الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Sétif 1

Algèbre 2

2017/2018 (Semestre 2)
1ère Année L.M.D – Maths-Info.
Matière : Algèbre 2

Par l'enseignant: F. Gherbi
الأستاذ : ف. غربي

Exercices corrigés

Espaces vectoriels (Partie I).

Exercice nº 01:

Soit $E = IR_+^* \times IR$. On considère les deux opérations $\oplus$ et $\otimes$ définies par :

$$\begin{cases} \bullet\ \forall (x,y),(x',y') \in E : (x,y) \oplus (x',y') = (x.x', y+y') \\ \bullet\ \forall (x,y) \in E,\ \forall \lambda \in IR : \lambda \otimes (x,y) = (x^\lambda, \lambda y) \end{cases}$$

Montrer que $(E,\oplus,\otimes)$ est un espace vectoriel sur le corps IR.

Exercice nº 02:

On définit sur IR^2; les lois $\oplus$ et $\otimes$ suivantes :

$$(1) \begin{cases} \bullet\ \forall (x,y),(x',y') \in IR^2 : (x,y) \oplus (x',y') = (x+x', y+y') \\ \bullet\ \forall \lambda \in IR,\ \forall (x,y) \in IR^2 : \lambda \otimes (x,y) = (\lambda x, 0) \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \bullet\ \forall (x,y),(x',y') \in IR^2 : (x,y) \oplus (x',y') = (x+x', y+y') \\ \bullet\ \forall \lambda \in IR,\ \forall (x,y) \in IR^2 : \lambda \otimes (x,y) = (\lambda x, y) \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} \bullet\ \forall (x,y),(x',y') \in IR^2 : (x,y) \oplus (x',y') = (x+x', y+y') \\ \bullet\ \forall \lambda \in IR,\ \forall (x,y) \in IR^2 : \lambda \otimes (x,y) = (\lambda x, \lambda y) \end{cases}$$

$(IR^2,\oplus,\otimes)$ est-il un espace vectoriel sur le corps IR ?

Exercice nº 03:

Soit E un espace vectoriel sur le corps IK; et soient $u, v \in E$ et $\lambda, \mu \in IK$.

1) Montrer que $\lambda(u-v) = \lambda u - \lambda v$; et en déduire que $\lambda o_E = o_E$.

2) Montrer que $(\lambda-\mu)v = \lambda v - \mu v$; et en déduire que $0v = o_E$.

3) Montrer que $(-\lambda)(-v) = \lambda v$.

Exercice nº 04:

I) Parmi ces sous-ensembles suivants, dire qui sont des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel IR^3:

- $F_1 = \{(x,y,z) \in IR^3 \,/\, x+y+z = a\}$ (où $a \in IR$)
- $F_2 = \{(x,y,z) \in IR^3 \,/\, x = 2y \text{ et } z = 0\}$
- $F_3 = \{(x,y,z) \in IR^3 \,/\, x^2+y^2+z^2 \le 1\}$
- $F_4 = \{(x,y,z) \in IR^3 \,/\, xy = 0\}$

II) Parmi ces sous-ensembles suivants, dire qui sont des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel des fonctions $F(IR,IR) = \{ f \,/\, f : IR \to IR \}$:

- $F_5 = \{ f \in F(IR, IR) / 2f(0) = f(2) \}$
- $F_6 = \{ f \in F(IR, IR) / \ f(2) = f(0) + 2 \}$

III) Parmi ces sous-ensembles suivants, dire qui sont des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$ (où $n \in IN$) $IR_n[X] = \{ P \in IR[X] / d^o P \leq n \}$:

- $F_7 = \{ f \in IR_n[X] / d^o f = n \}$
- $F_8 = \{ f \in IR_n[X] / \ f = 0 \text{ ou } d^o f \leq n \}$

Exercice nº 05:

Soit E un espace vectoriel sur le corps IK; et soient F et G deux s.e.v. de E.

1) Montrer que : $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

2) Montrer que : $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de $E \Leftrightarrow (F \subset G$ ou $G \subset F)$.

3) Montrer que : $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice nº 06:

Soit $E = F(IR, IR) = \{ f \ / \ f : IR \to IR \}$, et soient les deux parties :

$F = \{ f \in E / \ f(x) = f(-x); \ \forall x \in IR \}$

$G = \{ f \in E / \ f(-x) = -f(x); \ \forall x \in IR \}$

1) Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E.

2) Montrer que $E = F \oplus G$ (i.e. E est somme directe de F et G).

Exercice nº 07:

Soient U et V deux sous-espaces vectoriels de IR^3 définis par :

$U = \{ (x, y, z) \in IR^3 / x = y = z \}$

$V = \{ (x, y, z) \in IR^3 / x = 0 \}$

Montrer que IR^3 est somme directe de U et V; i.e. $IR^3 = U \oplus V$.

(on dit aussi que V est un supplémentaire de U dans IR^3; ou le contraire).

Traduction de quelques mots

- Groupe (commutatif) : زمرة (تبديلية)
- Anneau : حلقة
- Corps (corps des nombres réels et corps des nombres complexes) : حقل (حقل الأعداد الحقيقية و حقل الأعداد المركبة)
- **L**oi de **C**omposition **I**nterne (opération interne) : قانون تركيب داخلي (عملية داخلية)
- **L**oi de **C**omposition **E**xterne (opération externe) : قانون تركيب خارجي (عملية خارجية)
- L'Addition "+" et la Multiplication "." : الجمع و الضرب
- Espace vectoriel sur un corps : فضاء شعاعي على حقل
- Vecteur (la somme de deux vecteurs est un vecteur) : شعاع (مجموع شعاعين هو شعاع)
- Le vecteur nul : الشعاع المعدوم
- Scalaire (la multiplication d'un vecteur par un scalaire est un vecteur) : سلّمي (ضرب شعاع بسلّمي هو شعاع)
- Sous-espace vectoriel (d'un espace vectoriel) : فضاء شعاعي جزئي (من فضاء شعاعي)
- Intersection de deux sous-espaces vectoriels : تقاطع فضائين شعاعيين جزئيين
- Somme de deux sous-espaces vectoriels : مجموع فضائين شعاعيين جزئيين
- Somme directe de deux sous-espaces vectoriels : مجموع مباشر لفضائين شعاعيين جزئيين
- Supplémentaire d'un sous-espace vectoriel : مكمّل فضاء شعاعي جزئي

Corrigés

L'enseignant: F. Gherbi

Pour bien comprendre, j'ai rédigé les solutions des exercices proposés de manière très détaillée. Je ne vous demande pas de rédiger de la même manière dans les examens, mais au minimum que ce que vous écriviez ait un sens !

للفهم الجيد، كتبت حلول التمارين المعروضة بطريقة جد مفصلة. لا أطلب منكم التحرير بنفس الطريقة في الامتحانات، و لكن في الحد الأدنى كل ما تكتبونه يكون له معنى!

