

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE FERHAT ABBAS SETIF 1  
FACULTE DES SCIENCES  
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

POLYCOPIE DE COURS  
**MECANIQUE DU POINT MATERIEL**

**HADDADI KHELIFA**  
Maitre de conférences B  
Université FERHAT ABBAS SETIF 1

2016/2017.

# **Tables des Matières**

## **TABLES DES MATIERES**

---

CHAPITRE 1 : RAPPELS DE NOTIONS FONDAMENTALES	1
1.1. Grandeurs physiques et unités	3
1.2. Le Système international d'unités (SI) et le système de grandeurs correspondant	3
1.3. Définitions des sept unités de base	3
1.3.1. Unité de longueur (mètre)	3
1.3.2. Unité de masse (kilogramme)	4
1.3.3. Unité de temps (seconde)	4
1.3.4. Unité de courant électrique (ampère)	4
1.3.5. Unité de température thermodynamique (kelvin)	4
1.3.6. Unité de quantité de matière (mole)	4
1.3.7. Unité d'intensité lumineuse (candela) adoptée en 1979	4
1.4. Unités SI dérivées	5
1.5. Dimension des grandeurs physiques	6
1.6. Les incertitudes expérimentales	9
1.6.1. Caractère incertain d'une mesure	9
1.6.2. Notion d'erreur et d'incertitude absolue et relative	10
1.7. Calcul vectoriel	12
1.7.1. Grandeurs Scalaires et grandeurs vectorielles	12
1.7.2. Notion d'un vecteur	12
1.7.3. Généralités sur les vecteurs	13
1.7.4. Opérations élémentaires sur les vecteurs	14
1.7.4.1. Addition vectorielle	14
1.7.4.2. Soustraction vectorielle	15
1.7.4.3. Multiplication d'un vecteur par un scalaire	15
1.7.4.4. Propriétés du produit	15
1.7.4.5. Relation de Chasles	15
1.7.5. Représentation des vecteurs dans le plan	16
1.7.6. Norme d'un vecteur	17
1.7.7. Le produit scalaire	18
1.7.7.1. Définition du produit scalaire	18
1.7.7.2. Propriétés du produit scalaire	19
1.7.8. Le produit vectoriel	19
1.7.8.1. Définition du produit vectoriel	19
1.7.8.2. Propriétés du produit vectoriel	20

---

## TABLES DES MATIERES

---

1.7.8.3. Composantes du vecteur $\vec{U} \wedge \vec{V}$ dans une base $\vec{u}_x$ , $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$ orthonormée	20
1.7.8.4. Aire d'un triangle	20
1.7.9. Le produit mixte	21
1.7.9.1. Définition	21
1.7.9.2. Propriétés du produit mixte	21
CHAPITRE 2 : CINEMATIQUE DU POINT MATERIEL	22
2.1. Notion de point matériel	24
2.2. Relativité du mouvement et nécessité d'un référentiel	24
2.2.1. Notion de référentiel	25
2.2.2. Exemples de référentiel à connaître	25
2.2.2.1. Le référentiel de Copernic (ou héliocentrique du grec <i>Hêlios</i> signifiant Soleil).	25
2.2.2.2. Le référentiel géocentrique	26
2.2.2.3. Le référentiel terrestre	26
2.3. Repérage d'un point matériel dans l'espace et dans le temps	26
2.3.1. Repérage d'un point matériel dans l'espace	26
2.3.1.1. Les différents systèmes de coordonnées	26
2.3.1.1.1. Le système de coordonnées cartésiennes	27
2.3.1.1.2. Le système de coordonnées polaires	28
2.3.1.1.3. Le système de coordonnées cylindriques	30
2.3.1.1.4. Le système de coordonnées sphériques	32
2.3.1.1.5. Abscisse curviligne et repère local de Frenet	35
2.3.2.2. Repérage d'un point dans le temps	36
2.4. La vitesse du point matériel	36
2.4.2. Définition de la vitesse	36
2.4.3. Vitesse moyenne	36
2.4.4. Vitesse instantanée	37
2.5. Accélération d'un point matériel	37
2.5.1. Définition de l'accélération moyenne	37
2.5.2. L'accélération instantanée	37
2.6. Expression du vecteur vitesse et vecteur accélération dans les différents systèmes de coordonnées	38
2.6.1. En coordonnées cartésiennes	38
2.6.1.1. Vitesse en coordonnées cartésiennes	38

