Université de Sétif1 2018 / 2019
Faculté Des sciences Module : Algèbre 2
Département MI
1ère Année MI (S 2) Pr A.Merouani

Série № 01

EX01

Parmi les ensembles suivants, lesquels sont, ou ne sont pas, des sous −espaces vectoriels?

- $E_1 = \{(x,y,z) \in IR^3 \; ; \; x+y+3z=0\}$
- $E_2 = \{(x,y,z) \in IR^3 ; \; x+y+3z=2\}$
- $E_3 = \{(x,y,z,t) \in IR^4 ; \; x=y=2z=4t\}$
- $E_4 = \{(x,y) \in IR^2 ; \; xy=0\}$
- $E_5 = \{(x,y) \in IR^2 ; \; y=x^2\}$
- $E_6 = \{(x,y,z) \in IR^3 ; \; 2x+3y-5z=0\} \cap \{(x,y,z) \in IR^3 ; \; ; \; x-y+z=0\}$
- $E_7 = \{(x,y,z) \in IR^3 ; \; 2x+3y-5z=0\} \cup \{(x,y,z) \in IR^3 ; \; ; \; x-y+z=0\}.$

EX02

$Soit\ E\ un\ espace\ vectoriel\ et\ soient\ F\ et\ G\ deux\ sous - espaces\ vectoriels\ de\ E.$
$Montrer\ que\ F \cup G\ est\ un\ sous - espace\ vectoriel\ de\ E\ si\ et\ seulement\ si$
$F \subset G\ ou\ G \subset F$

EX03

Donner un système d'équations des espaces vectoriels engendrés par les vecteurs suivants

- $U_1 = (1,2,3)$
- $U_1 = (1,2,3)\ et\ U_2 = (-1,0,1)$
- $U_1 = (1,2,0), U_2 = (2,1,0)\ et\ U_3 = (1,0,1)$

EX04

Trouver un système générateur des sous − espaces vectoriels suivants de IR^3:

1. $F = \left\{(x,y,z) \in IR^3 ; \; x+2y-z=0\right\}$
2. $G = \{(x,y,z) \in IR^3 ; \; x-y+z=0\ et\ 2x-y-z=0\}$

EX05

Soit $E = F(IR, IR)$ *l'espace vectoriel des fonctions de IR dans IR.*
On note F le sous − espace vectoriel des fonctions paires et G
le sous − espace vectoriel des fonctions impaires
Montrer que F et G sont supplémentaires.

EX06

Les vecteurs U suivants sont − ils combinaison linéaire des vecteurs U_i?

1. $E = IR^2$, $U = (1,2)$, $U_1 = (1,-2)$, $U_2 = (2,3)$
2. $E = IR^2$, $U = (1,2)$, $U_1 = (1,-2)$, $U_2 = (2,3)$, $U_3 = (-4,5)$

3. $E = IR^3$, $U = (2,5,3)$, $U_1 = (1,3,2)$, $U_2 = (1,-1,4)$
4. $E = IR^3$, $U = (3,1,m)$, $U_1 = (1,3,2), U_2 = (1,-1,4)$

$(discuter\ suivant\ la\ valeur\ de\ m)$.

EX07

$Soit\ E = F(IR, IR) l'espace\ vectoriel\ des\ fonctions\ de\ IR\ dans\ IR.$

$Étudier\ l'indépendance\ linéaire\ des\ familles\ suivantes$:

- $(sinx, cosx)$
- $(sin2x, sinx, cosx)$
- ⍰⍰ $(cos2x, sin^2x, cos^2x)$
- $(x, e^x, sin(x))$.

EX08

$Soit\ E\ un\ espace\ vectoriel\ sur\ IR\ et\ v_1\ , v_2, v_3\ et\ v_4\ \ une\ famille\ libre\ d'éléments\ de\ E$

$les\ familles\ suivantes\ sont - elles\ libres$?

1. $(v_1, 2v_2, v_3)$
2. (v_1, v_3)
3. $(v_1, 2v_1 - \ v_4, v_4)$
4. $(3v_1 + v_3, v_3, v_2 + v_3)$.
5. $(2v_1 + v_2, v_1 - 3v_2, v_4, v_2 - v_1)$

EX09

$Soient\ \ u_1 = (1,1,1), u_2 = (2,-2,-1) et\ u_3 = (1,1,-1)$

$Soient\ E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, y + z = 0\} et\ F = vect(\ u_1, u_2)$

1. $Montrer\ que\ E\ est\ un\ sous - espace\ vectoriel\ de\ \mathbb{R}^3. Déterminer\ une\ base\ de\ E.$
2. $La\ famille\ (\ u_1, u_2, u_3) est -\ elle\ libre?\ Est - ce\ que\ u_3 \in F?$
3. $Est - ce\ que\ u_3 \in E$?
4. $Donner\ une\ base\ de\ E \cap F.$
5. $Soit\ u_4\ \ = (-1,7,5), est - ce\ que\ u_4 \in E?\ est - ce\ que\ u_4 \in F?$

EX10

$Soit\ E = \{P \in \mathbb{R}^3[X], P(-1) = 0\ et\ P(1) = 0\}$

1. $Montrer\ que\ E\ est\ un\ sous - espace\ vectoriel\ de\ \mathbb{R}^3[X].$
2. $Déterminer\ une\ base\ et\ la\ dimension\ de\ E$

EX11

$Soient\ f(x) = cos(x), g(x) = cos(x)cos(2x)\ et\ h(x) = sin(x)sin2x).$

$Déterminer\ vect(f, g, h)$

EX12

$Soit\ E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + z = 0\ et\ y + t = 0\}$

$Soient\ u = (1,1,1,1), v = (1,-1,1,-1)\ et\ w = (1,0,1,0)$

$Soit\ F = Vectu, v, w)$

$On\ admettra\ que\ E\ est\ un\ espace\ vectoriel.$

1. $Donner\ une\ base\ de\ E\ et\ en\ déduire\ sa\ dimension.$
2. $Déterminer\ une\ base\ de\ F.$
3. $Donner\ une\ (ou\ plusieurs)\ équation(s)\ qui\ caractérise(nt)\ F.$
4. $Donner\ une\ famille\ génératrice\ de\ E + F.$
5. $Montrer\ que$: $E \oplus F = \mathbb{R}^4$