Exercice nº 01:

Soit $E = IR_+^* \times IR = \{(x,y) \ / \ x>0 \text{ et } y \in IR\}$ muni de deux opérations $\oplus$ et $\otimes$ définies par :

$$\begin{cases} \bullet\ \forall (x,y),(x',y') \in E : (x,y) \oplus (x',y') = (x.x', y+y') \\ \bullet\ \forall (x,y) \in E,\ \forall \lambda \in IR : \lambda \otimes (x,y) = (x^\lambda, \lambda y) \end{cases}$$

Montrons que $(E,\oplus,\otimes)$ est un espace vectoriel sur le corps IR :

> **Rappel:** Soit $IK = IR$ ou $\mathbb{C}$; et soit E un ensemble non vide muni de deux opérations $\oplus$ et $\otimes$ avec :
>
> $$\begin{cases} \oplus \text{ est une loi de composition } \textbf{interne}\text{; i.e. } \forall u,v \in E : u \oplus v \in E. \\ \otimes \text{ est une loi de composition } \textbf{externe}\text{; i.e. } \forall \lambda \in IK, \forall v \in E : \lambda \otimes v \in E. \end{cases}$$
>
> On dit que $(E,\oplus,\otimes)$ est un espace vectoriel sur le corps IK s'il vérifie les conditions suivantes :
>
> ❶ $(E,\oplus)$ est un groupe commutatif.
>
> ❷ $\forall \lambda \in IK, \forall u,v \in E : \lambda \otimes (u \oplus v) = (\lambda \otimes u) \oplus (\lambda \otimes v).$
>
> ❸ $\forall \lambda,\mu \in IK, \forall v \in E : (\lambda+\mu) \otimes v = (\lambda \otimes v) \oplus (\mu \otimes v).$
>
> ❹ $\forall \lambda,\mu \in IK, \forall v \in E : \lambda \otimes (\mu \otimes v) = (\lambda.\mu) \otimes v.$
>
> ❺ $\forall v \in E : 1 \otimes v = v.$

D'abord; on vérifie que $\oplus$ est interne et $\otimes$ est externe; en effet :

- Soient $(x,y),(x',y') \in E$; i.e. $x>0$, $x'>0$ et $y,y' \in IR$, donc $x.x'>0$ et $y+y' \in IR$.
  D'où $(x,y) \oplus (x',y') = (x.x', y+y') \in E$.
- Soient $\lambda \in IR$ et $(x,y) \in E$; i.e. $x>0$ et $y \in IR$, donc $x^\lambda > 0$ et $\lambda y \in IR$.
  D'où $\lambda \otimes (x,y) = (x^\lambda, \lambda y) \in E$.

Maintenant; on montre que :

❶ $(E,\oplus)$ est un groupe commutatif :

- Soient $(x,y),(x',y'),(x'',y'') \in E$. On a
$$\begin{aligned}\big((x,y)\oplus(x',y')\big)\oplus(x'',y'') &= (x.x', y+y') \oplus (x'',y'') \\ &= \big((x.x').x'', (y+y')+y''\big) \\ &= \big(x.(x'.x''), y+(y'+y'')\big) \\ &= (x,y) \oplus (x'.x'', y'+y'') \\ &= (x,y) \oplus \big((x',y') \oplus (x'',y'')\big).\end{aligned}$$

D'où $\oplus$ est associative.

- Soient $(x,y),(x',y') \in E$. On a $(x,y)\oplus(x',y') = (x.x', y+y') = (x'.x, y'+y) = (x',y') \oplus (x,y)$.

D'où $\oplus$ est commutative.

- Soit $(x,y) \in E$; i.e. $x>0$ et $y \in IR$. On cherche $(e_1,e_2) \in E$ tel que $(x,y) \oplus (e_1,e_2) = (x,y)$.

On a $(x,y)\oplus(e_1,e_2) = (x,y) \Leftrightarrow (x.e_1, y+e_2) = (x,y) \Leftrightarrow x.e_1 = x$ et $y+e_2 = y \Leftrightarrow e_1 = 1$ et $e_2 = 0$.

D'où $(e_1,e_2) = (1,0) \in E$ est l'élément neutre de E par rapport à $\oplus$.

- Soit $(x, y) \in E$; i.e. $x > 0$ et $y \in IR$. On cherche $(x', y') \in E$ tel que $(x, y) \oplus (x', y') = (1,0)$.

On a $(x, y) \oplus (x', y') = (1,0) \Leftrightarrow (x.x', y + y') = (1,0) \Leftrightarrow x.x' = 1$ et $y + y' = 0 \Leftrightarrow x' = \frac{1}{x} > 0$ et $y' = -y \in IR$.

D'où $(x', y') = (\frac{1}{x}, -y) \in E$ est l'élément symétrique de (x, y) par rapport à $\oplus$.

❷ $\forall \lambda \in IR, \forall (x, y), (x', y') \in E: \lambda \otimes \big((x, y) \oplus (x', y')\big) = \big(\lambda \otimes (x, y)\big) \oplus \big(\lambda \otimes (x', y')\big)$:

Soient $\lambda \in IR$ et $(x, y) \in E$. Alors on a :

$$\begin{aligned}\lambda \otimes \big((x, y) \oplus (x', y')\big) &= \lambda \otimes (x.x', y + y') \\ &= ((x.x')^{\lambda}, \lambda(y + y')) \\ &= (x^{\lambda}.(x')^{\lambda}, \lambda y + \lambda y') \\ &= (x^{\lambda}, \lambda y) \oplus ((x')^{\lambda}, \lambda y') \\ &= \big(\lambda \otimes (x, y)\big) \oplus \big(\lambda \otimes (x', y')\big).\end{aligned}$$

❸ $\forall \lambda, \mu \in IR, \forall (x, y) \in E: (\lambda + \mu) \otimes (x, y) = \big(\lambda \otimes (x, y)\big) \oplus \big(\mu \otimes (x, y)\big)$:

Soient $\lambda, \mu \in IR$ et $(x, y) \in E$. Alors on a :

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu) \otimes (x, y) &= (x^{\lambda+\mu}, (\lambda + \mu) y) \\ &= (x^{\lambda}.x^{\mu}, \lambda y + \mu y) \\ &= (x^{\lambda}, \lambda y) \oplus (x^{\mu}, \mu y) \\ &= \big(\lambda \otimes (x, y)\big) \oplus \big(\mu \otimes (x, y)\big).\end{aligned}$$

❹ $\forall \lambda, \mu \in IR, \forall (x, y) \in E: \lambda \otimes \big(\mu \otimes (x, y)\big) = (\lambda.\mu) \otimes (x, y)$:

Soient $\lambda, \mu \in IR$ et $(x, y) \in E$. Alors on a :

$$\begin{aligned}\lambda \otimes \big(\mu \otimes (x, y)\big) &= \lambda \otimes (x^{\mu}, \mu y) \\ &= ((x^{\mu})^{\lambda}, \lambda(\mu y)) \\ &= (x^{\mu\lambda}, (\lambda\mu) y) \\ &= (x^{\lambda\mu}, (\lambda\mu) y) \\ &= (\lambda.\mu) \otimes (x, y).\end{aligned}$$

❺ $\forall (x, y) \in E: 1 \otimes (x, y) = (x, y)$:

Soit $(x, y) \in E$. Alors on a : $1 \otimes (x, y) = (x^1, 1.y) = (x, y)$.

