الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Sétif 1

Algèbre 2

2017/2018 (Semestre 2)
1ère Année L.M.D – Maths-Info.
Matière : Algèbre 2

Par l'enseignant: F. Gherbi
الأستاذ : ف. غربي

Exercices corrigés

Espaces vectoriels (Partie II).

Exercice nº 01:

I) On considère; dans l'e.v. IR^3, les vecteurs $v_1=(1,1,1)$, $v_2=(1,2,3)$, $v_3=(2,-1,1)$ et $v=(1,-2,5)$.

Écrire le vecteur v comme combinaison linéaire des vecteurs v_1,v_2,v_3.

II) On considère; dans IR^3, les vecteurs $u_1=(1,-3,2)$, $u_2=(2,-4,-1)$, $u_3=(1,-5,7)$ et $u=(2,-5,3)$.

Peut-on écrire u comme combinaison linéaire des vecteurs u_1,u_2,u_3 ?

III) On considère; dans l'e.v. IR^3, les vecteurs $w_1=(3,0,2)$, $w_2=(2,-1,-5)$ et $w=(1,-2,k)$.

Pour quelle valeur de k on a $w\in Vect(w_1,w_2)$?

IV) On considère; dans $IR_2[X]$, les vecteurs $P_1=5-2x+x^2$, $P_2=-3x+2x^2$, $P_3=3+x$ et $P=-3+4x+x^2$.

Écrire le vecteur P comme combinaison linéaire des vecteurs P_1,P_2,P_3.

Exercice nº 02:

I) Soient $v_1=(1,2,3)$, $v_2=(1,1,2)$ et $v_3=(1,-1,2)$ des vecteurs de l'e.v. IR^3.

Les vecteurs v_1,v_2,v_3 sont-ils linéairement indépendants ?

II) Soient $u_1=(1,-2,1)$, $u_2=(2,1,-1)$ et $u_3=(7,1,-2)$ des vecteurs de l'e.v. IR^3.

Les vecteurs u_1,u_2,u_3 sont-ils linéairement indépendants ?

III) Soient $P=6+3x+x^2$ et $Q=3-x-3x^2-x^3$ deux vecteurs de l'e.v. $IR[X]$.

Les vecteurs P,Q sont-ils linéairement indépendants ?

IV) Soient f, g et h des vecteurs de l'e.v. $F(IR,IR)$; où $f(t)=e^{2t}$, $g(t)=t^2$ et $h(t)=t$.

Les vecteurs f,g,h sont-ils linéairement indépendants ?

V) Soient $\sin$, $\cos$ et Id_{IR} des vecteurs de l'e.v. $F(IR,IR)$.

Les vecteurs $\sin$, $\cos$, Id_{IR} sont-ils linéairement indépendants ?

Exercice nº 03:

I) Soient $v_1,v_2,..,v_n$ des vecteurs d'un espace vectoriel E.

Montrer que : $v_1,v_2,..,v_n$ sont liés $\Leftrightarrow$ un vecteur d'entre eux est une combinaison linéaire des autres.

II) Soient $v_1=(1+i,2i)$ et $v_2=(1,1+i)$ deux vecteurs de l'e.v. $\mathbb{C}^2$.

Montrer que la famille $\{v_1,v_2\}$ est IR-libre et $\mathbb{C}$-liée.

III) Soient $u_1=(1-i,i)$ et $u_2=(2,-1+i)$ deux vecteurs de l'e.v. $\mathbb{C}^2$.

Montrer que la famille $\{u_1,u_2\}$ est IR-libre et $\mathbb{C}$-liée.

Exercice n° 04:

I) On considère; dans l'e.v. IR^3, les vecteurs $v_1 = (0,1,1),\ v_2 = (1,0,1),\ v_3 = (1,1,0)$ et $v = (1,1,1)$.

i) Montrer que la famille $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ forme une base de IR^3.

ii) Déterminer les coordonnées du vecteur v dans la base $\mathscr{B}$.

II) On considère; dans l'e.v. IR^3, les vecteurs $u_1 = (1,1,1),\ u_2 = (-1,1,0),\ u_3 = (1,0,-1)$ et $u = (a,b,c)$.

i) Montrer que la famille $\mathscr{B}' = \{u_1, u_2, u_3\}$ forme une base de IR^3.

ii) Déterminer les coordonnées du vecteur u dans la base $\mathscr{B}'$.

III) Soient; dans l'e.v. $\mathbb{C}^3$ sur $\mathbb{C}$, les vecteurs $w_1 = (1,-1,i),\ w_2 = (-1,i,1),\ w_3 = (i,1,-1)$ et $w = (1+i, 1-i, i)$.

i) Montrer que la famille $\mathscr{B}'' = \{w_1, w_2, w_3\}$ forme une base de $\mathbb{C}^3$.

ii) Déterminer les coordonnées du vecteur w dans la base $\mathscr{B}''$.

IV) Pour quelles valeurs de α la famille de vecteurs $\{(1,0,\alpha), (1,1,\alpha), (\alpha,0,1)\}$ forme une base de IR^3.

V) Dans l'e.v. IR^3; donner un exemple de famille libre qui n'est pas génératrice.

VI) Dans l'e.v. IR^3; donner un exemple de famille génératrice qui n'est pas libre.

Exercice n° 05:

Dans l'e.v. IR^4; on considère la partie $F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in IR^4 /\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$.

1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de IR^4.

2) Déterminer une base de F; puis donner sa dimension.

Exercice n° 06:

Soit $F = Vect\big((1,1,1), (1,1,-1), (1,-1,1)\big)$ un sous-espace vectoriel de IR^3.

1) Trouver une base de F; puis donner sa dimension.

2) En déduire que $F = IR^3$.

Exercice n° 07:

Soient les deux parties $F = \{(x,y,z) \in IR^3 /\ x + y - z = 0\}$ et $G = \{(x,y,z) \in IR^3 /\ 3x - y + 2z = 0\}$.

1) Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de IR^3.

2) Calculer $\dim(F+G)$.

Traduction de quelques mots

- Combinaison linéaire des vecteurs : تركيبة خطية لأشعة (أو توفيقة أو مزج خطي لأشعة)
- Sous-espace engendré par des vecteurs : فضاء جزئي مولد بأشعة
- Sous-espace vectoriel engendré par des vecteurs : فضاء شعاعي جزئي مولد بأشعة
- Le plus petit sous-espace vectoriel engendré par ces vecteurs : أصغر فضاء شعاعي جزئي مولد بهذه الأشعة
- Partie génératrice : جزء مولد
- Générateurs d'un espace vectoriel : مولدات فضاء شعاعي
- Vecteurs linéairement indépendants (ou libres) : أشعة مستقلة خطيا (أو حرة)
- Vecteurs linéairement dépendants (ou liés) : أشعة مرتبطة خطيا (مقيدة)
- Famille de vecteurs (libre, liée) : عائلة أشعة (حرة، مقيدة)
- Base d'un espace vectoriel : قاعدة (أو أساس) لفضاء شعاعي
- Dimension d'un espace vectoriel : بعد فضاء شعاعي
- Coordonnées d'un vecteur dans une base : إحداثيات شعاع في قاعدة

Corrigés

Pour bien comprendre, j'ai rédigé les solutions des exercices proposés de manière très détaillée. Je ne vous demande pas de rédiger de la même manière dans les examens, mais au minimum que ce que vous écriviez ait un sens !

للفهم الجيد، كتبت حلول التمارين المعروضة بطريقة جد مفصلة. لا أطلب منكم التحرير بنفس الطريقة في الامتحانات، و لكن في الحد الأدنى كل ما تكتبونه يكون له معنى!

Exercice n° 01:

Rappel: Soit E un espace vectoriel sur IK; et soient $v, v_1, v_2, .., v_n \in E$.

- On a : v est une combinaison linéaire de $v_1, v_2, .., v_n \overset{\text{déf.}}{\Leftrightarrow} \exists \lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n \in IK$: $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$.
- On a toujours : $o_E = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_n$ (où o_E est le vecteur nul de l'espace E).
- La somme de deux combinaisons linéaires est une combinaison linéaire.
- La multiplication d'une combinaison linéaire par un scalaire est une combinaison linéaire.

I) On veut écrire $v = (1, -2, 5)$ comme combinaison linéaire de $v_1 = (1,1,1), v_2 = (1,2,3)$ et $v_3 = (2,-1,1)$.

