Université de Sétif1 **2018 / 2019**
Faculté Des sciences
Département MI **Pr A.MEROUANI**
1ère Année MI (s1)

Module : Algèbre 1

Correction d'examen

EXERCICE 1 (5.5)

f : (E.⋆) → (G.°) un homomorphisme de groupes si

$\forall x, y \in E: \; f(x * y) = f(x)°f(y)$ **(1)**

2- $f(e)°f(e) = f(e * e) = f(e) = f(e)°é$ car (f homomorphisme, e est l'élement neutre de E, $é$ est l'élement neutre de G) **(1)**

D'où, par régularité de $f(e)$ $dans\ G$ $\boldsymbol{f(e)} = é$

3- **Ker $\boldsymbol{f}$ sous groupe de E**

a-On a f (e)=$é$ donc e∈ Ker f Ker $f \neq \emptyset$**(1)**

b-
$\forall x, y \in \mathrm{Ker}\, f \quad f(x * y) = f(x)°f(y) = é°é = é$ car (f homomorphisme, $x \in \mathrm{Ker}\, f \quad f(x) = é$; $y \in \mathrm{Ker}\, f \quad f(y) = é$)

dou $x * y \in \mathrm{Ker}\, f$ **(1)**

c-$\forall x \in \mathrm{Ker}\, f$ on a $f(x^{-1}) = f(x)^{-1} = e'^{-1} = é$ (f homomorphisme, $x \in \mathrm{Ker}\, f \quad f(x) = é$)

d'où $x^{-1} \in \mathrm{Ker}\, f$ **(1)**

Finalement Ker f sous groupe de E

4- f est injective ⇒ Ker f={e }

Supposons que f soit injective, et montrons que Ker f={e } **(0.5)**

On a $\forall x \in \mathrm{Ker}\, f \quad f(x) = é \xRightarrow[f\,(e)=é]{} f(x) = f(e) \xRightarrow[f\ injective]{} x = e$ donc Ker f={e }

EXERCICE 2 (5.5)

1-$(A\cup B)\cap(\overline{A\cup C})$= $(A\cup B)\cap(\bar{A}\cap\bar{C})$ = $(A\cap\overline{(A}\cap\bar{C})\cup(B\cap(\bar{A}\cap\bar{C}))$ =
$(\bar{A}\cap\bar{A}\cap\bar{C})\cup(B\cap\bar{A}\cap\bar{C})$ = $\emptyset\cup((B\cap\bar{A}\cap\bar{C}))$ = $\bar{A}\cap B\cap\bar{C}$**(2)**

2-$(A\cup C)\cap(\overline{A\cup B})$= $(A\cup C)\cap(\bar{A}\cap\bar{B})$ = $(A\cap\overline{(A}\cap\bar{B})\cup(C\cap(\bar{A}\cap\bar{B}))$ =

$(\bar{A}\cap\bar{A}\cap\bar{B})\cup(C\cap\bar{A}\cap\bar{B})$ = $\emptyset\cup((C\cap\bar{A}\cap\bar{B}))$ = $\bar{A}\cap C\cap\bar{B}$**(2)**

3-$(A\cup B)\Delta(A\cup C)$= -$(A\cup B)$-$(A\cup C)$ $\cup(A\cup B)$-$(A\cup C)$=$(\bar{A}\cap B\cap\bar{C})\cup(\bar{A}\cap C\cap\bar{B})$=

$\bar{A}\cap((B\cap\bar{C})\cup(C\cap\bar{B}))$= $\bar{A}\cap((B$-C$)\cup(C$-B$))$= $\bar{A}\cap(B\Delta C)$ **(1.5)**

EXERCICE 3

$*$ est une L C I sur IR**(2)**

Soient a,b ∈ Q donc 2ab -3(a+b) +6∈ Q d'ou a∗b ∈ Q

a∈ Q-{(3/2) et b∈ Q-{(3/2) ⇒ a∗b ∈ Q-$\left\{\frac{3}{2}\right\}$ (raisonnement par l'absurde)

en supposant que a$\neq\frac{3}{2}$ et b $\neq\frac{3}{2}$ et a∗b=$\frac{3}{2}$

On a a∗b=$\frac{3}{2}$ ⇒ 2ab -3(a+b) +6 =$\frac{3}{2}$ ⇒ 4ab -6(a+b) +12 =3 ⇒ 4ab -6(a+b) +12-3 =0

⇒4ab -6(a+b) +9 =0 ⇒ 4ab -6a-6b +3 =0 ⇒ 2a(2b-3)-6b+ 9=0 ⇒ (2b-3)(2a—3)=0

⇒ b=$\frac{3}{2}$ ou b=$\frac{3}{2}$ Nous obtenons une contradiction.