Exercice nº 02:

I) On a $IR^2 = \{(x, y) / x, y \in IR\}$ muni des deux lois $\oplus$ et $\otimes$ définies par :

$$\begin{cases} \bullet\ \forall (x, y), (x', y') \in IR^2 : (x, y) \oplus (x', y') = (x + x', y + y') \\ \bullet\ \forall \lambda \in IR, \forall (x, y) \in IR^2 : \lambda \otimes (x, y) = (\lambda x, 0) \end{cases}$$

On verra si $(IR^2, \oplus, \otimes)$ est un espace vectoriel sur le corps IR :

D'abord; on vérifie si $\oplus$ est interne et $\otimes$ est externe.

- Soient $(x, y), (x', y') \in IR^2$; i.e. $x, y, x', y' \in IR$, donc $x + x' \in IR$ et $y + y' \in IR$.
  On a $(x, y) \oplus (x', y') = (x + x', y + y') \in IR^2$; donc $\oplus$ est interne.
- Soient $\lambda \in IR$ et $(x, y) \in IR^2$; i.e. $x, y \in IR$, donc $\lambda x \in IR$.
  On a $\lambda \otimes (x, y) = (\lambda x, 0) \in IR^2$; donc $\otimes$ est externe.

❶ On verra si $(IR^2, \oplus)$ est un groupe commutatif.

- Soient $(x, y), (x', y'), (x'', y'') \in IR^2$. On a $\big((x, y) \oplus (x', y')\big) \oplus (x'', y'') = (x + x', y + y') \oplus (x'', y'')$

$$= \big((x + x') + x'', (y + y') + y''\big)$$

$$\begin{aligned}&= \big(x+(x'+x''),\, y+(y'+y'')\big)\\&=(x,y)\oplus(x'+x'',\, y'+y'')\\&=(x,y)\oplus\big((x',y')\oplus(x'',y'')\big).\end{aligned}$$

D'où $\oplus$ est associative.

- Soient $(x,y),(x',y')\in IR^2$. On a $(x,y)\oplus(x',y')=(x+x',\,y+y')=(x'+x,\,y'+y)=(x',y')\oplus(x,y)$.

D'où $\oplus$ est commutative.

- Soit $(x,y)\in IR^2$; i.e. $x,y\in IR$. On cherche $(e_1,e_2)\in IR^2$ tel que $(x,y)\oplus(e_1,e_2)=(x,y)$.

On a $(x,y)\oplus(e_1,e_2)=(x,y) \Leftrightarrow (x+e_1,\,y+e_2)=(x,y) \Leftrightarrow x+e_1=x$ et $y+e_2=y \Leftrightarrow e_1=0$ et $e_2=0$.

D'où $(e_1,e_2)=(0,0)\in IR^2$ est l'élément neutre de IR^2 par rapport à $\oplus$.

- Soit $(x,y)\in IR^2$; i.e. $x,y\in IR$. On cherche $(x',y')\in IR^2$ tel que $(x,y)\oplus(x',y')=(0,0)$.

On a $(x,y)\oplus(x',y')=(0,0) \Leftrightarrow (x+x',\,y+y')=(0,0) \Leftrightarrow x+x'=0$ et $y+y'=0 \Leftrightarrow x'=-x$ et $y'=-y$.

D'où $(x',y')=(-x,-y)\in IR^2$ est l'élément symétrique de (x,y) par rapport à $\oplus$.

Finalement; $(IR^2,\oplus)$ est un groupe commutatif.

❷ On verra si $\forall\lambda\in IR, \forall(x,y),(x',y')\in IR^2$: $\lambda\otimes\big((x,y)\oplus(x',y')\big)=\big(\lambda\otimes(x,y)\big)\oplus\big(\lambda\otimes(x',y')\big)$.

Soient $\lambda\in IR$ et $(x,y)\in IR^2$. Alors on a :

$$\begin{aligned}\lambda\otimes\big((x,y)\oplus(x',y')\big)&=\lambda\otimes(x+x',\,y+y')\\&=(\lambda(x+x'),0)\\&=(\lambda x+\lambda x',0+0)\\&=(\lambda x,0)\oplus(\lambda x',0)\\&=\big(\lambda\otimes(x,y)\big)\oplus\big(\lambda\otimes(x',y')\big).\end{aligned}$$

❸ On verra si $\forall\lambda,\mu\in IR, \forall(x,y)\in IR^2$: $(\lambda+\mu)\otimes(x,y)=\big(\lambda\otimes(x,y)\big)\oplus\big(\mu\otimes(x,y)\big)$.

Soient $\lambda,\mu\in IR$ et $(x,y)\in IR^2$. Alors on a :

$$\begin{aligned}(\lambda+\mu)\otimes(x,y)&=((\lambda+\mu)x,0)\\&=(\lambda x+\mu x,0+0)\\&=(\lambda x,0)\oplus(\mu x,0)\\&=\big(\lambda\otimes(x,y)\big)\oplus\big(\mu\otimes(x,y)\big).\end{aligned}$$

❹ On verra si $\forall\lambda,\mu\in IR, \forall(x,y)\in IR^2$: $\lambda\otimes\big(\mu\otimes(x,y)\big)=(\lambda.\mu)\otimes(x,y)$.

Soient $\lambda,\mu\in IR$ et $(x,y)\in IR^2$. Alors on a :

$$\begin{aligned}\lambda\otimes\big(\mu\otimes(x,y)\big)&=\lambda\otimes(\mu x,0)\\&=(\lambda(\mu x),0)\\&=((\lambda\mu)x,0)\\&=(\lambda.\mu)\otimes(x,y).\end{aligned}$$

❺ On verra si $\forall(x,y)\in IR^2$: $1\otimes(x,y)=(x,y)$.

Soit $(x,y)\in IR^2$. Alors on a : $1\otimes(x,y)=(1.x,0)=(x,0)\neq(x,y)$.

Finalement; puisque la condition ❺ n'est pas vérifiée, alors $(IR^2,\oplus,\otimes)$ n'est pas un e.v. sur IR.

II) On a $IR^2=\{(x,y)/\ x,y\in IR\}$ muni des deux lois $\oplus$ et $\otimes$ définies par :

$$\begin{cases}\bullet\ \forall(x,y),(x',y')\in IR^2: (x,y)\oplus(x',y')=(x+x',\,y+y')\\ \bullet\ \forall\lambda\in IR,\ \forall(x,y)\in IR^2: \lambda\otimes(x,y)=(\lambda x,\,y)\end{cases}$$

On verra si $(IR^2, \oplus, \otimes)$ est un espace vectoriel sur le corps IR :

D'abord; on vérifie si $\oplus$ est interne et $\otimes$ est externe.

• On a $\oplus$ est interne sur IR^2 (comme dans le cas **(I)**; car on a la même loi $\oplus$).

• Soient $\lambda \in IR$ et $(x, y) \in IR^2$; i.e. $x, y \in IR$, donc $\lambda x \in IR$.

On a $\lambda \otimes (x, y) = (\lambda x, y) \in IR^2$; donc $\otimes$ est externe.

❶ On a $(IR^2, \oplus)$ est un groupe commutatif (comme dans le cas **(I)**; car on a la même loi $\oplus$).