On cherche donc trois scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in IR$ tels que $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$; en effet, on a :

$$\begin{aligned} v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 &\Leftrightarrow (1,-2,5) = \lambda_1(1,1,1) + \lambda_2(1,2,3) + \lambda_3(2,-1,1) \\ &\Leftrightarrow (1,-2,5) = (\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1) + (\lambda_2, 2\lambda_2, 3\lambda_2) + (2\lambda_3, -\lambda_3, \lambda_3) \\ &\Leftrightarrow (1,-2,5) = (\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3, \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3, \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 1 & \cdots (1) \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = -2 & \cdots (2) \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 5 & \cdots (3) \end{cases} \end{aligned}$$

De (1) on a $\lambda_1 = 1 - \lambda_2 - 2\lambda_3$; puis en remplaçant cette valeur dans (2) et (3), on obtient :

$$\begin{cases} (1 - \lambda_2 - 2\lambda_3) + 2\lambda_2 - \lambda_3 = -2 \\ (1 - \lambda_2 - 2\lambda_3) + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 - 3\lambda_3 = -3 \cdots (i) \\ 2\lambda_2 - \lambda_3 = 4 \cdots (ii) \end{cases}$$

De (i) on a $\lambda_2 = -3 + 3\lambda_3$; puis en remplaçant cette valeur dans (ii), on obtient $2(-3 + 3\lambda_3) - \lambda_3 = 4$;

d'où $\boxed{\lambda_3 = 2}$ et donc $\lambda_2 = -3 + 3\lambda_3 = 3$; i.e. $\boxed{\lambda_2 = 3}$ et $\lambda_1 = 1 - \lambda_2 - 2\lambda_3 = -6$; i.e. $\boxed{\lambda_1 = -6}$.

Par suite $v = -6v_1 + 3v_2 + 2v_3$.

II) On verra si $u = (2, -5, 3)$ s'écrit comme combinaison linéaire de $u_1 = (1,-3,2), u_2 = (2,-4,-1), u_3 = (1,-5,7)$.

On cherche (**s'ils existent**) trois scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in IR$ tels que $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3$.

On a :
$$\begin{aligned} u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 &\Leftrightarrow (2,-5,3) = \lambda_1(1,-3,2) + \lambda_2(2,-4,-1) + \lambda_3(1,-5,7) \\ &\Leftrightarrow (2,-5,3) = (\lambda_1, -3\lambda_1, 2\lambda_1) + (2\lambda_2, -4\lambda_2, -\lambda_2) + (\lambda_3, -5\lambda_3, 7\lambda_3) \\ &\Leftrightarrow (2,-5,3) = (\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3, -3\lambda_1 - 4\lambda_2 - 5\lambda_3, 2\lambda_1 - \lambda_2 + 7\lambda_3) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 2 & \cdots (1) \\ -3\lambda_1 - 4\lambda_2 - 5\lambda_3 = -5 & \cdots (2) \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 + 7\lambda_3 = 3 & \cdots (3) \end{cases} \end{aligned}$$

De (1) on a $\lambda_1 = 2-2\lambda_2-\lambda_3$; puis en remplaçant cette valeur dans (2) et (3), on obtient :

$$\begin{cases} -3(2-2\lambda_2-\lambda_3)-4\lambda_2-5\lambda_3=-5 \\ 2(2-2\lambda_2-\lambda_3)-\lambda_2+7\lambda_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_2-2\lambda_3 = 1 \\ -5\lambda_2+5\lambda_3=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2-\lambda_3=\frac{1}{2} \\ \lambda_2-\lambda_3=\frac{1}{5} \end{cases} \text{ impossible !!}$$

D'où λ_2,λ_3 et donc λ_1 n'existent pas pour que $u=\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2+\lambda_3 u_3$.

On ne peut pas donc écrire le vecteur u comme combinaison linéaire des vecteurs u_1,u_2,u_3.

III) On cherche $k\in IR$ pour que $w\in Vect(w_1,w_2)$; où $w=(1,-2,k)$, $w_1=(3,0,2)$ et $w_2=(2,-1,-5)$.

Rappel: Soit E un espace vectoriel sur IK; et soient $v_1,v_2,..,v_n\in E$.

- L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs $v_1,v_2,..,v_n$ on le note $Vect(v_1,v_2,..,v_n)$ (ou $\langle v_1,v_2,..,v_n\rangle$) et on l'appelle « le sous-espace engendré par les vecteurs $v_1,v_2,..,v_n$ ».
  On a donc : $Vect(v_1,v_2,..,v_n)=\{\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\cdots+\lambda_nv_n \,/\, \lambda_1,\lambda_2,..,\lambda_n\in IK\}$.
- On a : $Vect(o_E)=\{o_E\}$.
- $Vect(v_1,v_2,..,v_n)$ est un sous-espace vectoriel de E (avec $v_1,v_2,..,v_n\in Vect(v_1,v_2,..,v_n)$).
  (i.e. le sous-espace engendré par des vecteurs d'un espace est un s.e.v. de cet espace).
- Si F est un s.e.v. de E, alors on a : $v_1,v_2,..,v_n\in F \Leftrightarrow Vect(v_1,v_2,..,v_n)\subset F$.
  (donc; le sous-espace engendré par des vecteurs est le plus petit s.e.v. contient ces vecteurs).
- Si $v=\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\cdots+\lambda_nv_n$, alors $Vect(v_1,v_2,..,v_n,v)=Vect(v_1,v_2,..,v_n)$.
- On a : $Vect(v_1,v_2,..,v_n,o_E)=Vect(v_1,v_2,..,v_n)$.
- Si $F=Vect(v_1,v_2,..,v_n)$ et $G=Vect(u_1,u_2,..,u_m)$, alors $F+G=Vect(v_1,v_2,..,v_n,u_1,u_2,..,u_m)$.

On a :
$$\begin{aligned} w\in Vect(w_1,w_2) &\Leftrightarrow \exists\lambda_1,\lambda_2\in IR:\ w=\lambda_1w_1+\lambda_2w_2 \\ &\Leftrightarrow \exists\lambda_1,\lambda_2\in IR:\ (1,-2,k)=\lambda_1(3,0,2)+\lambda_2(2,-1,-5) \\ &\Leftrightarrow \exists\lambda_1,\lambda_2\in IR:\ (1,-2,k)=(3\lambda_1,0,2\lambda_1)+(2\lambda_2,-\lambda_2,-5\lambda_2) \\ &\Leftrightarrow \exists\lambda_1,\lambda_2\in IR:\ (1,-2,k)=(3\lambda_1+2\lambda_2,-\lambda_2,2\lambda_1-5\lambda_2) \\ &\Leftrightarrow \exists\lambda_1,\lambda_2\in IR:\ \begin{cases} 3\lambda_1+2\lambda_2 = 1 & \cdots (i) \\ -\lambda_2 =-2 & \cdots (ii) \\ 2\lambda_1-5\lambda_2 = k & \cdots (iii) \end{cases} \end{aligned}$$

De (ii) on a $\lambda_2=2$; puis de (i) on a $\lambda_1=\frac{1}{3}(1-2\lambda_2)=-1$, d'où de (iii) on a $k=2\lambda_1-5\lambda_2=-12$.

Donc; pour que $w\in Vect(w_1,w_2)$ il faut et il suffit que $k=-12$; et dans ce cas $w=-w_1+2w_2$.

IV) On veut écrire le polynôme P comme combinaison linéaire des polynômes P_1,P_2,P_3; où :

$P=-3+4x+x^2$, $P_1=5-2x+x^2$, $P_2=-3x+2x^2$ et $P_3=3+x$.

On cherche donc trois scalaires $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in IR$ tels que $P=\lambda_1P_1+\lambda_2P_2+\lambda_3P_3$; en effet, on a :

$$\begin{aligned} P=\lambda_1P_1+\lambda_2P_2+\lambda_3P_3 &\Leftrightarrow -3+4x+x^2=\lambda_1(5-2x+x^2)+\lambda_2(-3x+2x^2)+\lambda_3(3+x) \\ &\Leftrightarrow -3+4x+x^2=(5\lambda_1+3\lambda_3)+(-2\lambda_1-3\lambda_2+\lambda_3)x+(\lambda_1+2\lambda_2)x^2 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5\lambda_1+3\lambda_3 = -3 \cdots (1) \\ -2\lambda_1-3\lambda_2+\lambda_3 = 4 \cdots (2) \\ \lambda_1+2\lambda_2 = 1 \cdots (3) \end{cases}$$

De (3) on a $\lambda_1 = 1-2\lambda_2$; puis en remplaçant cette valeur dans (1) et (2), on obtient :

$$\begin{cases} 5(1-2\lambda_2)+3\lambda_3 = -3 \\ -2(1-2\lambda_2)-3\lambda_2+\lambda_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -10\lambda_2+3\lambda_3 = -8 \cdots (i) \\ \lambda_2+\lambda_3 = 6 \cdots (ii) \end{cases}$$

De (ii) on a $\lambda_2 = 6-\lambda_3$; puis en remplaçant cette valeur dans (i), on obtient $-10(6-\lambda_3)+3\lambda_3 = -8$;

d'où $\lambda_3 = \frac{52}{13} = 4$; i.e. $\boxed{\lambda_3 = 4}$ et donc $\lambda_2 = 6-\lambda_3 = 2$; i.e. $\boxed{\lambda_2 = 2}$ et $\lambda_1 = 1-2\lambda_2 = -3$; i.e. $\boxed{\lambda_1 = -3}$.