## **TABLES DES MATIERES**

---

2.6.1.2. Vecteur accélération en coordonnées cartésiennes	39
2.6.2. En coordonnées polaires	39
2.6.2.1. Expression de la vitesse	39
2.6.2.2. Accélération d'un point matériel	40
2.6.3. En coordonnées cylindriques	40
2.6.3.1. Expression de la vitesse	40
2.6.3.2. Expression de l'accélération	41
2.6.4. En coordonnées sphériques	41
2.6.4.1. Expression vecteur vitesse	41
2.6.4.2. Expression de l'accélération	42
2.6.5. Expression de la vitesse et l'accélération dans la base de Frenet	44
2.6.5.1. Expression de la vitesse	44
2.6.5.2. Expression de l'accélération	44
2.7. Exemples de mouvement	45
2.7.1. Mouvements rectilignes	45
2.7.1.1. Le mouvement rectiligne uniforme	45
2.7.1.2. Le mouvement uniformément varié	45
2.7.2. Mouvement circulaire	46
2.7.2.1. Mouvement circulaire uniforme	46
2.7.2.2. Mouvement circulaire non uniforme	47
2.7.3. Mouvement hélicoïdal	47
2.7.4. Mouvement parabolique	48
2.8. Changement de référentiel : Mouvement relatif	49
2.8.1. Loi de compositions des vitesses	50
2.8.2. Composition des accélérations	52
2.8.3. Référentiel en translation	54
2.8.4. Référentiel en rotation uniforme autour d'un axe fixe	55
2.8.4.1. Composition des vitesses	55
2.8.4.2. Composition des accélérations	56
<b>CHAPITRE 3 : DYNAMIQUE DU POINT MATERIEL</b>	<b>57</b>
3.1. Définitions	60
3.1.1. Système matériel	60
3.1.2. Masse	60

## **TABLES DES MATIERES**

---

3.1.3. Centre d'inertie	60
3.1.4. Quantité de mouvement	62
3.2. Les trois lois de Newton de la dynamique	63
3.2.1. Première loi de Newton : principe d'inertie	63
3.3. Deuxième loi de Newton : principe fondamental de la dynamique	64
3.3.1. Énoncé du principe fondamental de la dynamique	64
3.3.2. Cas des systèmes pseudo-isolés	64
3.3.3. Cas particulier d'un système à masse constante	64
3.4. Troisième loi de Newton : principe des actions réciproques	65
3.5. Notion de force	66
3.5.1. Définition	66
3.5.2. Classification des forces	66
3.5.2.1. Forces d'interaction à distance	66
3.5.2.1.1. Interaction gravitationnelle	66
3.5.2.1.2. Interaction coulombienne	67
3.5.1.3. Interaction électromagnétique	67
3.5.2. Forces de contact	68
3.5.2.1. Force de tension d'un fil	68
3.5.2.2. Force de rappel d'un ressort	68
3.5.2.3. Réaction des supports et force de frottement solide-solide	69
3.5.2.4. Force de frottement solide-fluide	71
3.6. APPLICATIONS : Résolution d'un problème de mécanique	72
3.6.1. Mouvements rectiligne uniformes	73
3.6.2. Mouvements rectiligne uniformes varié	73
3.6.3. Mouvement d'un point matériel dans le champ de pesanteur	73
3.6.3.1. Mouvement d'un point matériel dans le champ de pesanteur en absence de résistance de l'air	73
3.6.3.2. Mouvement d'un point matériel dans le champ de pesanteur en présence de résistance de l'air	77
3.6.4. Pendule élastique	78
3.6.5. Pendule simple	80
3.7. Moment cinétique et théorème du moment cinétique	81
3.7.5. Moment d'une force	81
3.7.6. Moment cinétique d'un point matériel	82