❷ On verra si $\forall \lambda \in IR, \forall (x, y), (x', y') \in IR^2$: $\lambda \otimes \big((x, y) \oplus (x', y')\big) = \big(\lambda \otimes (x, y)\big) \oplus \big(\lambda \otimes (x', y')\big)$.

Soient $\lambda \in IR$ et $(x, y) \in IR^2$. Alors on a :

$$\begin{aligned}
\lambda \otimes \big((x, y) \oplus (x', y')\big) &= \lambda \otimes (x + x', y + y') \\
&= (\lambda(x + x'), y + y') \\
&= (\lambda x + \lambda x', y + y') \\
&= (\lambda x, y) \oplus (\lambda x', y') \\
&= \big(\lambda \otimes (x, y)\big) \oplus \big(\lambda \otimes (x', y')\big).
\end{aligned}$$

❸ On verra si $\forall \lambda, \mu \in IR, \forall (x, y) \in IR^2$: $(\lambda + \mu) \otimes (x, y) = \big(\lambda \otimes (x, y)\big) \oplus \big(\mu \otimes (x, y)\big)$.

Soient $\lambda, \mu \in IR$ et $(x, y) \in IR^2$. Alors on a :

$$\begin{aligned}
(\lambda + \mu) \otimes (x, y) &= ((\lambda + \mu) x, y) \\
&= (\lambda x + \mu x, y + 0) \\
&= (\lambda x, y) \oplus (\mu x, 0) \\
&= \big(\lambda \otimes (x, y)\big) \oplus \big(\mu \otimes (x, 0)\big) \\
&\neq \big(\lambda \otimes (x, y)\big) \oplus \big(\mu \otimes (x, y)\big).
\end{aligned}$$

Finalement; puisque la condition ❸ n'est pas vérifiée, alors $(IR^2, \oplus, \otimes)$ n'est pas un e.v. sur IR.

Notons que les conditions ❹ et ❺ sont vérifiées dans ce cas.

III) On a $IR^2 = \{(x, y) / x, y \in IR\}$ muni des deux lois $\oplus$ et $\otimes$ définies par :

$$\begin{cases}
\bullet\ \forall (x, y), (x', y') \in IR^2 : (x, y) \oplus (x', y') = (x + x', y + y') \\
\bullet\ \forall \lambda \in IR,\ \forall (x, y) \in IR^2 : \lambda \otimes (x, y) = (\lambda x, \lambda y)
\end{cases}$$

On verra si $(IR^2, \oplus, \otimes)$ est un espace vectoriel sur le corps IR :

D'abord; on vérifie si $\oplus$ est interne et $\otimes$ est externe.

• On a $\oplus$ est interne sur IR^2 (comme dans le cas **(I)**; car on a la même loi $\oplus$).

• Soient $\lambda \in IR$ et $(x, y) \in IR^2$; i.e. $x, y \in IR$, donc $\lambda x \in IR$ et $\lambda y \in IR$.

On a $\lambda \otimes (x, y) = (\lambda x, \lambda y) \in IR^2$; donc $\otimes$ est externe.

❶ On a $(IR^2, \oplus)$ est un groupe commutatif (comme dans le cas **(I)**; car on a la même loi $\oplus$).

❷ On verra si $\forall \lambda \in IR, \forall (x, y), (x', y') \in IR^2$: $\lambda \otimes \big((x, y) \oplus (x', y')\big) = \big(\lambda \otimes (x, y)\big) \oplus \big(\lambda \otimes (x', y')\big)$.

Soient $\lambda \in IR$ et $(x, y) \in IR^2$. Alors on a :

$$\begin{aligned}
\lambda \otimes \big((x, y) \oplus (x', y')\big) &= \lambda \otimes (x + x', y + y') \\
&= (\lambda(x + x'), \lambda(y + y')) \\
&= (\lambda x + \lambda x', \lambda y + \lambda y') \\
&= (\lambda x, \lambda y) \oplus (\lambda x', \lambda y') \\
&= \big(\lambda \otimes (x, y)\big) \oplus \big(\lambda \otimes (x', y')\big).
\end{aligned}$$

❸ On verra si $\forall \lambda,\mu \in IR, \forall (x,y)\in IR^2: (\lambda+\mu)\otimes(x,y) = \big(\lambda\otimes(x,y)\big)\oplus\big(\mu\otimes(x,y)\big).$

Soient $\lambda,\mu\in IR$ et $(x,y)\in IR^2$. Alors on a :

$$\begin{aligned}(\lambda+\mu)\otimes(x,y) &= ((\lambda+\mu)\,x,(\lambda+\mu)\,y)\\ &= (\lambda x+\mu x,\lambda y+\mu y)\\ &= (\lambda x,\lambda y)\oplus(\mu x,\mu y)\\ &= \big(\lambda\otimes(x,y)\big)\oplus\big(\mu\otimes(x,y)\big).\end{aligned}$$

❹ On verra si $\forall \lambda,\mu \in IR, \forall (x,y)\in IR^2: \lambda\otimes\big(\mu\otimes(x,y)\big) = (\lambda.\mu)\otimes(x,y).$

Soient $\lambda,\mu\in IR$ et $(x,y)\in IR^2$. Alors on a :

$$\begin{aligned}\lambda\otimes\big(\mu\otimes(x,y)\big) &= \lambda\otimes(\mu x,\mu y)\\ &= (\lambda(\mu x),\lambda(\mu y))\\ &= ((\lambda\mu)\,x,(\lambda\mu)\,y)\\ &= (\lambda\mu)\otimes(x,y).\end{aligned}$$

❺ On verra si $\forall (x,y)\in IR^2: 1\otimes(x,y)=(x,y).$

Soit $(x,y)\in IR^2$. Alors on a : $1\otimes(x,y)=(1.x,1.y)=(x,y).$

Finalement; $(IR^2,\oplus,\otimes)$ est un e.v. sur IR (c'est un espace vectoriel usuelle).

Exercice nº 03:

Rappel: Pour la facilité; dans un espace vectoriel $(E,\oplus,\otimes)$ sur IK, la loi interne $\oplus$ on la désigne $+$ et loi externe $\otimes$ on la désigne $.$ ou néant; donc la définition d'un espace vectoriel devient :

• On dit que $(E,+,.)$ est un e.v. sur le corps IK (ou tout simplement E est un e.v. sur IK) si :

$$\begin{cases} + \text{ est une loi de composition interne sur } E;\text{ i.e. } \forall u,v\in E: u+v\in E.\\ . \text{ est une loi de composition externe sur } E;\text{ i.e. } \forall\lambda\in IK,\forall v\in E: \lambda v\in E.\end{cases}$$

❶ $(E,+)$ est un groupe commutatif.
❷ $\forall\lambda\in IK,\forall u,v\in E: \lambda(u+v)=\lambda u+\lambda v.$
❸ $\forall\lambda,\mu\in IK,\forall v\in E: (\lambda+\mu)v=\lambda v+\mu v.$
❹ $\forall\lambda,\mu\in IK,\forall v\in E: \lambda(\mu v)=(\lambda\mu)v.$
❺ $\forall v\in E: 1v=v.$

• Les éléments de l'espace vectoriel E on les appelle **les vecteurs**; et les éléments du corps IK on les appelle **les scalaires** ($\Rightarrow$ la somme de deux vecteurs est un vecteur; et la multiplication d'un vecteur par un scalaire est un vecteur).