Par suite $P = -3P_1+2P_2+4P_3$.

Exercice nº 02:

Rappel: Soit E un espace vectoriel sur IK; et soient $v_1, v_2, .., v_n \in E$.

- On appelle **une relation linéaire entre les vecteurs** $v_1, v_2, .., v_n$; toute relation de la forme :

  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = o_E$ où $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n \in IK$.

  Si $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n$ sont tous nuls, on dit que cette relation linéaire est **triviale**.

  Si $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n$ ne sont pas tous nuls, on dit que cette relation linéaire est **non triviale**.

- On dit que les vecteurs $v_1, v_2, .., v_n$ sont **linéairement indépendants** (ou **libres**) s'il n'existe aucune relation linéaire non triviale entre les vecteurs $v_1, v_2, .., v_n$, autrement dit; toute relation linéaire entre les vecteurs $v_1, v_2, .., v_n$ est triviale; i.e.

  $v_1, v_2, .., v_n$ sont libres $\overset{\text{déf.}}{\Leftrightarrow} \forall \lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n \in IK: \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = o_E \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0.$

- On dit que les vecteurs $v_1, v_2, .., v_n$ sont **linéairement dépendants** (ou **liés**) s'ils ne sont pas libres, autrement dit; s'il existe au moins une relation linéaire non triviale entre les vecteurs $v_1, v_2, .., v_n$; i.e.

  $v_1, v_2, .., v_n$ sont liés $\overset{\text{déf.}}{\Leftrightarrow} \exists \lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n \in IK$ (ne sont pas tous nuls) : $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = o_E$.

- On dit que la famille de vecteurs $\{v_1, v_2, .., v_n\}$ est libre si les vecteurs $v_1, v_2, .., v_n$ sont libres.

- On dit que la famille de vecteurs $\{v_1, v_2, .., v_n\}$ est liée si les vecteurs $v_1, v_2, .., v_n$ sont liés.

- Notons que toute partie d'une famille libre est une famille libre.

- Notons que si une famille contient une partie liée, alors cette famille est liée.

- Si $v \in E$, alors : $v \neq o_E \Leftrightarrow v$ est libre (car on a : $v \neq o_E \Leftrightarrow (\forall \lambda \in IK: \lambda v = o_E \Rightarrow \lambda = 0)$).

- Le vecteur nul o_E est lié (car on a $1 \cdot o_E = o_E$ qui est une relation linéaire non triviale).

- Si une famille de vecteurs contient le vecteur nul, alors cette famille est liée; i.e.

  La famille $\{v_1, v_2, .., v_n, o_E\}$ est liée (car $\{o_E\}$ est liée; ou bien car $0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_n + 1 \cdot o_E = o_E$).

I) On verra si les vecteurs $v_1=(1,2,3)$, $v_2=(1,1,2)$ et $v_3=(1,-1,2)$ sont libres.

Soient $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in IR$. Alors on a :

$$\begin{aligned}
\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\lambda_3v_3=(0,0,0) &\Leftrightarrow \lambda_1(1,2,3)+\lambda_2(1,1,2)+\lambda_3(1,-1,2)=(0,0,0)\\
&\Leftrightarrow (\lambda_1,2\lambda_1,3\lambda_1)+(\lambda_2,\lambda_2,2\lambda_2)+(\lambda_3,-\lambda_3,2\lambda_3)=(0,0,0)\\
&\Leftrightarrow (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3,\ 2\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3,\ 3\lambda_1+2\lambda_2+2\lambda_3)=(0,0,0)\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0\cdots(1)\\ 2\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3=0\cdots(2)\\ 3\lambda_1+2\lambda_2+2\lambda_3=0\cdots(3)\end{cases}
\end{aligned}$$

De (1) on a $\lambda_1=-\lambda_2-\lambda_3$; puis en remplaçant cette valeur dans (2) et (3), on obtient :

$$\begin{cases}2(-\lambda_2-\lambda_3)+\lambda_2-\lambda_3=0\\ 3(-\lambda_2-\lambda_3)+2\lambda_2+2\lambda_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\lambda_2-3\lambda_3=0\\ -\lambda_2-\lambda_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda_2+3\lambda_3=0\cdots(i)\\ \lambda_2+\lambda_3=0\cdots(ii)\end{cases}$$

De (i) on a $\lambda_2=-3\lambda_3$; puis en remplaçant cette valeur dans (ii), on obtient $(-3\lambda_3)+\lambda_3=0$; i.e. $-2\lambda_3=0$, d'où $\boxed{\lambda_3=0}$ et donc $\lambda_2=-3\lambda_3=0$; i.e. $\boxed{\lambda_2=0}$ et $\lambda_1=-\lambda_2-\lambda_3=0$; i.e. $\boxed{\lambda_1=0}$.

On a montré donc que $\forall\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in IR:\ \lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\lambda_3v_3=(0,0,0)\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0.$

D'où les vecteurs v_1,v_2 et v_3 sont libres.

II) On verra si les vecteurs $u_1=(1,-2,1)$, $u_2=(2,1,-1)$ et $u_3=(7,1,-2)$ sont libres.

Soient $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in IR$. Alors on a :

$$\begin{aligned}
\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\lambda_3u_3=(0,0,0) &\Leftrightarrow \lambda_1(1,-2,1)+\lambda_2(2,1,-1)+\lambda_3(7,1,-2)=(0,0,0)\\
&\Leftrightarrow (\lambda_1,-2\lambda_1,\lambda_1)+(2\lambda_2,\lambda_2,-\lambda_2)+(7\lambda_3,\lambda_3,-2\lambda_3)=(0,0,0)\\
&\Leftrightarrow (\lambda_1+2\lambda_2+7\lambda_3,-2\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3,\lambda_1-\lambda_2-2\lambda_3)=(0,0,0)\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1+2\lambda_2+7\lambda_3=0\cdots(1)\\ -2\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0\cdots(2)\\ \lambda_1-\lambda_2-2\lambda_3=0\cdots(3)\end{cases}
\end{aligned}$$

De (3) on a $\lambda_1=\lambda_2+2\lambda_3$; puis en remplaçant cette valeur dans (1) et (2), on obtient :

$$\begin{cases}(\lambda_2+2\lambda_3)+2\lambda_2+7\lambda_3=0\\ -2(\lambda_2+2\lambda_3)+\lambda_2+\lambda_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3\lambda_2+9\lambda_3=0\\ -\lambda_2-3\lambda_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda_2+3\lambda_3=0\\ \lambda_2+3\lambda_3=0\end{cases}\Rightarrow\lambda_2+3\lambda_3=0\Rightarrow\lambda_2=-3\lambda_3.$$

Par suite $\boxed{\lambda_2=-3\lambda_3}$ et donc $\lambda_1=\lambda_2+2\lambda_3=-\lambda_3$; i.e. $\boxed{\lambda_1=-\lambda_3}$.

On a montré donc que $\forall\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in IR:\ \lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\lambda_3u_3=(0,0,0)\Leftrightarrow\lambda_1=-\lambda_3$ et $\lambda_2=-3\lambda_3$.

C'est-à-dire que $\forall\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in IR:\ \lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\lambda_3u_3=(0,0,0)\not\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0.$

D'où les vecteurs u_1,u_2 et u_3 ne sont pas libres; i.e. liés.

$\lambda_1=-\lambda_3$ et $\lambda_2=-3\lambda_3$

Notons (par exemple) que si on prend $\lambda_3=1$; et donc $\lambda_1=-1$ et $\lambda_2=-3$, alors $\boxed{-u_1-3u_2+u_3=(0,0,0)}$.

III) On verra si les deux polynômes $P=6+3x+x^2$ et $Q=3-x-3x^2-x^3$ sont libres.