---

## **TABLES DES MATIERES**

---

3.7.6.1. Définition	82
3.7.6.2. Expression analytique du moment cinétique	82
3.7.6.3. Théorème du moment cinétique	83
3.7.7. Notion de force centrale	84
3.7.8. Application	84
<b>CHAPITRE 4 : TRAVAIL ET ENERGIE</b>	<b>87</b>
4.1. Travail d'une force	89
4.1.1. Travail d'une force constante sur un déplacement rectiligne	89
4.1.2. Travail élémentaire	90
4.1.3. Travail total d'une force le long d'un trajet fini	90
4.2. Puissance d'une force	93
4.3. Théorème de l'énergie cinétique	94
4.3.1. Définition de l'énergie cinétique	94
4.3.2. Théorème de l'énergie cinétique en référentiel galiléen	94
4.3.3. Application : utilisation du théorème de l'énergie cinétique pour résoudre un problème physique	96
4.4. Energie potentielle et forces conservatives	98
4.4.1. Définitions	98
4.4.2. Définition de l'énergie potentielle	98
4.4.3. Exemples d'énergie potentielle	99
4.4.3.1. Energie potentielle de pesanteur	99
4.4.3.2. Energie potentielle élastique	100
4.4. Energie mécanique	101
4.4.1. Définition de l'énergie mécanique	101
4.4.2. Application : Utilisation de l'énergie mécanique pour résoudre un problème physique	102

**CHAPITRE 1 :**  
**RAPPELS DE NOTIONS**  
**FONDAMENTALES**

# CHAPITRE 1 :

## RAPPELS DE NOTIONS FONDAMENTALES

### SOMMAIRE

---

1.1. Grandeurs physiques et unités	3
1.2. Le Système international d'unités (SI) et le système de grandeurs correspondant	3
1.3. Définitions des sept unités de base	3
1.3.1. Unité de longueur (mètre)	3
1.3.2. Unité de masse (kilogramme)	4
1.3.3. Unité de temps (seconde)	4
1.3.4. Unité de courant électrique (ampère)	4
1.3.5. Unité de température thermodynamique (kelvin)	4
1.3.6. Unité de quantité de matière (mole)	4
1.3.7. Unité d'intensité lumineuse (candela) adoptée en 1979	4
1.4. Unités SI dérivées	5
1.5. Dimension des grandeurs physiques	6
1.6. Les incertitudes expérimentales	9
1.6.1. Caractère incertain d'une mesure	9
1.6.2. Notion d'erreur et d'incertitude absolue et relative	10
1.7. Calcul vectoriel	12
1.7.1. Grandeurs Scalaires et grandeurs vectorielles	12
1.7.2. Notion d'un vecteur	12
1.7.3. Généralités sur les vecteurs	13
1.7.4. Opérations élémentaires sur les vecteurs	14
1.7.4.1. Addition vectorielle	14
1.7.4.2. Soustraction vectorielle	15
1.7.4.3. Multiplication d'un vecteur par un scalaire	15
1.7.4.4. Propriétés du produit	15
1.7.4.5. Relation de Chasles	15
1.7.5. Représentation des vecteurs dans le plan	16
1.7.6. Norme d'un vecteur	17
1.7.7. Le produit scalaire	18
1.7.7.1. Définition du produit scalaire	18
1.7.7.2. Propriétés du produit scalaire	19
1.7.8. Le produit vectoriel	19
1.7.8.1. Définition du produit vectoriel	19
1.7.8.2. Propriétés du produit vectoriel	20
1.7.8.3. Composantes du vecteur $\vec{U} \wedge \vec{V}$ dans une base $\vec{u}_x$ , $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$ orthonormée	20
1.7.8.4. Aire d'un triangle	20
1.7.9. Le produit mixte	21
1.7.9.1. Définition	21
1.7.9.2. Propriétés du produit mixte	21