• L'élément neutre par rapport à $+$ dans l'e.v. E on le désigne o_E; et on l'appelle **le vecteur nul**.

• Dans l'espace vectoriel E sur IK, on a $\forall v\in E: -v=(-1)v$; où $-v$ désigne l'élément symétrique de v par rapport à $+$, et $(-1)v$ est la multiplication du vecteur v par le scalaire -1.

• Pour deux vecteurs u et v de l'e.v. E, on écrit par convention $u-v$ au lieu $u+(-v)$ et $u+(-1)v$.

Soit E un espace vectoriel sur le corps IK; et soient $u,v\in E$ et $\lambda,\mu\in IK$.

1) • Montrons que $\lambda(u-v)=\lambda u-\lambda v$:

En effet : $\lambda(u-v)=\lambda(u+(-1)v)$ (car $u-v=u+(-1)v$ par convention)

$=\lambda u+\lambda((-1)v)$ (d'après la condition ❷ dans la définition de l'e.v.)

$=\lambda u+(\lambda(-1))v$ (d'après la condition ❹ dans la définition de l'e.v.)

$=\lambda u+((-1)\lambda)v$ (car $\lambda(-1)=(-1)\lambda$)

$=\lambda u+(-1)(\lambda v)$ (d'après la condition ❹ dans la définition d'un l'e.v.)

$=\lambda u-\lambda v$ (car $\lambda u+(-1)(\lambda v)=\lambda u-\lambda v$ par convention).

• En prenant $u=v$ dans $\lambda(u-v)=\lambda u-\lambda v$; on obtient $\lambda o_E=o_E$ (car $v-v=o_E$ et $\lambda v-\lambda v=o_E$).

2) • Montrons que $(\lambda-\mu)v=\lambda v-\mu v$:

En effet : $(\lambda-\mu)v=(\lambda+(-1)\mu)v$ (car $\lambda-\mu=\lambda+(-1)\mu$)

$=\lambda v+((-1)\mu)v$ (d'après la condition ❸ dans la définition de l'e.v.)

$=\lambda v+(-1)(\mu v)$ (d'après la condition ❹ dans la définition de l'e.v.)

$=\lambda v-\mu v$ (car $\lambda v+(-1)(\mu v)=\lambda v-\mu v$ par convention).

• En prenant $\lambda=\mu$ dans $(\lambda-\mu)v=\lambda v-\mu v$; on obtient $0v=o_E$ (car $\mu-\mu=0$ et $\mu v-\mu v=o_E$).

3) Montrons que $(-\lambda)(-v)=\lambda v$:

En effet : $(-\lambda)(-v)=(-\lambda)((-1)v)$ (car $-v=(-1)v$)

$=(-\lambda(-1))v$ (d'après la condition ❹ dans la définition de l'e.v.)

$=\lambda v$ (car $-\lambda(-1)=\lambda$).

Exercice n° 04:

Rappel: Soit $(E,+,.)$ un espace vectoriel sur le corps IK; et soit $F\subset E$.

Définition:

On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si $(F,+,.)$ est un espace vectoriel sur IK.

$o_F=o_E$

Proposition 1:

$$F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \Leftrightarrow \begin{cases} \bullet\ F\neq\phi \quad (o_E\in F) \\ \bullet\ \forall u,v\in F : u+v\in F \\ \bullet\ \forall\lambda\in IK, \forall v\in F : \lambda.v\in F \end{cases}$$

Proposition 2:

$$F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \Leftrightarrow \begin{cases} \bullet\ F\neq\phi \quad (o_E\in F) \\ \bullet\ \forall\lambda,\mu\in IK, \forall u,v\in F : \lambda.u+\mu.v\in F \end{cases}$$

I) On verra; dans l'e.v. IR^3 sur IR, si les parties suivantes sont des s.e.v. ou non :

Rappel: On a $IK^n=\{(x_1,x_2,..,x_n)/\ x_i\in IK\}$ est un e.v. sur IK; avec les lois $+$ et $.$ définies par :

$$\begin{cases} \bullet\ \forall(x_1,x_2,..,x_n),(y_1,y_2,..,y_n)\in IK^n : (x_1,x_2,..,x_n)+(y_1,y_2,..,y_n)=(x_1+y_1,x_2+y_2,..,x_n+y_n). \\ \bullet\ \forall\lambda\in IK, \forall(x_1,x_2,..,x_n)\in IK^n : \lambda(x_1,x_2,..,x_n)=(\lambda x_1,\lambda x_2,..,\lambda x_n). \end{cases}$$

pour ces lois :

Où $o_{IK^n}=(\underbrace{0,0,..,0}_{\text{n-fois}})$ est le vecteur nul de cet espace.

$\begin{cases} \bullet\ IR^n \text{ est un e.v. sur } IR \\ \bullet\ \mathbb{C}^n \text{ est un e.v. sur } \mathbb{C} \end{cases}$ $\begin{cases} \bullet\ IR^n \text{ n'est pas un e.v. sur } \mathbb{C} \\ \bullet\ \mathbb{C}^n \text{ est un e.v. sur } IR \end{cases}$

① $F_1 = \{(x,y,z) \in IR^3 \,/\, x+y+z = a\}$ (où $a \in IR$) :

D'abord; on voit que si $a \neq 0$, alors $(0,0,0) \notin F_1$ car $0+0+0 = 0 \neq a$; d'où F_1 n'est pas un s.e.v.

Supposons maintenant que $a = 0$; i.e. $F_1 = \{(x,y,z) \in IR^3 \,/\, x+y+z = 0\}$:

• On a $0+0+0=0$; donc $(0,0,0) \in F_1$, d'où $F_1 \neq \phi$.

• Soient $(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2) \in F_1$; i.e. $x_1+y_1+z_1 = 0$ et $x_2+y_2+z_2 = 0$.

On a $(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$ avec :

$(x_1+x_2)+(y_1+y_2)+(z_1+z_2) = (x_1+y_1+z_1)+(x_2+y_2+z_2) = 0+0 = 0.$

Donc $(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) \in F_1$; d'où $(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2) \in F_1$.

• Soient $\lambda \in IR$ et $(x,y,z) \in F_1$; i.e. $x+y+z=0$.

On a $\lambda(x,y,z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ avec :

$(\lambda x)+(\lambda y)+(\lambda z) = \lambda(x+y+z) = \lambda.0 = 0.$

Donc $(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \in F_1$; d'où $\lambda(x,y,z) \in F_1$.

Finalement; $F_1 = \{(x,y,z) \in IR^3 \,/\, x+y+z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de IR^3.

On a donc : $\begin{cases} a \neq 0 \iff F_1 \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } IR^3. \\ a = 0 \iff F_1 \text{ est un sous-espace vectoriel de } IR^3. \end{cases}$

② $F_2 = \{(x,y,z) \in IR^3 \,/\, x = 2y \text{ et } z = 0\}$:

• On a $(0,0,0) \in F_2$, car $0 = 2\times 0$ et $0 = 0$; donc $F_2 \neq \phi$.

