Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Analyse Complexe – LMDS4 – 2019

Université Ferhat Abbas Sétif 1

§TD 1: Opérations sur le corps des complexes

1. Soient $z = 1 + 2i$ et $w = 3 - i$, représenter les nombres suivants sous la forme $a + ib$.

(a) $2z + 5w$ (b) $iz + 3w$ (c) $z^3 + \overline{(w^2)}$

2. Écrire sous forme polaire chacun des nombres complexes suivants :

(a) $-1 + i\sqrt{3}$ (b) $(3 + i)^2$ (c) $(1 - i)^4/5$

3. Trouver les parties réelles et imaginaires de chacun des nombres complexes suivants :

(a) $(z - 2)/(z + 2)$ (b) $(\sqrt{3} + i)^6$ (c) $i^n, n \in \mathbb{N}$

4. Trouver toutes les solutions des équations suivantes et puis préciser leurs répartitions dans le plan complexe.

(a) $5z^2 + 4z + 1 = 0$ (b) $z^4 - z^2 - 2 = 0$ (c) $z^4 = -16$

5. Montrer que le polynôme $f(z) = (\cos\alpha + z\sin\alpha)^n - \cos(n\alpha) - z\sin(n\alpha)$ est dévisible par z^2+1.

6. Montrer que $|\cos(x + iy)|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$. En déduire la valeur de $\left|\cos\left(\pi + i\log(2 + \sqrt{5})\right)\right|$; que peut-on conclure?.

7. Étant donné $(2 + i)(3 + i)$, montrer que $\frac{\pi}{4} = \tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3}$.

8. Prouver les propriétés suivantes :

(a) Si $z, a \in \mathbb{C}$, $|a| < 1$ et $|z| < 1$, alors $|z - a| < |1 - \bar{a}z|$.

(b) Si $\mathrm{Imz} > 0$ alors $\mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{z}}{1+\mathrm{z}^2}\right) > 0$ si et seulement si $|z| < 1$.

9. Illustrer géométriquement les ensembles suivants dans le plan complexe et identifier parmi eux les ensembles ouverts, fermés, bornés et connexes.

(a) $|1 + z| = 2|1 - z|$ (c) $\left|\frac{z-3}{z+3}\right| < 2$ (e) $\mathrm{Im}(z - i) \geq 3$

(b) $|z| + \mathrm{Re}\, z < 1$ (d) $2 \leq |z - 1 + i| < 3$ (f) $|z - i| + |z + i| = 3$