Soient $\alpha,\beta\in IR$. Alors on a :

c'est le polynôme nul

$$\alpha P+\beta Q=0\Leftrightarrow\alpha(6+3x+x^2)+\beta(3-x-3x^2-x^3)=0$$

$$\Leftrightarrow\ (6\alpha+3\alpha x+\alpha x^2)+(3\beta-\beta x-3\beta x^2-\beta x^3)=0$$
$$\Leftrightarrow\ (6\alpha+3\beta)+(3\alpha-\beta)x+(\alpha-3\beta)x^2+(-\beta)x^3=0$$
$$\Leftrightarrow\ \begin{cases}6\alpha+3\beta=0\\ 3\alpha-\beta=0\\ \alpha-3\beta=0\\ \beta=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\ \alpha=\beta=0.$$

On a montré donc que $\forall\alpha,\beta\in IR:\ \alpha P+\beta Q=\underset{\text{c'est le polynôme nul}}{0}\ \Rightarrow\ \alpha=\beta=\underset{\text{c'est le zéro}}{0}.$

D'où les deux polynômes P et Q sont libres.

IV) On verra si les fonctions f, g et h sont libres; où $f(t)=e^{2t}$, $g(t)=t^2$ et $h(t)=t$ pour tout $t\in IR$.

Soient $\alpha,\beta,\gamma\in IR$. Alors on a :

f_0 est la fonction nulle sur IR.

$$\alpha f+\beta g+\gamma h=f_0\ \Leftrightarrow\ \forall t\in IR:\ (\alpha f+\beta g+\gamma h)(t)=0$$
$$\Leftrightarrow\ \forall t\in IR:\ \alpha f(t)+\beta g(t)+\gamma h(t)=0$$
$$\Leftrightarrow\ \forall t\in IR:\ \alpha e^{2t}+\beta t^2+\gamma t=0.$$

En particulier; pour $t=0, t=1$ et $t=-1$, on a le système :

$$\begin{cases}\alpha=0\\ \alpha e^2+\beta+\gamma=0\\ \alpha e^{-2}+\beta-\gamma=0\end{cases}\ ;\ \text{i.e.}\ \begin{cases}\alpha=0\\ \beta+\gamma=0\\ \beta-\gamma=0\end{cases}\ ,\ \text{d'où}\ \alpha=\beta=\gamma=0.$$

On a montré donc que $\forall\alpha,\beta,\gamma\in IR:\ \alpha f+\beta g+\gamma h=f_0\ \Rightarrow\ \alpha=\beta=\gamma=0.$

D'où les fonctions f, g et h sont libres.

V) On verra si les fonctions $\sin$, $\cos$ et Id_{IR} sont libres.

Soient $\alpha,\beta,\gamma\in IR$. Alors on a :

Id_{IR} est la fonction identité sur IR; i.e. $Id_{IR}(t)=t$ pour tout $t\in IR$.

$$\alpha\sin+\beta\cos+\gamma Id_{IR}=f_0\ \Leftrightarrow\ \forall t\in IR:\ (\alpha\sin+\beta\cos+\gamma Id_{IR})(t)=0$$
$$\Leftrightarrow\ \forall t\in IR:\ \alpha\sin t+\beta\cos t+\gamma Id_{IR}(t)=0$$
$$\Leftrightarrow\ \forall t\in IR:\ \alpha\sin t+\beta\cos t+\gamma t=0.$$

En particulier; pour $t=0, t=\pi$ et $t=\frac{\pi}{2}$, on a le système :

$$\begin{cases}\beta=0\\ -\beta+\pi\gamma=0\\ \alpha+\frac{\pi}{2}\gamma=0\end{cases}\ ;\ \text{i.e.}\ \begin{cases}\beta=0\\ \pi\gamma=0\\ \alpha+\frac{\pi}{2}\gamma=0\end{cases}\ ,\ \text{d'où}\ \alpha=\beta=\gamma=0.$$

On a montré donc que $\forall\alpha,\beta,\gamma\in IR:\ \alpha\sin+\beta\cos+\gamma Id_{IR}=f_0\ \Rightarrow\ \alpha=\beta=\gamma=0.$

D'où les fonctions $\sin$, $\cos$ et Id_{IR} sont libres.

Exercice nº 03:

I) Soient $v_1,v_2,..,v_n$ des vecteurs d'un espace vectoriel E.

$(\Rightarrow)$: Supposons que $v_1,v_2,..,v_n$ soient liés, et montrons qu'un vecteur d'entre eux est une combinaison linéaire des autres; en effet; comme $v_1,v_2,..,v_n$ sont liés, alors $\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\cdots+\lambda_nv_n=o_E$ pour certains scalaires $\lambda_1,\lambda_2,..,\lambda_n$ ne sont pas tous nuls; donc $\lambda_i \neq 0$ pour un certain $1\leq i\leq n$.

Par suite; on a : $\lambda_i v_i = -\lambda_1 v_1 - \cdots - \lambda_{i-1}v_{i-1} - \lambda_{i+1}v_{i+1} - \cdots - \lambda_n v_n$ ⟵ on a extrait le terme $\lambda_i v_i$ de la relation linéaire précédente.

$$\Rightarrow v_i = -\tfrac{\lambda_1}{\lambda_i}v_1 - \cdots - \tfrac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}v_{i-1} - \tfrac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}v_{i+1} - \cdots - \tfrac{\lambda_n}{\lambda_i}v_n \quad (\text{car } \lambda_i \neq 0)$$

$$\Rightarrow v_i = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_{i-1}v_{i-1} + \mu_{i+1}v_{i+1} + \cdots + \mu_n v_n \quad (\text{où } \mu_j = -\tfrac{\lambda_j}{\lambda_i} \in IK)$$

Ceci signifie que v_i est une combinaison linéaire des vecteurs $v_1,..,v_{i-1},v_{i+1}..,v_n$.

$(\Leftarrow)$: Supposons qu'un vecteur d'entre $v_1,v_2,..,v_n$ soit une combinaison linéaire des autres, et montrons que $v_1,v_2,..,v_n$ sont liés; en effet, si $v_i = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{i-1}v_{i-1} + \alpha_{i+1}v_{i+1} + \cdots + \alpha_n v_n$ où $\alpha_j \in IK$, alors on a : $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{i-1}v_{i-1} - v_i + \alpha_{i+1}v_{i+1} + \cdots + \alpha_n v_n = o_E$ qui est une relation linéaire non triviale entre $v_1,v_2,..,v_n$. D'où les vecteurs $v_1,v_2,..,v_n$ sont liés.

II) Soient $v_1 = (1+i, 2i)$ et $v_2 = (1, 1+i)$ deux vecteurs de l'e.v. $\mathbb{C}^2$.

❶ Montrons que la famille $\{v_1,v_2\}$ est IR-libre (i.e. libre; en considérant $\mathbb{C}^2$ e.v. sur le corps IR).

Soient $\lambda_1,\lambda_2 \in IR$. Alors on a : $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = (0,0) \Leftrightarrow \lambda_1(1+i,2i) + \lambda_2(1,1+i) = (0,0)$

$$\Leftrightarrow (\lambda_1(1+i), 2\lambda_1 i) + (\lambda_2, \lambda_2(1+i)) = (0,0)$$
$$\Leftrightarrow (\lambda_1 + \lambda_1 i, 2\lambda_1 i) + (\lambda_2, \lambda_2 + \lambda_2 i) = (0,0)$$
$$\Leftrightarrow (\lambda_1 + \lambda_1 i + \lambda_2, 2\lambda_1 i + \lambda_2 + \lambda_2 i) = (0,0)$$
$$\Leftrightarrow ((\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1 i, \lambda_2 + (2\lambda_1 + \lambda_2)i) = (0,0)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\lambda_1+\lambda_2) + \lambda_1 i = 0 \\ \lambda_2 + (2\lambda_1+\lambda_2)i = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2 = 0 \text{ et } \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \text{ et } 2\lambda_1+\lambda_2 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

D'où les vecteurs v_1,v_2 sont libres; i.e. la famille $\{v_1,v_2\}$ est libre.

❷ Montrons que la famille $\{v_1,v_2\}$ est $\mathbb{C}$-liée (i.e. liée; en considérant $\mathbb{C}^2$ e.v. sur le corps $\mathbb{C}$).

En effet; d'après **(I)**, on a : v_1,v_2 sont liés $\Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{C} : v_1 = \lambda v_2$.

On a : $v_1 = \lambda v_2 \Leftrightarrow (1+i,2i) = \lambda(1,1+i) \Leftrightarrow (1+i,2i) = (\lambda, \lambda(1+i)) \Leftrightarrow \lambda = 1+i$ et $\lambda(1+i) = 2i \underset{\text{car } (1+i)^2 = 2i}{\Leftrightarrow} \lambda = 1+i$.

Donc $v_1 = (1+i)v_2$; d'où les vecteurs v_1,v_2 sont liés; i.e. la famille $\{v_1,v_2\}$ est liée.

III) Soient $u_1 = (1-i, i)$ et $u_2 = (2, -1+i)$ deux vecteurs de l'e.v. $\mathbb{C}^2$.