• Soient $\lambda, \mu \in IR$ et $(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2) \in F_2$; donc $x_1 = 2y_1$; $z_1 = 0$ et $x_2 = 2y_2$; $z_2 = 0$.

On a $\lambda(x_1,y_1,z_1)+\mu(x_2,y_2,z_2) = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)+(\mu x_2, \mu y_2, \mu z_2) = (\lambda x_1+\mu x_2, \lambda y_1+\mu y_2, \lambda z_1+\mu z_2)$;

avec : $\lambda x_1+\mu x_2 = \lambda(2y_1)+\mu(2y_2) = 2(\lambda y_1+\mu y_2)$ et $\lambda z_1+\mu z_2 = \lambda(0)+\mu(0) = 0+0 = 0.$

C'est-à-dire que : $\lambda x_1+\mu x_2 = 2(\lambda y_1+\mu y_2)$ et $\lambda z_1+\mu z_2 = 0.$

Donc $(\lambda x_1+\mu x_2, \lambda y_1+\mu y_2, \lambda z_1+\mu z_2) \in F_2$; d'où $\lambda(x_1,y_1,z_1)+\mu(x_2,y_2,z_2) \in F_2$.

Finalement; F_2 est un sous-espace vectoriel de IR^3.

③ $F_3 = \{(x,y,z) \in IR^3 \,/\, x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$:

• On a $0^2+0^2+0^2 = 0 \leq 1$; donc $(0,0,0) \in F_3$, d'où $F_3 \neq \phi$.

• Soient $\lambda \in IR$ et $(x,y,z) \in F_3$; i.e. $x^2+y^2+z^2 \leq 1$.

car $x^2+y^2+z^2 \leq 1$

On a $\lambda(x,y,z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ avec $(\lambda x)^2+(\lambda y)^2+(\lambda z)^2 = \lambda^2(x^2+y^2+z^2) \leq \lambda^2.$

On remarque; pour $(1,0,0) \in F_3$ car $1^2+0^2+0^2 = 1 \leq 1$, que $2(1,0,0) = (2,0,0) \notin F_3$ car $2^2+0^2+0^2 = 4 > 1.$

D'où F_3 n'est pas un sous-espace vectoriel de IR^3.

Remarque:

On a aussi; pour $(1,0,0),(0,1,0) \in F_3$, que $(1,0,0)+(0,1,0) = (1,1,0) \notin F_3$ car $1^2+1^2+0^2 = 2 > 1.$

④ $F_4 = \{(x,y,z) \in IR^3 \,/\, xy = 0\}$:

• On a $0 \times 0 = 0$; donc $(0,0,0) \in F_4$, d'où $F_4 \neq \phi$.

• Soient $(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2) \in F_4$; i.e. $x_1 y_1 = 0$ et $x_2 y_2 = 0$.

On a $(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$ avec :

$(x_1+x_2)(y_1+y_2) = x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+x_2y_2 = 0+x_1y_2+x_2y_1+0 = x_1y_2+x_2y_1$ ($\neq 0$ en général).

On remarque; pour $(1,0,1),(0,1,-1) \in F_4$, que $(1,0,1)+(0,2,3) = (1,2,4) \notin F_4$ car $1\times 2 \neq 0.$

D'où F_4 n'est pas un sous-espace vectoriel de IR^3.

Remarque:

On a $F_4 = \{(x,y,z) \in IR^3 \,/\, xy = 0\} = \{(x,y,z) \in IR^3 \,/\, x = 0 \text{ ou } y = 0\}$

$$= \{(x,y,z) \in IR^3 \,/\, x = 0\} \cup \{(x,y,z) \in IR^3 \,/\, y = 0\}$$

$$= K_1 \cup K_2.$$

avec $K_1 = \{(x,y,z) \in IR^3 \,/\, x = 0\}$ et $K_2 = \{(x,y,z) \in IR^3 \,/\, y = 0\}$ sont des s.e.v. de IR^3; parce que :

- Il est clair que $(0,0,0) \in K_1$; donc $K_1 \neq \phi$.
- Soient $\lambda, \mu \in IR$ et $(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2) \in K_1$; donc $x_1 = x_2 = 0$.
  On a $\lambda(x_1,y_1,z_1) + \mu(x_2,y_2,z_2) = (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2)$; avec $\lambda x_1 + \mu x_2 = \lambda(0) + \mu(0) = 0$.
  Donc $(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2) \in K_1$; d'où $\lambda(x_1,y_1,z_1) + \mu(x_2,y_2,z_2) \in K_1$.

Finalement; K_1 est un s.e.v. de IR^3.

- Il est clair que $(0,0,0) \in K_2$; donc $K_2 \neq \phi$.
- Soient $\lambda, \mu \in IR$ et $(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2) \in K_2$; donc $y_1 = y_2 = 0$.
  On a $\lambda(x_1,y_1,z_1) + \mu(x_2,y_2,z_2) = (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2)$; avec $\lambda y_1 + \mu y_2 = \lambda(0) + \mu(0) = 0$.
  Donc $(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2) \in K_2$; d'où $\lambda(x_1,y_1,z_1) + \mu(x_2,y_2,z_2) \in K_2$.

Finalement; K_2 est un s.e.v. de IR^3.

Ceci signifie que la réunion des s.e.v. d'un e.v. n'est pas forcément un s.e.v.

II) On verra; dans l'e.v. $F(IR,IR)$ sur IR, si les parties suivantes sont des s.e.v. ou non :

Rappel: On a $F(IR,IR) = \{ f \,/\, f : IR \to IR \}$ est un e.v. sur IR; avec les lois $+$ et $.$ définies par :

- $\forall f, g \in F(IR,IR)$: $f + g \in F(IR,IR)$ où $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$; $\forall x \in IR$.
- $\forall \lambda \in IR, \forall f \in F(IR,IR)$: $\lambda f \in F(IR,IR)$ où $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$; $\forall x \in IR$.

Où $f_\circ \in F(IR,IR)$ est le vecteur nul définie par $f_\circ(x) = 0$; $\forall x \in IR$ (c'est la fonction nulle sur IR).

⑤ $F_5 = \{ f \in F(IR,IR) \,/\, 2f(0) = f(2) \}$:

- On a $F_5 \neq \phi$; car on sait que $f_\circ(0) = f_\circ(2) = 0$; donc $2f_\circ(0) = f_\circ(2)$, d'où $f_\circ \in F_5$.
- Soients $f, g \in F_5$; i.e. $2f(0) = f(2)$ et $2g(0) = g(2)$.
  On a $2(f+g)(0) = 2(f(0) + g(0)) = 2f(0) + 2g(0) = f(2) + g(2) = (f+g)(2)$; i.e. $2(f+g)(0) = (f+g)(2)$.
  D'où $f + g \in F_5$.
- Soients $\lambda \in IR$ et $f \in F_5$; i.e. $2f(0) = f(2)$.
  On a $2(\lambda f)(0) = 2(\lambda f(0)) = \lambda(2f(0)) = \lambda f(2) = (\lambda f)(2)$; i.e. $2(\lambda f)(0) = (\lambda f)(2)$.
  D'où $\lambda f \in F_5$.

