées.
(ii) Déterminer le noyau de f_1 et f_2.

Exercice 8: Soient les matrices suivantes associées à des formes biliniéaires par rapport à la base canonique:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ecrire l'expression de la forme bilinéaire associée à chacune de ces matrices. Lesquelles sont symétriques ?

Exercice 9: Soit E un espace vectoriel complexe et $f : \mathbf{E} \times \mathbf{E} \to \mathbb{C}$ une forme bilinéaire sur E telle que: $\forall x \in E,\ f(x,x) \in \mathbb{R}^+$.
(i) Montrer que $\forall x \in E,\ f(x,x) = 0$.
(ii) En déduire que si f est symétrique, alors $\forall x, y \in E,\ f(x,y) = 0$.

Exercice 10:
1- Soit f une forme bilinéaire sur E. Montrer que si f est alternée alors f est antisymétrique.
2- On considère les deux formes bilinaires $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par $f(x,y) = xy$ et $g((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = x_1y_2 - x_2y_1$, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et $(x_1,x_2),(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$. Etudier si f et g sont symétriques, antisymétriques ou alternées.