---

### 1.3. Grandeurs physiques et unités

On appelle grandeur physique tout ce que l'on peut mesurer tel que la longueur, le temps, la température, etc... Mesurer une grandeur physique signifie la comparer avec une unité prise comme référence. Ainsi, nos ancêtres ont pris comme référence (ou étalon) la longueur du pied pour mesurer la distance, et on avait alors par exemple une distance de 100 pieds. La valeur d'une grandeur physique est généralement exprimée sous la forme du produit d'un nombre par une unité. L'unité n'est qu'un exemple particulier de la grandeur concernée, utilisé comme référence. Le nombre est le rapport entre la valeur de la grandeur en question et l'unité. Pour une grandeur particulière, on peut utiliser de nombreuses unités différentes. Par exemple, la vitesse  $v$  d'une particule peut être exprimée sous la forme  $v = 25 \text{ m/s} = 90 \text{ km/h}$ , les unités mètre par seconde et kilomètre par heure étant des unités alternatives pour exprimer la même valeur de la grandeur « vitesse ».

Les unités des grandeurs physiques sont fixées par le Système International d'unités(SI). Ce système est fondé sur sept grandeurs fondamentales (la *longueur*, la *masse*, le *temps*, le *courant électrique*, la *température thermodynamique*, la *quantité de matière* et l'*intensité lumineuse*) qui définissent les unités de base.

### 1.4. Le Système international d'unités (SI) et le système de grandeurs correspondant

Les grandeurs de base utilisées dans le SI sont la *longueur*, la *masse*, le *temps*, le *courant électrique*, la *température thermodynamique*, la *quantité de matière* et l'*intensité lumineuse*. Les grandeurs de base sont, par convention, considérées comme indépendantes. Les unités de base correspondantes du SI, sont le *mètre* ( $m$ ), le *kilogramme* ( $kg$ ), la *seconde* ( $s$ ), l'*ampère* ( $A$ ), le *kelvin* ( $K$ ), la *mole* ( $mol$ ) et la *candela* ( $cd$ ). Les unités dérivées du SI sont ensuite formées des produits de puissances des unités de base, selon les relations algébriques qui définissent les grandeurs dérivées correspondantes en fonction des grandeurs de base.

#### 1.4. Définitions des sept unités de base<sup>1</sup>

##### 1.4.1. Unité de longueur (mètre)

Définition du mètre adoptée en 1983

*Le mètre est la longueur du trajet parcouru dans le vide par la lumière pendant une durée de  $1/299\,792\,458$  de seconde.*

Il en résulte que la vitesse de la lumière dans le vide est égale à 299 792 458 mètres par seconde exactement,  $c_0 = 299\,792\,458 \text{ m/s}$ .

---

<sup>1</sup> Ces définitions ont été copiées de la brochure du Bureau International des Poids et Mesures (BIPM), (8<sup>e</sup> édition 2006)

### 1.4.2. Unité de masse (kilogramme)

La définition de l'unité de la masse "kilogramme" adoptée en 1901 est :

*Le kilogramme est l'unité de masse ; il est égal à la masse du prototype international du kilogramme.*

Le kilogramme est actuellement défini comme la masse d'un cylindre en platine iridié (90 % de platine et 10% d'iridium) de 39 mm de diamètre et 39 mm de haut déclaré unité SI de masse depuis 1889 par le Bureau international des poids et mesures (BIPM).

### 1.3.4. Unité de temps (seconde)

La définition de la seconde, unité du temps, adoptée en 1967 :

*La seconde est la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133.*

### 1.3.5. Unité de courant électrique (ampère)

La définition de l'ampère adoptée en 1948 est :

*L'ampère est l'intensité d'un courant constant qui, maintenu dans deux conducteurs parallèles, rectilignes, de longueur infinie, de section circulaire négligeable et placés à une distance de 1 mètre l'un de l'autre dans le vide, produirait entre ces conducteurs une force égale à  $2 \times 10^{-7}$  newton par mètre de longueur.*

### 1.6.5. Unité de température thermodynamique (kelvin)

La définition du Kelvin adoptée en 1967 :

*Le kelvin, unité de température thermodynamique, est la fraction  $1/273,16$  de la température thermodynamique du point triple de l'eau.*

### 1.3.8 Unité de quantité de matière (mole)

Définition de la mole adoptée en 1971 :

*La mole est la quantité de matière d'un système contenant autant d'entités élémentaires qu'il y a d'atomes dans 0,012 kilogramme de carbone 12 ; son symbole est « mol ».*

Il en résulte que la masse molaire du carbone 12 est égale à 0,012 kilogramme par mole exactement,  $M(^{12}\text{C}) = 12 \text{ g/mol}$ .