Finalement; F_5 est un sous-espace vectoriel de $F(IR,IR)$.

⑥ $F_6 = \{ f \in F(IR,IR) \,/\, f(2) = f(0) + 2 \}$:

On sait que $f_\circ(0) = f_\circ(2) = 0$; donc $f_\circ(2) \neq f_\circ(0) + 2$, d'où $f_\circ \notin F_6$.

D'où F_6 n'est pas un sous-espace vectoriel de $F(IR,IR)$.

III) On verra; dans l'e.v. $IR_n[X]$ sur IR, si les parties suivantes sont des s.e.v. ou non :

> **Rappel:** On a $IR_n[X]=\{P\in IR[X]\,/\,d^oP\le n\}$ est un e.v. sur IR; avec les lois $+$ et $.$ définies par :
>
> - $\forall P,Q\in IR_n[X]\,/\,P(X)=a_0+a_1X+a_2X^2+\cdots+a_nX^n$ et $Q(X)=b_0+b_1X+b_2X^2+\cdots+b_nX^n$; où $a_i,b_i\in IR.$ On définit : $(P+Q)(X)=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)X+(a_2+b_2)X^2+\cdots+(a_n+b_n)X^n$; où $a_i+b_i\in IR.$ D'où $\forall P,Q\in IR_n[X]:\ P+Q\in IR_n[X].$
> - $\forall\lambda\in IR,\forall P\in IR_n[X]\,/\,P(X)=a_0+a_1X+a_2X^2+\cdots+a_nX^n$; où $a_i\in IR.$ On définit : $(\lambda P)(X)=(\lambda a_0)+(\lambda a_1)X+(\lambda a_2)X^2+\cdots+(\lambda a_n)X^n$; où $\lambda a_i\in IR.$ D'où $\forall\lambda\in IR,\forall P\in IR_n[X]:\ \lambda P\in IR_n[X].$
>
> Où $0\in IR_n[X]$ dont les coefficients sont tous nuls ($d^o0\overset{\text{par convention}}{=}-\infty<n$) est le vecteur nul de cet espace.
> (Notons que pour éviter la convention $-\infty<n$; on écrit : $IR_n[X]=\{P\in IR[X]\,/\,P=0 \text{ ou } d^oP\le n\}$).

⑦ $F_7=\{f\in IR_n[X]\,/\,d^of=n\}$:
On a $0\notin F_7$; car $d^o0\ne n$, d'où F_7 n'est pas un sous-espace vectoriel de $IR_n[X]$.
(Ou bien, pour $f=X^n$ et $g=X^{n-1}-X^n$; on a $f,g\in F_7$ et $f+g=X^{n-1}\notin F_7$ (car $d^oX^{n-1}=n-1<n$)).

⑧ $F_8=\{f\in IR_n[X]\,/\,f=0 \text{ ou } d^of\le n\}$:
On voit que $F_8=IR_n[X]$; donc F_8 est un s.e.v. de $IR_n[X]$ (car tout e.v. est un s.e.v. de lui-même).

Exercice nº 05:

Soit E un espace vectoriel sur le corps IK; et soient F et G deux s.e.v. de E.

1) Montrons que $F\cap G=\{v\in E\,/\,v\in F \text{ et } v\in G\}$ est un s.e.v. de E; en effet :

- Puisque F et G sont des s.e.v. de E, alors $o_E\in F$ et $o_E\in G$; d'où $o_E\in F\cap G$ ($\Rightarrow F\cap G\ne\phi$).
- Soient $\lambda,\mu\in IK$ et $u,v\in F\cap G$; donc $u,v\in F$ et $u,v\in G$.

$$\begin{cases}\text{Puisque } u,v\in F \text{ et } F \text{ est un s.e.v. de } E, \text{ alors } \lambda u+\mu v\in F.\\ \text{Puisque } u,v\in G \text{ et } G \text{ est un s.e.v. de } E, \text{ alors } \lambda u+\mu v\in G.\end{cases}$$

Maintenant; comme $\lambda u+\mu v\in F$ et $\lambda u+\mu v\in G$, alors $\lambda u+\mu v\in F\cap G$.
Finalement; $F\cap G$ est un s.e.v. de E.

2) Montrons que : $F\cup G$ est un s.e.v. de E $\Leftrightarrow$ ($F\subset G$ ou $G\subset F$).
($\Rightarrow$) : Supposons que $F\cup G$ soit un s.e.v. de E; et montrons que $F\subset G$ ou $G\subset F$.
On suppose donc que $F\cup G$ soit un s.e.v. de E et que $F\not\subset G$; et montrons que $G\subset F$.
(car dans la logique; on a : $\big(p\Rightarrow(q \text{ ou } r)\big)\Leftrightarrow\big((p \text{ et } \overline{q})\Rightarrow r\big)\Leftrightarrow\big((p \text{ et } \overline{r})\Rightarrow q\big)$).
Soit $v\in G.$ Puisque par hypothèse $F\not\subset G$, alors il existe $v_0\in F$ tel que $v_0\notin G$.
Comme $v\in G$ et $v_0\in F$, alors $v,v_0\in F\cup G.$ Or $F\cup G$ est un s.e.v. de E; donc $v+v_0\in F\cup G$.
C'est-à-dire que $v+v_0\in F$ ou $v+v_0\in G$.
Si $v+v_0\in G$; et comme $-v\in G$ (car $v\in G$ qui est un s.e.v. de E), alors $(v+v_0)-v\in G$; i.e. $v_0\in G$; une contradiction, car $v_0\notin G$. Par conséquent on a $v+v_0\in F$; et comme $-v_0\in F$ (car $v_0\in F$ qui est un s.e.v. de E), alors $(v+v_0)-v_0\in F$; i.e. $v\in F$.

Finalement; on a montré que $\forall v : v \in G \Rightarrow v \in F$; d'où $G \subset F$.

$(\Leftarrow)$: Supposons que $F \subset G$ ou $G \subset F$; et montrons que $F \cup G$ est un s.e.v. de E.

(dans la logique; on a : $\big((p \text{ ou } q) \Rightarrow r\big) \Leftrightarrow \big((p \Rightarrow r) \text{ et } (q \Rightarrow r)\big)$).

Si $F \subset G$, alors $F \cup G = G$ qui est par hypothèse un s.e.v. de E.

Si $G \subset F$, alors $F \cup G = F$ qui est par hypothèse un s.e.v. de E.

3) Montrons que $F + G = \{a + b \in E / a \in F \text{ et } b \in G\}$ est un s.e.v. de E; en effet :

- Puisque F et G sont des s.e.v. de E, alors $o_E \in F$ et $o_E \in G$; d'où $o_E = o_E + o_E \in F + G$.
- Soient $\lambda, \mu \in IK$ et $u, v \in F + G$; donc $u = a_1 + b_1$ et $v = a_2 + b_2$ où $a_1, a_2 \in F$ et $b_1, b_2 \in G$.