① Montrons que la famille $\{u_1,u_2\}$ est IR-libre (i.e. libre; en considérant $\mathbb{C}^2$ e.v. sur le corps IR).

Soient $\lambda_1,\lambda_2 \in IR$. Alors on a : $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = (0,0) \Leftrightarrow \lambda_1(1-i,i) + \lambda_2(2,-1+i) = (0,0)$

$$\Leftrightarrow (\lambda_1(1-i), \lambda_1 i) + (2\lambda_2, \lambda_2(-1+i)) = (0,0)$$
$$\Leftrightarrow (\lambda_1 - \lambda_1 i, \lambda_1 i) + (2\lambda_2, -\lambda_2 + \lambda_2 i) = (0,0)$$
$$\Leftrightarrow (\lambda_1 - \lambda_1 i + 2\lambda_2, \lambda_1 i - \lambda_2 + \lambda_2 i) = (0,0)$$
$$\Leftrightarrow ((\lambda_1 + 2\lambda_2) - \lambda_1 i, -\lambda_2 + (\lambda_1 + \lambda_2)i) = (0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\lambda_1 + 2\lambda_2) - \lambda_1 i = 0 \\ -\lambda_2 + (\lambda_1 + \lambda_2) i = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \text{ et } \lambda_1 = 0 \\ -\lambda_2 = 0 \text{ et } \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

D'où les vecteurs u_1, u_2 sont libres; i.e. la famille $\{u_1, u_2\}$ est libre.

② Montrons que la famille $\{u_1, u_2\}$ est $\mathbb{C}$ - liée (i.e. liée; en considérant $\mathbb{C}^2$ e.v. sur le corps $\mathbb{C}$).

En effet; d'après **(I)**, on a : u_1, u_2 sont liés $\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C} : u_1 = \lambda u_2$.

car $\frac{1}{2}(1-i)(-1+i) = i$

$u_1 = \lambda u_2 \Leftrightarrow (1-i, i) = \lambda(2, -1+i) \Leftrightarrow (1-i, i) = (2\lambda, \lambda(-1+i)) \Leftrightarrow 2\lambda = 1-i$ et $\lambda(-1+i) = i \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}(1-i)$.

Donc $u_1 = \frac{1}{2}(1-i)u_2$; d'où les vecteurs u_1, u_2 sont liés; i.e. la famille $\{u_1, u_2\}$ est liée.

ou bien $u_2 = (1+i)u_1$

Exercice n° 04:

Rappel: Soit E un espace vectoriel sur IK; et soient $v_1, v_2, .., v_n \in E$.

- La famille $\{v_1, v_2, .., v_n\}$ est une **base** de E $\overset{\text{déf.}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \cdot\ E = Vect(v_1, v_2, .., v_n). \\ \cdot\ v_1, v_2, .., v_n \text{ sont libres.} \end{cases}$ ⟵ $\begin{cases}\text{i.e. } E \text{ est engendré par } v_1, v_2, .., v_n; \\ \text{ou bien, on dit que } \{v_1, v_2, .., v_n\} \text{ est} \\ \text{une partie génératrice de } E.\end{cases}$
- Attention; une base de E n'est pas toujours existe ni unique.
- Si $E = Vect(v_1, v_2, .., v_n)$, alors E admet au moins une base $\{u_1, u_2, .., u_m\}$; avec $m \le n$, et toutes les bases de E ont le même nombre de vecteurs m. Ce nombre unique m; noté $\dim E$, est appelé :
  la **dimension** de E.
  - Si $v_1, v_2, .., v_n$ sont libres, alors par définition $\{v_1, v_2, .., v_n\}$ est une base de E; et donc $\dim E = n$. (Notons; dans ce cas, que toute autre base de E contient exactement n vecteurs).
  - Si $v_1, v_2, .., v_n$ sont liés, alors (d'après **(I)** de l'exo**3**) un vecteur d'entre eux est une combinaison linéaire des autres; par exemple $v_1 = \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$, d'où $E = Vect(v_1, v_2, .., v_n) = Vect(v_2, .., v_n)$.
    Maintenant; si $v_2, .., v_n$ sont libres, alors par déf. $\{v_2, .., v_n\}$ est une base de E; donc $\dim E = n-1$.
    Mais si $v_2, .., v_n$ sont liés, alors (d'après **(I)** de l'exo**3**) un vecteur d'entre eux est une combinaison linéaire des autres; par exemple $v_n = \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_{n-1} v_{n-1}$, d'où $E = Vect(v_2, .., v_n) = Vect(v_2, .., v_{n-1})$ ..
    et ainsi de suite
- Notons que l'e.v. $\{o_E\}$ n'a pas de base; mais par convention on pose $\dim\{o_E\} = 0$.
  $\{o_E\} = Vect(o_E)$; mais o_E est lié
  donc v est libre
- Notons que si $E = Vect(v)$; où $v \ne o_E$, alors $\{v\}$ est une base de E; donc $\dim E = 1$.
- Pour l'e.v. IK^n sur le corps IK, on a $\dim IK^n = n$; car la famille de vecteurs $\{e_1, e_2, .., e_n\}$ forme une base de IK^n; appelé **la base canonique** de IK^n, où $e_1 = (1,0,..,0)$, $e_2 = (0,1,..,0)$, ..., $e_n = (0,..,0,1)$.
- Pour l'e.v. $\mathbb{C}^n$ sur le corps IR, on a $\dim \mathbb{C}^n = 2n$; car la famille de vecteurs $\{e_1, ie_1, e_2, ie_2, .., e_n, ie_n\}$ forme une base de $\mathbb{C}^n$ sur IR; appelé **la base canonique** de $\mathbb{C}^n$ sur IR.
  $i^2 = -1$

- Pour l'e.v. $IR_n[X]$, on a $\dim(IR_n[X]) = n+1$; car la famille de vecteurs $\{1, X, X^2, .., X^n\}$ forme une base de $IR_n[X]$; appelé **la base canonique** de $IR_n[X]$.

important

- Si $\dim E = n$, alors : $\{v_1, v_2, .., v_n\}$ est une base de $E \Leftrightarrow E = Vect(v_1, v_2, .., v_n) \Leftrightarrow v_1, v_2, .., v_n$ sont libres.
- Si F est un s.e.v. de E, alors on a : $\dim F \leq \dim E$.
- Si F est un s.e.v. de E, alors on a : $\dim F = \dim E \Leftrightarrow F = E$.
- Si F et G sont deux s.e.v. de E, alors on a : $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.
- Supposons que $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, .., v_n\}$ soit une base de E; et soit $v \in E$.
  Alors $\exists \lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n \in IK : v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$ (car $E = Vect(v_1, v_2, .., v_n)$).
  Mais; comme les vecteurs $v_1, v_2, .., v_n$ sont libres, alors les scalaires $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n$ sont uniques.
  Dans ce cas, les scalaires $(\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n)$ on les appelle « **les coordonnées de v dans la base $\mathscr{B}$** ».
- Dans l'e.v. IK^n sur IK, on a $\forall (x_1, x_2, .., x_n) \in IK^n : (x_1, x_2, .., x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$; où $\{e_1, e_2, .., e_n\}$ est la base canonique de IK^n. Par suite $(x_1, x_2, .., x_n)$ sont les coordonnées du vecteur $(x_1, x_2, .., x_n)$ dans la base canonique $\{e_1, e_2, .., e_n\}$.
- Dans $\mathbb{C}^n$ sur IR, on a $\forall (z_1, z_2, .., z_n) \in \mathbb{C}^n : (z_1, z_2, .., z_n) = x_1 e_1 + y_1(ie_1) + x_2 e_2 + y_2(ie_2) + \cdots + x_n e_n + y_n(ie_n)$; où $z_k = x_k + iy_k$ ($\forall 1 \leq k \leq n$) et $\{e_1, ie_1, e_2, ie_2, .., e_n, ie_n\}$ est la base canonique de $\mathbb{C}^n$ sur IR.
  Par suite $(x_1, y_1, x_2, y_2, .., x_n, y_n)$ sont les coordonnées du vecteur $(z_1, z_2, .., z_n)$ dans la base canonique.
- Dans l'e.v. $IR_n[X]$, on a $\forall P \in IR_n[X] : P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n$; où $\{1, X, X^2, .., X^n\}$ est la base canonique de $IR_n[X]$. Par suite $(a_0, a_1, a_2, .., a_n)$ sont les coordonnées de $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n$ dans la base canonique.

I) Soient dans l'e.v. IR^3, les vecteurs $v_1 = (0,1,1)$, $v_2 = (1,0,1)$, $v_3 = (1,1,0)$ et $v = (1,1,1)$.

i) Montrons que $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de IR^3 (i.e. $IR^3 = Vect(v_1, v_2, v_3)$ et v_1, v_2, v_3 sont libres).