### 1.3.9 Unité d'intensité lumineuse (candela) adoptée en 1979

La définition de la candela adoptée en 1979 est :

*La candela est l'intensité lumineuse, dans une direction donnée, d'une source qui émet un rayonnement monochromatique de fréquence  $540 \times 10^{12}$  hertz et dont l'intensité énergétique dans cette direction est  $1/683$  watt par stéradian.*

### 1.7. Unités SI dérivées

Les unités dérivées sont des unités qui peuvent être exprimées à partir des unités de base au moyen des symboles mathématiques de multiplication et de division. Certaines unités dérivées ont reçu des noms spéciaux et des symboles particuliers qui peuvent eux-mêmes être utilisés avec les symboles d'autres unités de base ou dérivées pour exprimer les unités d'autres grandeurs. Le Tableau 1 et 2 présentent quelques exemples de grandeurs dérivées, avec les unités dérivées cohérentes correspondantes exprimées directement en fonction des unités de base.

**Tableau 1.1** : Exemples d'unité SI dérivées exprimées à partir des unités de base

Grandeur dérivée		Unité SI dérivée cohérente	
Nom	Symbole	Nom	Symbole
Superficie	$A$	mètre carré	$m^2$
Volume	$V$	mètre cube	$m^3$
Vitesse	$v$	mètre par seconde	$m/s$
Accélération	$a$	mètre par seconde carrée	$m/s^2$
Nombre d'ondes	$\sigma, \tilde{\nu}$	mètre à la puissance moins un	$m^{-1}$
Masse volumique	$\rho$	kilogramme par mètre cube	$kg/m^3$
Masse surfacique	$\rho_A$	kilogramme par mètre carré	$kg/m^2$
Volume massique	$v$	mètre cube par kilogramme	$m^3/kg$
Densité de courant	$j$	ampère par mètre carré	$A/m^2$
Champ magnétique	$H$	ampère par mètre	$A/m$
Concentration de quantité de matière, concentration	$c$	mole par mètre cube	$mol/m^3$
Concentration massique	$\rho, \gamma$	kilogramme par mètre cube	$Kg/m^3$
Luminance lumineuse	$L_v$	candela par mètre carré	$cd/m^2$
Indice de réfraction	$n$	un	1
Perméabilité relative	$\mu_r$	un	1

## CHAPITRE1 : RAPPELS DE NOTIONS FONDAMENTALES

**Tableau1.2** : : Unités SI dérivées ayant des noms spéciaux et des symboles particuliers

Grandeur dérivée	Nom	Symbole	Expression utilisant d'autres unités SI	Expression en unité SI de base
Angle plan	radian	rad		$m.m^{-1} = 1$
Angle solide	stéradian	sr		$m.m^{-2} = 1$
Fréquence	hertz	Hz		$s^{-1}$
Force	newton	N		$m.kg.s^{-2}$
Pression, contrainte	pascal	Pa	$N/m^2$	$m^{-1}.kg.s^{-2}$
Energie, travail, quantité de chaleur	joule	J	$N.m$	$m^2.kg.s^{-2}$
Puissance, flux énergétique	watt	W	$J.s^{-1}$	$m.kg.s^{-3}$
Quantité d'électricité, charge électrique	coulomb	C		$s.A$
Différence de potentiel électrique, force électromotrice	volt	V	$W/A$	$m^2.kg.s^{-3}.A^{-1}$
Capacité électrique	farad	F	$C/V$	$m^{-2}.kg^{-1}.s^4.A^2$
Résistance électrique	ohm	$\Omega$	$V/A$	$m^2.kg.s^{-3}.A^{-2}$
Conductance électrique	siemens	S	$A/V$	$m^{-2}.kg^{-1}.s^3.A^2$
Flux d'induction magnétique	weber	Wb	$V.s$	$m^2.kg.s^{-2}.A^{-1}$
Induction magnétique	tesla	T	$Wb/m^2$	$kg.s^{-2}.A^{-1}$
Inductance	henry	H	$Wb/A$	$m^2.kg.s^{-2}.A^{-2}$