1- ∗commutative ∀a,b∈ Q-$\left\{\frac{3}{2}\right\}$a∗b=b∗a**(1)**

On a a∗b=2ab -3(a+b) +6 =2ba-3(b+a)+6=b∗a

2- ∗ associative

(a∗b)∗c=a∗(b∗c)=4abc-6ac-6bc-6ab+9a+9b+9c-12**(1)**

3- l'element neutre (e) ∀a∈ Q-$\left\{\frac{3}{2}\right\}$ a∗e= e∗a=a **(1)**

Soit a∈ Q-$\left\{\frac{3}{2}\right\}$ an a a∗e=a ⇒ 2ae -3(a+e) +6 =a ⇒ 2ae -3(a+e) +6 -a =0 ⇒

2ae -3a-3e +6 -a =0 $\Rightarrow$ 2ae -3e +6 -4a =0 $\Rightarrow$ e(2a-3)+6-4a=0 $\Rightarrow$ (2a-3)(e-2)=0 **e=2** (a$\neq \frac{3}{2}$)

4- l'élement symétrique $\forall$a$\in$ Q-$\left\{\frac{3}{2}\right\}$, $\exists$ $\acute{a}$ a$*\acute{a}$ = $\acute{a}$ $*$a=e **(1)**

a$*$ $\acute{a}$ =e $\Rightarrow$ a$*$ $\acute{a}$ =2 $\Rightarrow$ 2a$\acute{a}$ -3(a+$\acute{a}$) +6=2 $\Rightarrow$ 2a$\acute{a}$ -3a-3$\acute{a}$ +4=0 $\Rightarrow$ $\acute{a}(2a-3) = 3a-4$

$\Rightarrow \acute{a} = \frac{3a-4}{2a-3}\in$ Q-$\left\{\frac{3}{2}\right\}$

Finalement (Q-$\left\{\frac{3}{2}\right\}$.*) est un group commutatif

4- Sur l'ensemble$\mathbb{R}$. On considère la relation binaire $\mathcal{F}$ définie par :
$\forall x, y \in \mathbb{R} : x\,\mathcal{F}\,y \Leftrightarrow x^3 - y^3 = 3(x-y)$.

1- **$\mathcal{F}$ est Reflexive** (ie $\forall x \in \mathbb{R} : x\,\mathcal{F}\,x$) **(1)**
On a $\forall x \in \mathbb{R} :\ x^3 - x^3 = 0\ et\ 3(x-x) = 0\ donc\ x^3 - x^3 = 3(x-x)\ , dou\ x\,\mathcal{F}\,x$

2- **$\mathcal{F}$ est symétrique** (ie $\forall x, y \in \mathbb{R} : x\,\mathcal{F}\,y \Rightarrow y\,\mathcal{F}\,x$) **(1)**

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : On\ a\ x\,\mathcal{F}\,y \Leftrightarrow x^3 - y^3 = 3(x-y)$$

$$\Rightarrow -(x^3 - y^3) = -3(x-y)$$

$$\Rightarrow -x^3 + y^3 = 3(-x+y)$$

$$\Rightarrow y^3 - x^3 = 3(y-x)$$

$$\Rightarrow y\,\mathcal{F}\,x$$

3- **$\mathcal{F}$ est transitive** (ie $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x\,\mathcal{F}\,y\ et\ y\mathcal{F}z \Rightarrow x\,\mathcal{F}\,z$) **(1)**

$x\,\mathcal{F}\,y \Leftrightarrow x^3 - y^3 = 3(x-y)$..(a)

$y\,\mathcal{F}z \Leftrightarrow y^3 - z^3 = 3(y-z)$ ...(b)

En additionnant ces deux égalité on trouve $x^3 - y^3 + y^3 - z^3 = 3(x-y) + 3(y-z)$

donc $x^3 - z^3 = 3(x-z)$

d'où $x\,\mathcal{F}\,z$

finalement $\mathcal{F}$ *est une relation d'*é*quivalence* sur $\mathbb{R}$