UFA Sétif 1, Faculté des Sciences,Département de Mathématiques.
MASTER I: Optimisation et contrôle. Module : Problèmes coniques.
Enseignant : M. ACHACHE. Semestre II. Année scolaire : 2018/2019.

Série d'exercices N°1

Cônes propres et auto-duaux

Exercice 1 *(Exemples des cônes propres)*
1- *Montrer que les ensembles suivants :*

$$\begin{aligned}
\mathbb{K} &= \mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0\}, \text{(orthant positif)}. \\
\mathbb{K} &= \mathbb{S}^n_+ = \{X \in \mathbb{S}^n : X \succeq 0\}, \text{(cône des matrices symétriques et semi-définies positives)}. \\
\mathbb{K} &= \mathcal{L}^{n+1} = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\|_2 \leq t\right\}, \text{(cône de Lorentz)}.
\end{aligned}$$

sont des cônes propres.
2- *Calculer leurs cônes duaux.*

Exercice 2 *Un cône $\mathbb{K}$ est dit auto-dual si $\mathbb{K} = \mathbb{K}^*$. Déduire que les cônes décrits dans l'exercice 1, sont auto-duaux.*

Exercice 3 *Soit $\mathbb{K}$ un cône convexe fermé. Montrer que $\mathbb{K} = \mathbb{K}^{**}$.(En utilisant le Théorème de séparation)*

Exercice 4 *(Exemple d'un cône non auto-duale)*
1- *Montrer que l'ensemble suivant :*

$$\mathbb{K} = \left\{X \in \mathbb{S}^n : v^T X v \geq 0,\ \forall v \geq 0\right\}$$

est un cône convexe pointu.
2- *Calculer son dual et déduire que $\mathbb{K}$ n'est pas auto-duale. $\mathbb{K}$ s'appelle le cône des matrices copositives.*

Exercice 5 *Montrer qu'on peut formuler les deux cônes, l'orthant positif et Lorentz, comme un cône des matrices symétriques semi-définies positives ($\mathbb{S}^n_+$).*

Exercice 6 *Représenter géométriquement dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, les cônes suivants : $\mathbb{S}^2_+$ et $\mathcal{L}^3$.*

Exercice 7 *(Inégalités généralisées)*
a) *Pour tout cône propre $\mathbb{K}$, la relation, $\preceq_{\mathbb{K}}$définie par $x \preceq_{\mathbb{K}} y \ \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{K}$,est une relation d'ordre partielle. De plus, montrer les assertions suivantes :*
1- *si $x \preceq_{\mathbb{K}} y$ alors $\alpha x \preceq_{\mathbb{K}} \alpha y$, $\forall \alpha \geq 0$.*
2- *Si $x \succeq_{\mathbb{K}} 0$ et $y \succeq_{\mathbb{K}} 0 \Rightarrow x + y \succeq_{\mathbb{K}} 0$.*
b) *On écrit $x \prec_{\mathbb{K}} y \ \Leftrightarrow x - y \in Int(\mathbb{K})$. Montrer que si $\lambda \succ_{\mathbb{K}^*} 0$,alors $\lambda^T x > 0$ pour tout $x \succeq_{\mathbb{K}} 0 (x \neq 0)$.*
c) *Peut-on définir une relation d'ordre partielle si le cône considéré n'est pas pointu ?*

Exercice 8 *(Supplémentaire)*
1- Montrer que $\mathbb{K}$ *est un cône convexe si et seulement si* $\lambda_1 x + \lambda_2 y \in K, \ \forall \lambda_1, \lambda_2 > 0$ *et* $x, y \in \mathbb{K}$.
2- Soit $a \in \mathbb{R}^n$ *(arbitraire), l'ensemble suivant :*

$$\mathbb{K} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x\rangle \geq 0\}$$

est-il un cône propre ?
3- Montrer que si $\mathbb{K}_1$ *et* $\mathbb{K}_2$ *sont deux cônes propres; alors*

$$\mathbb{K}_1 \times \mathbb{K}_2 = \{(x, y) : x \in \mathbb{K}_1, y \in \mathbb{K}_2\}$$

est un cône propre et de plus on a :

$$(\mathbb{K}_1 \times \mathbb{K}_2)^* = \mathbb{K}_1^* \times \mathbb{K}_2^*.$$

4- Considérons les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_1 &= \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq 1\}, \\ \mathbb{K}_2 &= \{\lambda a_1 : \lambda \in \mathbb{R}\}, a_1 \in \mathbb{R}^n, \\ \mathbb{K}_3 &= \{\lambda a_2 : \lambda \geq 0\}, a_2 \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

et

$\mathbb{K}_4 = conic\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ *; conic désigne l'enveloppe conique des vecteurs* $a_i, i = 1, \ldots, n$.

Si $n \geq 2$, *alors* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n$ *sont linéairement indépendants. Montrer que ses ensembles sont des cônes convexes. Ses cônes sont-ils propres?*

Exercice 9 *(Examen 2016).*
Considérons l'ensemble suivant :

$$\mathbb{K} = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + 2x_2 \geq 0, 3x_1 + x_2 \geq 0\right\}.$$

a) Montrer que $\mathbb{K}$ *est un cône propre de* $\mathbb{R}^2$.
b) Trouver le duale $\mathbb{K}^*$ *de* $\mathbb{K}$.

Exercice 10 *Soit* $\mathbb{K}$ *un ensemble non vide de* $\mathbb{R}^n$*, on définit son enveloppe conique (conic hull), conic* $(\mathbb{K})$ *par :*

$$conic\ (\mathbb{K}) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha^i x^i \mid x^i \in \mathbb{K},\ \alpha^i \geq 0\ \forall i = 1, \ldots, k \right\}.$$

1- Montrer que conic $(\mathbb{K})$ *est un cône convexe.*
2- Montrer que conic $(\mathbb{K})$ *est de plein dimension (d'intérieur non vide) si et seulement si il n'existe aucun* $y \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ *tel que* $\langle y, x\rangle = 0, \ \forall x \in \mathbb{K}$.

Exercice 11 *Soient* $\mathbb{K}_1$ *et* $\mathbb{K}_2$ *deux cones convexes fermés de* $\mathbb{R}^n$*. Montrer que :*
1- $(\mathbb{K}_1 \cap \mathbb{K}_2)^*$ *=fermuture de (*$\mathbb{K}_1^* \cap \mathbb{K}_2^*$*).*
2- $(\mathbb{K}_1 + \mathbb{K}_2)^* = \mathbb{K}_1^* \cap \mathbb{K}_2^*$.
3- $\mathbb{K}_1$ *est de plein dimension si et seulement si* $\mathbb{K}_1^*$ *est pointu.*
4- $\mathbb{K}_1$ *est pointu si et seulement si* $\mathbb{K}_1^*$ *est de plein dimension.*
5- $\mathbb{K}_1$ *est propre si et seulement si* $\mathbb{K}_1^*$ *est propre.*