### 1.8. Dimension des grandeurs physiques

Par convention, les grandeurs physiques sont organisées selon un système de dimensions. Chacune des sept grandeurs de base du SI est supposée avoir sa propre dimension, représentée symboliquement par une seule lettre majuscule sans empattement en romain. On note entre crochets [...] les dimensions d'une grandeur physique : si  $R$  est le rayon d'une sphère  $[R]$  est la dimension du rayon, c'est-à-dire une longueur,  $[R] = L$ . Les symboles utilisés pour les grandeurs de base, et les symboles utilisés pour indiquer leur dimension, sont indiqués dans le tableau ci-dessous :

**Tableau 1.3 :** Grandeur de base et dimensions utilisées avec le SI

Grandeur de base	Symbole de la grandeur	Symbole de la dimension
Longueur	$l, x, r, \text{ etc.}$	L
Masse	$m$	M
Temps, durée	$t$	T
Courant électrique	$I, i$	I
Température thermodynamique	$T$	$\theta$
Quantité de matière	$n$	N
Intensité lumineuse	$I_v$	J

Pour autant, il ne faut pas confondre unité et dimension. Par exemple, le mètre est rattaché à la dimension longueur (L), tout comme le yard ou le mile marin (deux unités hors le système SI utilisées pour mesurer la longueur).

Les dimensions des grandeurs dérivées sont écrites sous la forme de produits de puissances des dimensions des grandeurs de base au moyen des équations (lois physiques élémentaires) qui relient les grandeurs dérivées aux grandeurs de base. Par exemple, la vitesse d'un point matériel ( $v = dx/dt$  pour une trajectoire rectiligne suivant l'axe Ox) a pour dimension  $L.T^{-1}$  car :  $[v] = [dx/dt] = [dx]/[dt] = L/T = L.T^{-1}$ , et son unité est donc le  $m.s^{-1}$ . L'accélération a pour dimension  $[a] = [dv/dt] = [dv]/[dt] = L.T^{-1}/T = L.T^{-2}$ . La dimension de la force est  $[F] = [m.a] = [m][a] = M.L.T^{-2}$ .

**Application :** Quelle est la dimension de la résistance électrique ? Autrement dit : comment se décompose l'unité de résistance (l'ohm, symbole  $\Omega$ ) en fonction des unités de base ?.

On utilise par exemple la formule  $P = Ri^2$  où  $P$ ,  $R$  et  $i$  désignent respectivement la puissance, la résistance et l'intensité du courant électriques. Comme l'intensité du courant électrique est une grandeur de base, le problème revient à chercher la dimension d'une puissance en fonction des dimensions de base. En mécanique, on sait que :  $P = F.v$  où  $F$  et  $v$  désignent respectivement la force et la vitesse, et que par ailleurs, la force est homogène au produit d'une masse par une accélération (2<sup>ème</sup> loi de Newton). Comme  $[v] = L.T^{-1}$  et  $[F] = M.L.T^{-2}$ , on  $[P] = M.L^2.T^{-3}$ . D'où l'on tire  $[R] = M.L^2.T^{-3} \times I^{-2}$ .

On peut écrire donc la conversion suivante :  $1\Omega = 1\text{kg.m}^2.s^{-3}.A^{-2}$ .

## CHAPITRE 1 : RAPPELS DE NOTIONS FONDAMENTALES

---

En général, la dimension d'une grandeur  $Q$  s'écrit sous la forme d'un produit dimensionnel,

$$[Q] = L^\alpha M^\beta T^\gamma I^\delta \Theta^\varepsilon N^\zeta J^\eta,$$

où les exposants  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$  et  $\eta$ , qui sont en général de petits nombres entiers, positifs, négatifs ou nuls, sont appelés exposants dimensionnels. L'information fournie par la dimension d'une grandeur dérivée sur la relation entre cette grandeur et les grandeurs de base est la même que celle contenue dans l'unité SI pour la grandeur dérivée, elle-même obtenue comme produit de puissances des unités de base du SI.