Comme $\dim IR^3 = 3$, alors il suffit de montrer seulement que les vecteurs v_1, v_2, v_3 sont libres.

L'outil le plus simple de tester

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in IR$. Alors on a :

$$\begin{aligned}
\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = (0,0,0) &\Leftrightarrow \lambda_1(0,1,1) + \lambda_2(1,0,1) + \lambda_3(1,1,0) = (0,0,0) \\
&\Leftrightarrow (0, \lambda_1, \lambda_1) + (\lambda_2, 0, \lambda_2) + (\lambda_3, \lambda_3, 0) = (0,0,0) \\
&\Leftrightarrow (\lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2) = (0,0,0) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \cdots (1) \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \cdots (2) \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \cdots (3) \end{cases}
\end{aligned}$$

De (1) on a $\lambda_2 = -\lambda_3$; et de (2) on a $\lambda_1 = -\lambda_3$. Puis en remplaçant ces valeurs dans (3); on obtient $-2\lambda_3 = 0$, d'où $\lambda_3 = 0$; et donc $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_1 = 0$.

Ceci signifie que les vecteurs v_1, v_2, v_3 sont libres; d'où $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de IR^3.

2ème Méthode:

Comme $\dim IR^3 = 3$, alors il suffit de montrer seulement que $IR^3 = Vect(v_1, v_2, v_3)$.

On montre donc que $\forall (x, y, z) \in IR^3, \exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in IR : (x, y, z) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$.

Soit $(x, y, z) \in IR^3$. On cherche $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in IR$ tels que $(x, y, z) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$.

On a : $(x, y, z) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 \Leftrightarrow (x, y, z) = \lambda_1 (0,1,1) + \lambda_2 (1,0,1) + \lambda_3 (1,1,0)$

$$\Leftrightarrow (x, y, z) = (0, \lambda_1, \lambda_1) + (\lambda_2, 0, \lambda_2) + (\lambda_3, \lambda_3, 0)$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z) = (\lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = x \cdots (1) \\ \lambda_1 + \lambda_3 = y \cdots (2) \\ \lambda_1 + \lambda_2 = z \cdots (3) \end{cases}$$

De (1) on a $\lambda_2 = x - \lambda_3$; et de (2) on a $\lambda_1 = y - \lambda_3$. Puis en remplaçant ces valeurs dans (3); on obtient $(y - \lambda_3) + (x - \lambda_3) = z$; i.e. $x + y - 2\lambda_3 = z$, d'où $\boxed{\lambda_3 = \frac{1}{2}(x + y - z)}$.

Maintenant; comme $\lambda_2 = x - \lambda_3$, alors $\boxed{\lambda_2 = \frac{1}{2}(x - y + z)}$; et comme $\lambda_1 = y - \lambda_3$, alors $\boxed{\lambda_1 = \frac{1}{2}(-x + y + z)}$.

Par suite $(x, y, z) = \frac{1}{2}(-x + y + z) v_1 + \frac{1}{2}(x - y + z) v_2 + \frac{1}{2}(x + y - z) v_3$.

Ceci signifie que $IR^3 = Vect(v_1, v_2, v_3)$; d'où $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de IR^3.

ii) Les coordonnées du vecteur v dans la base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$.

On cherche donc $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in IR$ tels que $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$.

On a : $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 \Leftrightarrow (1,1,1) = \lambda_1 (0,1,1) + \lambda_2 (1,0,1) + \lambda_3 (1,1,0)$

$$\Leftrightarrow (1,1,1) = (0, \lambda_1, \lambda_1) + (\lambda_2, 0, \lambda_2) + (\lambda_3, \lambda_3, 0)$$

$$\Leftrightarrow (1,1,1) = (\lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \cdots (1) \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 1 \cdots (2) \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \cdots (3) \end{cases}$$

De (1) on a $\lambda_2 = 1 - \lambda_3$; et de (2) on a $\lambda_1 = 1 - \lambda_3$. Puis en remplaçant ces valeurs dans (3); on obtient $(1 - \lambda_3) + (1 - \lambda_3) = 1$, d'où $\boxed{\lambda_3 = \frac{1}{2}}$. Par suite $\lambda_2 = 1 - \lambda_3 = \frac{1}{2}$; i.e. $\boxed{\lambda_2 = \frac{1}{2}}$ et $\lambda_1 = 1 - \lambda_3 = \frac{1}{2}$; i.e. $\boxed{\lambda_1 = \frac{1}{2}}$.

D'où $v = \frac{1}{2} v_1 + \frac{1}{2} v_2 + \frac{1}{2} v_3$; et donc $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ sont les coordonnées de v dans la base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$.

II) Soient dans l'e.v. IR^3, les vecteurs $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (-1,1,0)$, $u_3 = (1,0,-1)$ et $u = (a, b, c)$.

i) Montrons que $\mathcal{B}' = \{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de IR^3 (i.e. $IR^3 = Vect(u_1, u_2, u_3)$ et u_1, u_2, u_3 sont libres).

Comme $\dim IR^3 = 3$, alors il suffit de montrer seulement que les vecteurs u_1, u_2, u_3 sont libres.

L'outil le plus simple de tester

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in IR$. Alors on a :

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = (0,0,0) \Leftrightarrow \lambda_1 (1,1,1) + \lambda_2 (-1,1,0) + \lambda_3 (1,0,-1) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1) + (-\lambda_2, \lambda_2, 0) + (\lambda_3, 0, -\lambda_3) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 - \lambda_3) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \cdots (1) \\ \lambda_1 + \lambda_2 \quad = 0 \cdots (2) \\ \lambda_1 - \lambda_3 \quad = 0 \cdots (3) \end{cases}$$

De (2) on a $\lambda_2 = -\lambda_1$; et de (3) on a $\lambda_3 = \lambda_1$. Puis en remplaçant ces valeurs dans (1); on obtient $\lambda_1 - (-\lambda_1) + \lambda_1 = 0$; i.e. $3\lambda_1 = 0$, d'où $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 = 0$.

Donc les vecteurs u_1, u_2, u_3 sont libres; d'où $\mathscr{B}' = \{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de IR^3.

ii) Les coordonnées du vecteur u dans la base $\mathscr{B}' = \{u_1, u_2, u_3\}$.

On cherche donc $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in IR$ tels que $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3$.

On a : $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 \Leftrightarrow (a,b,c) = \lambda_1(1,1,1) + \lambda_2(-1,1,0) + \lambda_3(1,0,-1)$

$$\Leftrightarrow (a,b,c) = (\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1) + (-\lambda_2, \lambda_2, 0) + (\lambda_3, 0, -\lambda_3)$$

$$\Leftrightarrow (a,b,c) = (\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 - \lambda_3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = a \cdots (1) \\ \lambda_1 + \lambda_2 \quad = b \cdots (2) \\ \lambda_1 - \lambda_3 \quad = c \cdots (3) \end{cases}$$

De (2) on a $\lambda_2 = b - \lambda_1$; et de (3) on a $\lambda_3 = \lambda_1 - c$. Puis en remplaçant ces valeurs dans (1); on obtient $\lambda_1 - (b - \lambda_1) + (\lambda_1 - c) = a$; i.e. $3\lambda_1 - b - c = a$, d'où $\boxed{\lambda_1 = \frac{1}{3}(a+b+c)}$.

Maintenant; comme $\lambda_2 = b - \lambda_1$, alors $\boxed{\lambda_2 = \frac{1}{3}(-a+2b-c)}$; et comme $\lambda_3 = \lambda_1 - c$, alors $\boxed{\lambda_3 = \frac{1}{2}(a+b-2c)}$.

D'où $u = \frac{1}{3}(a+b+c)u_1 + \frac{1}{3}(-a+2b-c)u_2 + \frac{1}{3}(a+b-2c)u_3$; et donc les coordonnées de u dans la base $\mathscr{B}' = \{u_1, u_2, u_3\}$ sont $(\frac{1}{3}(a+b+c), \frac{1}{3}(-a+2b-c), \frac{1}{3}(a+b-2c))$.

III) Soient dans l'e.v. $\mathbb{C}^3$ sur $\mathbb{C}$, les vecteurs $w_1 = (1,-1,i)$, $w_2 = (-1,i,1)$, $w_3 = (i,1,-1)$ et $w = (1+i, 1-i, i)$.

i) Montrons que $\mathscr{B}'' = \{w_1, w_2, w_3\}$ est une base de $\mathbb{C}^3$ (i.e. $\mathbb{C}^3 = Vect(w_1, w_2, w_3)$ et w_1, w_2, w_3 sont libres).