  On a : $\lambda u + \mu v = \lambda(a_1 + b_1) + \mu(a_2 + b_2) = (\lambda a_1 + \mu a_2) + (\lambda b_1 + \mu b_2)$; avec :

  $\begin{cases} \lambda a_1 + \mu a_2 \in F \text{ car } a_1, a_2 \in F \text{ et } F \text{ est un s.e.v. de } E. \\ \lambda b_1 + \mu b_2 \in G \text{ car } b_1, b_2 \in G \text{ et } G \text{ est un s.e.v. de } E. \end{cases}$

  D'où $\lambda u + \mu v \in F + G$.

Finalement; $F + G$ est un s.e.v. de E.

Exercice n° 06:

Soit $E = F(IR, IR) = \{ f \,/\, f : IR \to IR \}$, et soient les deux parties :

$F = \{ f \in E \,/\, f(x) = f(-x);\ \forall x \in IR\}$

$G = \{ f \in E \,/\, f(-x) = -f(x);\ \forall x \in IR\}$

1) Montrons que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E; en effet :

❶ $F = \{ f \in E \,/\, f(x) = f(-x);\ \forall x \in IR\}$:

- On sait que $f_\circ(x) = 0$ et $f_\circ(-x) = 0$ pour tout $x \in IR$; donc $f_\circ(x) = f_\circ(-x); \forall x \in IR$, d'où $f_\circ \in F$.
- Soient $\lambda, \mu \in IR$ et $f, g \in F$; i.e. $f(x) = f(-x)$ et $g(x) = g(-x); \forall x \in IR$.

  On a
  $$\begin{aligned}(\lambda f + \mu g)(x) &= (\lambda f)(x) + (\mu g)(x) \\ &= \lambda f(x) + \mu g(x) \\ &= \lambda f(-x) + \mu g(-x) \\ &= (\lambda f)(-x) + (\mu g)(-x) \\ &= (\lambda f + \mu g)(-x);\ \forall x \in IR.\end{aligned}$$

  D'où $\lambda f + \mu g \in F$.

Par suite F est un s.e.v. de $E = F(IR, IR)$.

❷ $G = \{ f \in E \,/\, f(-x) = -f(x);\ \forall x \in IR\}$:

- On sait que $f_\circ(x) = 0$ et $f_\circ(-x) = 0$ pour tout $x \in IR$; donc $f_\circ(-x) = -f_\circ(x); \forall x \in IR$, d'où $f_\circ \in G$.
- Soient $\lambda, \mu \in IR$ et $f, g \in G$; i.e. $f(-x) = -f(x)$ et $g(-x) = -g(x); \forall x \in IR$.

  On a
  $$\begin{aligned}(\lambda f + \mu g)(-x) &= (\lambda f)(-x) + (\mu g)(-x) \\ &= \lambda f(-x) + \mu g(-x) \\ &= -\lambda f(x) - \mu g(x) \\ &= -\big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big) \\ &= -\big((\lambda f)(x) + (\mu g)(x)\big) \\ &= -(\lambda f + \mu g)(x);\ \forall x \in IR.\end{aligned}$$

  D'où $\lambda f + \mu g \in G$.

Par suite G est un s.e.v. de $E = F(IR, IR)$.

2) Montrons que $E = F \oplus G$:

Rappel: Soit E un espace vectoriel; et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

- On a $F \cap G = \{v \in E \,/\, v \in F \text{ et } v \in G\}$ et $F + G = \{u + v \in E \,/\, u \in F \text{ et } v \in G\}$ sont des s.e.v. de E.
- Notons que $F + G = G + F$, $F + F = F$, $F \cap G \subset F \subset F + G$ et $F \cap G \subset G \subset F + G$.
- Notons que si $v \in F + G$, alors $\exists a \in F, \exists b \in G : v = a + b$; où a et b ne sont pas uniques.
- On dit que E est somme directe de F et G; et on écrit $E = F \oplus G$, si $E = F + G$ et $F \cap G = \{o_E\}$.
- On dit que F est un supplémentaire de G dans E (ou le contraire) si $E = F \oplus G$.
- On a : $E = F \oplus G \Leftrightarrow$ Tout vecteur $v \in E$ s'écrit de manière unique $a + b$ où $a \in F$ et $b \in G$.

- $E = F + G$:

Soit $f \in E$. On peut écrire $f(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} + \dfrac{f(x) - f(-x)}{2} = f_1(x) + f_2(x) = (f_1 + f_2)(x); \ \forall x \in IR.$

Par suite $f = f_1 + f_2$; où $f_1(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $f_2(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}; \ \forall x \in IR.$

On a : $\begin{cases} f_1(-x) = \dfrac{f(-x) + f(x)}{2} = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} = f_1(x); \ \forall x \in IR, \text{ d'où } f_1 \in F. \\ f_2(-x) = \dfrac{f(-x) - f(x)}{2} = -\dfrac{f(x) - f(-x)}{2} = -f_2(x); \ \forall x \in IR, \text{ d'où } f_2 \in G. \end{cases}$

Donc $f = f_1 + f_2$; où $f_1 \in F$ et $f_2 \in G$, d'où $f \in F + G$; i.e. $E \subset F + G$.

Maintenant; comme $F + G \subset E$ (toujours), alors $E = F + G$.

- $F \cap G = \{f_\circ\}$:

Soit $f \in F \cap G$; donc $f \in F$ et $f \in G$, d'où $f(x) = f(-x)$ et $f(-x) = -f(x)$; $\forall x \in IR$.

Donc $f(x) = -f(x)$, $\forall x \in IR$; i.e. $2f(x) = 0$, $\forall x \in IR$; i.e. $f(x) = 0$, $\forall x \in IR$; d'où $f = f_\circ$.

Par suite $F \cap G \subset \{f_\circ\}$; or $\{f_\circ\} \subset F \cap G$ (toujours), donc $F \cap G = \{f_\circ\}$.

Finalement; comme $E = F + G$ et $F \cap G = \{f_\circ\}$, alors $E = F \oplus G$.

Remarque:

Puisque $E = F \oplus G$, alors toute fonction de IR vers IR s'écrit de manière unique comme somme de deux fonctions; l'une paire et l'autre impaire sur IR (par exemple $e^x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} + \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \mathrm{ch}\,x + \mathrm{sh}\,x$).

Exercice n° 07:

Soient $U = \{(x, y, z) \in IR^3 \,/\, x = y = z\}$ et $V = \{(x, y, z) \in IR^3 \,/\, x = 0\}$ deux s.e.v. de IR^3.

Montrons que $IR^3 = U \oplus V$; i.e. $IR^3 = U + V$ et $U \cap V = \{(0,0,0)\}$; en effet :

- Soit $(x, y, z) \in IR^3$. On a $(x, y, z) = (x, x, x) + (0, y - x, z - x)$ où $(x, x, x) \in U$ et $(0, y - x, z - x) \in V$.
  Par suite $(x, y, z) \in U + V$, d'où $IR^3 \subset U + V$; or $U + V \subset IR^3$ (toujours), donc $IR^3 = U + V$.
- On a : $U \cap V = \{(x, y, z) \in IR^3 \,/\, (x, y, z) \in U \text{ et } (x, y, z) \in V\} = \{(x, y, z) \in IR^3 \,/\, x = y = z \text{ et } x = 0\}$
  $= \{(x, y, z) \in IR^3 \,/\, x = y = z = 0\} = \{(0,0,0)\}$.

Fin