L'utilisation des dimensions permet de savoir si une expression littérale est homogène ou non et de retrouver et deviner des lois physiques lorsque la résolution théorique est trop complexe. Supposons qu'une loi physique s'écrive sous la forme  $a = f(x, y, z)$  : la grandeur  $a$  est fonction des grandeurs (dimensionnées)  $x, y$  et  $z$  qui sont supposées indépendantes (c'est-à-dire que l'on ne peut pas mesurer l'une d'entre elles en fonction des unités des deux autres). On suppose en outre que la loi physique étudiée peut s'exprimer sous la forme mathématique d'un produit. Il existe alors trois nombres réels  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  tels que :

$$a = Cx^\alpha y^\beta z^\gamma$$

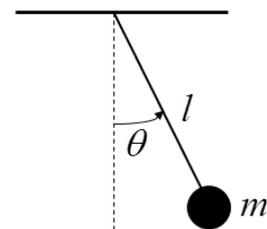
où  $C$  est une constante sans dimension. On peut encore écrire :

$$\frac{a}{x^\alpha y^\beta z^\gamma} = C = \text{nombre sans dimension}$$

Rechercher une loi physique reviendra à rechercher des nombres sans dimension.

### Exemple : période d'un pendule simple

Intuitivement, on peut penser que la période  $T$  d'un pendule simple (figure ci-contre) pourrait dépendre de la longueur  $l$  du fil, de la masse  $m$  du corps et de l'accélération de la pesanteur  $g$ . Établisons la relation qui décrit cette dépendance.



Expression de  $T$  en fonction des autres grandeurs :

$$T = km^\alpha l^\beta g^\gamma$$

où  $k$  est une constante sans dimension et  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  sont des exposants à déterminer. Remarquons que :

$$[T] = T ; [m^\alpha] = M^\alpha ; [l^\beta] = L^\beta ; [g^\gamma] = (LT^{-2})^\gamma = L^\gamma T^{-2\gamma}$$

L'équation aux dimensions de la période est alors :

$$T = M^\alpha L^\beta L^\gamma T^{-2\gamma} = M^\alpha L^{\beta+\gamma} T^{-2\gamma}$$

L'équation doit être homogène, il en résulte les relations suivantes

$$\begin{cases} \alpha = 0, \\ \beta + \gamma = 0, \\ -2\gamma = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0, \\ \beta = -\gamma = 1/2 \\ \gamma = -1/2 \end{cases}$$

On obtient alors l'expression suivant de la période du pendule simple

$$T = k\sqrt{l/g}$$

Cette analyse montre que la période du pendule ne dépend pas de la masse  $m$ .

Les règles de base de l'analyse dimensionnelle sont assez simples et intuitives :

- (1) On ne peut additionner ou soustraire que des termes homogènes : si  $A$  et  $B$  sont deux grandeurs, on ne peut écrire  $A+B$ ,  $A-B$  ou  $A = B$  que si elles ont la même dimension,
- (2) On a  $[AB] = [A][B]$  et  $[A/B] = [A]/[B]$ ,
- (3) On a  $[A^q] = [A]^q$ . Le nombre  $q$  devrait normalement être un rationnel,
- (4) L'argument d'une fonction mathématique transcendante (exp, ln, cos, sin, tan. . .) est forcément sans dimension. Certaines lois empiriques, notamment en thermodynamique, ne respectent pas cette règle. Elle est pourtant fondamentale et évite des erreurs d'unités.
- (5) La dimension d'une grandeur  $A$  est obligatoirement de la forme :

$$[G] = M^a L^b T^c \Theta^d I^e N^f J^g$$

### 1.9. Les incertitudes expérimentales

#### 1.7.10. Caractère incertain d'une mesure

L'expérience montre que la mesure d'une grandeur physique, directe ou indirecte, est toujours entachée d'une certaine indétermination ou incertitude, due au fait que la mesure ne peut être parfaitement exempte d'erreurs. Les erreurs/incertitudes de mesures peuvent avoir trois causes : l'expérimentateur (erreur humaine), l'appareil de mesure ou la méthode employée et l'environnement de la mesure. On classe en général les incertitudes en deux catégories, selon les types d'erreurs suspectées :