Comme $\dim \mathbb{C}^3 = 3$ (sur le corps $\mathbb{C}$), alors il suffit de montrer seulement que w_1, w_2, w_3 sont libres.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$. Alors on a :

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3 = (0,0,0) \Leftrightarrow \lambda_1(1,-1,i) + \lambda_2(-1,i,1) + \lambda_3(i,1,-1) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_1, -\lambda_1, \lambda_1 i) + (-\lambda_2, \lambda_2 i, \lambda_2) + (\lambda_3 i, \lambda_3, -\lambda_3) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 i, -\lambda_1 + \lambda_2 i + \lambda_3, \lambda_1 i + \lambda_2 - \lambda_3) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 i \ = 0 \cdots (1) \\ -\lambda_1 + \lambda_2 i + \lambda_3 = 0 \cdots (2) \\ \lambda_1 i + \lambda_2 - \lambda_3 \ = 0 \cdots (3) \end{cases}$$

De (1) on a $\lambda_1 = \lambda_2 - \lambda_3 i$; puis en remplaçant cette valeur dans (2) et (3), on obtient :

$$\begin{cases} -(\lambda_2 - \lambda_3 i) + \lambda_2 i + \lambda_3 = 0 \\ (\lambda_2 - \lambda_3 i)i + \lambda_2 - \lambda_3 \ = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-1+i)\lambda_2 + (1+i)\lambda_3 = 0 \\ (1+i)\lambda_2 \qquad = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-1+i)\lambda_2 + (1+i)\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 \qquad = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Par suite $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$; d'où les vecteurs w_1, w_2, w_3 sont libres; i.e. $\mathscr{B}'' = \{w_1, w_2, w_3\}$ est une base de $\mathbb{C}^3$.

ii) Les coordonnées du vecteur w dans la base $\mathscr{B}'' = \{w_1, w_2, w_3\}$.

On cherche donc $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ tels que $w = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3$.

On a : $w = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3 \Leftrightarrow (1+i, 1-i, i) = \lambda_1(1,-1,i) + \lambda_2(-1,i,1) + \lambda_3(i,1,-1)$

$$\Leftrightarrow (1+i, 1-i, i) = (\lambda_1, -\lambda_1, \lambda_1 i) + (-\lambda_2, \lambda_2 i, \lambda_2) + (\lambda_3 i, \lambda_3, -\lambda_3)$$

$$\Leftrightarrow (1+i, 1-i, i) = (\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 i, -\lambda_1 + \lambda_2 i + \lambda_3, \lambda_1 i + \lambda_2 - \lambda_3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 i = 1+i \cdots (1) \\ -\lambda_1 + \lambda_2 i + \lambda_3 = 1-i \cdots (2) \\ \lambda_1 i + \lambda_2 - \lambda_3 = i \cdots (3) \end{cases}$$

De (1) on a $\lambda_1 = 1+i+\lambda_2 - \lambda_3 i$; puis en remplaçant cette valeur dans (2) et (3), on obtient :

$$\begin{cases} -(1+i+\lambda_2-\lambda_3 i)+\lambda_2 i+\lambda_3 = 1-i \\ (1+i+\lambda_2-\lambda_3 i)i+\lambda_2-\lambda_3 = i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -1-i+(-1+i)\lambda_2+(1+i)\lambda_3 = 1-i \\ i-1+(1+i)\lambda_2 = i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (-1+i)\lambda_2+(1+i)\lambda_3 = 2 \cdots (4) \\ (1+i)\lambda_2 = 1 \cdots (5) \end{cases}$$

De (5) on a $\lambda_2 = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{2}$; i.e. $\boxed{\lambda_2 = \frac{1}{2}(1-i)}$. On remplace cette valeur dans (4); on obtient : $\frac{1}{2}(-1+i)(1-i)+(1+i)\lambda_3 = 2$; i.e. $i+(1+i)\lambda_3 = 2$; i.e. $\lambda_3 = \frac{2-i}{1+i} = \frac{(2-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-3i}{2}$; i.e. $\boxed{\lambda_3 = \frac{1}{2}(1-3i)}$.

Par suite $\lambda_1 = 1+i+\lambda_2-\lambda_3 i = 1+i+\frac{1}{2}(1-i)-\frac{1}{2}(1-3i)i = 1+i+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}i-\frac{3}{2} = 0$; i.e. $\boxed{\lambda_1 = 0}$.

D'où $w = 0w_1+\frac{1}{2}(1-i)w_2+\frac{1}{2}(1-2i)w_3$; où $(0, \frac{1}{2}(1-i), \frac{1}{2}(1-2i))$ sont les coordonnées du vecteur w dans la base $\mathcal{B}'' = \{w_1, w_2, w_3\}$.

IV) On cherche $\alpha \in IR$ pour que la famille $\{(1,0,\alpha), (1,1,\alpha), (\alpha,0,1)\}$ soit une base de IR^3.

Puisque $\dim IR^3 = 3$, alors on cherche $\alpha \in IR$ pour que les vecteurs $(1,0,\alpha), (1,1,\alpha), (\alpha,0,1)$ soient libres.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in IR$. Alors on a :

$$\lambda_1(1,0,\alpha)+\lambda_2(1,1,\alpha)+\lambda_3(\alpha,0,1) = (0,0,0) \Leftrightarrow (\lambda_1, 0, \alpha\lambda_1)+(\lambda_2,\lambda_2,\alpha\lambda_2)+(\alpha\lambda_3, 0, \lambda_3) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_1+\lambda_2+\alpha\lambda_3, \lambda_2, \alpha\lambda_1+\alpha\lambda_2+\lambda_3) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\alpha\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \alpha\lambda_1+\alpha\lambda_2+\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1+\alpha\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \alpha\lambda_1+\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\alpha\lambda_3 \\ \lambda_2 = 0 \\ \alpha\lambda_1+\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\alpha\lambda_3 \\ \lambda_2 = 0 \\ \alpha(-\alpha\lambda_3)+\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\alpha\lambda_3 \\ \lambda_2 = 0 \\ (1-\alpha^2)\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

la solution unique

Donc pour que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$; il faut et il suffit que $1-\alpha^2 \neq 0$; i.e. $\alpha^2 \neq 1$; i.e. $\alpha \neq \pm 1$; i.e. $\alpha \in IR - \{\pm 1\}$.

V) Dans l'e.v. IR^3; on donnera un exemple de famille libre qui n'est pas génératrice.

D'abord; pour la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$ de IR^3, on a $IR^3 = Vect(e_1, e_2, e_3)$ et e_1, e_2, e_3 sont libres; où $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$. Puisque e_1, e_2, e_3 sont libres, alors e_1, e_2 sont libres aussi. $\longleftarrow$ Toute partie d'une famille libre est libre.

Mais $IR^3 \neq Vect(e_1, e_2)$; car $\dim IR^3 = 3$ et $\dim\big(Vect(e_1, e_2)\big) = 2$ ($\{e_1, e_2\}$ est une base de $Vect(e_1, e_2)$).

Donc; $\{e_1, e_2\}$ est une famille libre qui n'est pas génératrice de IR^3.

VI) Dans l'e.v. IR^3; on donnera un exemple de famille génératrice qui n'est pas libre.

Soit par exemple $v = e_1 + e_2 + e_3 = (1,1,1)$. Comme v est une combinaison linéaire de e_1, e_2, e_3, alors on a $Vect(e_1, e_2, e_3, v) = Vect(e_1, e_2, e_3)$; or $IR^3 = Vect(e_1, e_2, e_3)$, donc $IR^3 = Vect(e_1, e_2, e_3, v)$.

Mais les vecteurs e_1, e_2, e_3, v sont liés; car $e_1 + e_2 + e_3 - v = (0,0,0)$ (puisque $v = e_1 + e_2 + e_3$).

Donc; $\{e_1, e_2, e_3, v\}$ est une famille génératrice de IR^3 qui n'est pas libre.

Exercice n° 05:

Dans l'e.v. IR^4; on considère la partie $F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in IR^4 /\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$.

1) Montrons que F est un sous-espace vectoriel de IR^4.

On a :
$$\begin{aligned}
F &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in IR^4 /\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\} \\
&= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in IR^4 /\ x_4 = -x_1 - x_2 - x_3\} \\
&= \{(x_1, x_2, x_3, -x_1 - x_2 - x_3) /\ x_1, x_2, x_3 \in IR\} \\
&= \{(x_1, 0, 0, -x_1) + (0, x_2, 0, -x_2) + (0, 0, x_3, -x_3) /\ x_1, x_2, x_3 \in IR\} \\
&= \{x_1(1,0,0,-1) + x_2(0,1,0,-1) + x_3(0,0,1,-1) /\ x_1, x_2, x_3 \in IR\} \\
&= Vect\big((1,0,0,-1), (0,1,0,-1), (0,0,1,-1)\big).
\end{aligned}$$

Donc F est le sous-espace engendré par les vecteurs $(1,0,0,-1), (0,1,0,-1), (0,0,1,-1)$ de IR^4.

D'où F est un sous-espace vectoriel de IR^4.

2) On cherche une base de F.

On a $F = Vect\big((1,0,0,-1), (0,1,0,-1), (0,0,1,-1)\big)$; donc on verra si les vecteurs de la partie génératrice sont libres ou non. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in IR$.

On a : $\lambda_1(1,0,0,-1) + \lambda_2(0,1,0,-1) + \lambda_3(0,0,1,-1) = (0,0,0,0) \Leftrightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, -\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3) = (0,0,0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Par suite; les vecteurs $(1,0,0,-1), (0,1,0,-1), (0,0,1,-1)$ sont libres.

D'où la famille $\{(1,0,0,-1), (0,1,0,-1), (0,0,1,-1)\}$ forme une base de F; donc $\dim F = 3$.

Exercice n° 06:

Soit $F = Vect\big((1,1,1),(1,1,-1),(1,-1,1)\big)$ un sous-espace vectoriel de IR^3.

1) On cherche une base de F; donc on verra si les vecteurs $(1,1,1),(1,1,-1)$ et $(1,-1,1)$ sont libres.

Soient $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \in IR$. Alors on a :

$$\lambda_1(1,1,1)+\lambda_2(1,1,-1)+\lambda_3(1,-1,1)=(0,0,0) \Leftrightarrow (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3,\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3,\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)=(0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0 \cdots (1) \\ \lambda_1+\lambda_2-\lambda_3=0 \cdots (2) \\ \lambda_1-\lambda_2+\lambda_3=0 \cdots (3) \end{cases}$$

On remarque que l'addition (2) + (3) donne $\lambda_1 = 0$; et dans ce cas, l'addition (1) + (2) donne $\lambda_2 = 0$.

D'où $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$. Par suite; les vecteurs $(1,1,1),(1,1,-1)$ et $(1,-1,1)$ sont libres.

Finalement; comme $F = Vect\big((1,1,1),(1,1,-1),(1,-1,1)\big)$ et $(1,1,1),(1,1,-1),(1,-1,1)$ sont libres, alors la famille de vecteurs $\{(1,1,1),(1,1,-1),(1,-1,1)\}$ est une base de F; donc $\dim F = 3$.

2) Puisque F est un s.e.v. de IR^3 et $\dim F = \dim IR^3$, alors $F = IR^3$.

Exercice n° 07:

1) • Montrons que $F=\{(x,y,z)\in IR^3 / x+y-z=0\}$ est un s.e.v. de IR^3.

On a :
$$\begin{aligned} F &= \{(x,y,z)\in IR^3 / x+y-z=0\} \\ &= \{(x,y,z)\in IR^3 / z=x+y\} \\ &= \{(x,y,x+y) / x,y\in IR\} \\ &= \{(x,0,x)+(0,y,y) / x,y\in IR\} \\ &= \{x(1,0,1)+y(0,1,1) / x,y\in IR\} \\ &= Vect\big((1,0,1),(0,1,1)\big). \end{aligned}$$

Par suite; F est le sous-espace engendré par $(1,0,1)$ et $(0,1,1)$ de IR^3.

D'où F est un sous-espace vectoriel de IR^3.

• Montrons que $G=\{(x,y,z)\in IR^3 / 3x-y+2z=0\}$ est un s.e.v. de IR^3.

On a :
$$\begin{aligned} G &= \{(x,y,z)\in IR^3 / 3x-y+2z=0\} \\ &= \{(x,y,z)\in IR^3 / y=3x+2z\} \\ &= \{(x,3x+2z,z) / x,z\in IR\} \\ &= \{(x,3x,0)+(0,2z,z) / x,z\in IR\} \\ &= \{x(1,3,0)+z(0,2,1) / x,z\in IR\} \\ &= Vect\big((1,3,0),(0,2,1)\big). \end{aligned}$$

Par suite; G est le sous-espace engendré par $(1,3,0)$ et $(0,2,1)$ de IR^3.

D'où G est un sous-espace vectoriel de IR^3.

2) On calcule $\dim(F+G)$.

<u>1ère Méthode:</u>

On a : $\dim(F+G)=\dim F+\dim G-\dim(F\cap G)$ (Théorème de la dimension).

- Comme $F = Vect((1,0,1),(0,1,1))$; et les vecteurs $(1,0,1),(0,1,1)$ sont libres (très facile à tester), alors la famille $\{(1,0,1),(0,1,1)\}$ est une base de F; donc $\dim F = 2$.
- Comme $G = Vect((1,3,0),(0,2,1))$; et les vecteurs $(1,3,0),(0,2,1)$ sont libres (très facile à tester), alors la famille $\{(1,3,0),(0,2,1)\}$ est une base de G; donc $\dim G = 2$.
- Comme $F = \{(x,y,z)\in IR^3 / x+y-z=0\}$ et $G = \{(x,y,z)\in IR^3 / 3x-y+2z=0\}$, alors on a :

$$\begin{aligned}
F\cap G &= \{(x,y,z)\in IR^3 / x+y-z=0 \text{ et } 3x-y+2z=0\}\\
&= \{(x,y,z)\in IR^3 / z=x+y \text{ et } 3x-y+2z=0\}\\
&= \{(x,y,z)\in IR^3 / z=x+y \text{ et } 3x-y+2(x+y)=0\}\\
&= \{(x,y,z)\in IR^3 / z=x+y \text{ et } 5x+y=0\}\\
&= \{(x,y,z)\in IR^3 / z=x+y \text{ et } y=-5x\}\\
&= \{(x,y,z)\in IR^3 / z=x+(-5x) \text{ et } y=-5x\}\\
&= \{(x,y,z)\in IR^3 / z=-4x \text{ et } y=-5x\}\\
&= \{(x,-5x,-4x) / x\in IR\}\\
&= \{x(1,-5,-4) / x\in IR\}\\
&= Vect((1,-5,-4)).
\end{aligned}$$

Autrement dit; on résout le système : $\begin{cases} x+y-z=0\\ 3x-y+2z=0\end{cases}$

Or $(1,-5,-4)\neq(0,0,0)$, donc $\{(1,-5,-4)\}$ est une base de $F\cap G$; d'où $\dim(F\cap G)=1$.

Finalement; on a $\dim(F+G)=\dim F+\dim G-\dim(F\cap G)=2+2-1=3$; i.e. $\boxed{\dim(F+G)=3}$.

Puisque $F+G$ est un s.e.v. de IR^3 et $\dim(F+G)=\dim IR^3$, alors $F+G=IR^3$.

Notons; dans ce cas, que $IR^3\neq F\oplus G$ (car $\dim(F\cap G)=1\neq 0$).

<u>2</u>

2ème Méthode:

On cherche une base de $F+G$.

Comme $F = Vect((1,0,1),(0,1,1))$ et $G = Vect((1,3,0),(0,2,1))$, alors on a :

$F+G = Vect((1,0,1),(0,1,1),(1,3,0),(0,2,1))$.

On a nécessairement les vecteurs $(1,0,1),(0,1,1),(1,3,0),(0,2,1)$ sont liés; sinon $\dim(F+G)=4>\dim IR^3$!

On verra s'il y a trois vecteurs libres parmi les quatre vecteurs $(1,0,1),(0,1,1),(1,3,0),(0,2,1)$.

Soient $\alpha,\beta,\gamma\in IR$ tels que $\alpha(1,0,1)+\beta(0,1,1)+\gamma(1,3,0)=(0,0,0)$ (on a choisi les 3 premiers).

$$\Leftrightarrow (\alpha+\gamma,\beta+3\gamma,\alpha+\beta)=(0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha+\gamma=0\\ \beta+3\gamma=0\\ \alpha+\beta=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\gamma=-\alpha\\ \beta+3\gamma=0\\ \beta=-\alpha\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\gamma=-\alpha\\ (-\alpha)+3(-\alpha)=0\\ \beta=-\alpha\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\gamma=-\alpha\\ \alpha=0\\ \beta=-\alpha\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\\ \gamma=0\end{cases}$$

Par suite; les vecteurs $(1,0,1),(0,1,1),(1,3,0)$ sont libres.

Donc la famille de vecteurs $\{(1,0,1),(0,1,1),(1,3,0)\}$ est une base de $F+G$; d'où $\dim(F+G)=3$.

Maintenant; comme $F+G\subset IR^3$ et $\dim(F+G)=\dim IR^3$, alors $F+G=IR^3$.

Fin