- Les **erreurs systématiques** se reproduisent identiques à elles-mêmes à chaque mesure (mauvais réglage du zéro d'un appareil à aiguille, erreur dans la méthode employée...). De telles erreurs peuvent être éliminées avant la prise finale de mesures (en vérifiant les réglages initiaux, en changeant de méthode...).
- Les **erreurs aléatoires ou accidentelles** sont des erreurs différentes à chaque mesure, par excès ou par défaut, sur lesquelles l'expérimentateur n'a pas prise. Pour les éliminer (après s'être auparavant débarrassé des erreurs systématiques) : il faut faire un grand nombre de mesures puis faire une moyenne.

### 1.7.11. Notion d'erreur et d'incertitude absolue et relative

Lorsqu'on mesure une grandeur physique  $G$ , la valeur quantitative obtenue ( $g_{mes}$ ) ne peut être considérée que comme une valeur approchée de la valeur réelle ou vraie ( $g$ ) de cette grandeur, cette dernière ne pouvant foncièrement être connue. L'erreur de mesure de la grandeur ( $G$ ), notée  $dG$ , est la différence entre valeur mesurée et valeur vraie,  $dG = g_{mes} - g$ .

L'incertitude absolue, notée  $\Delta G$ , représente une estimation raisonnée de la limite supérieure de l'erreur absolue pouvant affecter la mesure effectuée  $\Delta G = \sup|dG|$ . Elle correspond à un nombre concret (positif), exprimé dans une unité de la grandeur visée. Connaissant l'incertitude absolue  $\Delta g$  associée à la valeur mesurée  $g_{mes}$  d'une grandeur ( $G$ ), il est possible d'encadrer la valeur « réelle » de celle-ci (voir encadré ci-dessous) :

$$|g - g_{mes}| \leq \Delta g \quad g_{mes} - \Delta g \leq g \leq g_{mes} + \Delta g \quad \text{ou} \quad g = g_{mes} \pm \Delta g$$

A titre d'illustration prenons le cas d'une mesure directe unique, si la mesure de la température d'un corps donné fournit une valeur égale à  $37.2^\circ\text{C}$  et qu'on estime qu'avec l'instrument utilisé, l'erreur absolue ne dépasse pas  $0.2^\circ\text{C}$ , l'encadrement de la valeur réelle de la température visée sera :

$$37.2 - 0.2 \leq T \leq 37.2 + 0.2 (^\circ\text{C}) \quad \text{soit} \quad 37.0 \leq T \leq 37.4 (^\circ\text{C}) \quad \text{ou bien} \quad T = (37.2 \pm 0.2)^\circ\text{C}.$$

La connaissance de l'incertitude absolue avec la valeur de la grandeur mesurée, exprimée par le rapport  $\Delta g/g$  (appelé *incertitude relative*), permet de mieux apprécier la précision de la mesure. Il s'agit d'un nombre abstrait (sans unité), présenté souvent en % :  $\Delta g/g \times 100$ .

Dans l'exemple précédent, la précision de la mesure est de :  $\Delta T/T = 0.2/37.2 = 0.0054 = 0.005$  ou 0.5%. Avec une valeur mesurée d'ordre de grandeur plus faible,  $2.6^\circ\text{C}$  par exemple, la même procédure de mesure donnerait une incertitude relative plus importante ( $0.2/2.6 = 0.076 \approx 0.08$ ), ou bien 8%, ce qui correspond à une précision de mesure moins bonne.

Dans le cas d'une mesure directe répétée, l'incertitude absolue peut être évaluée dans ce cas, en déterminant la valeur maximale des écarts ( $g_{mes} - g_{moy}$ ) des valeurs mesurées, par rapport à la valeur moyenne de celles-ci. A ce propos, considérons comme exemple, la mesure répétée de la masse  $m$  d'un corps avec une balance de sensibilité (incertitude systématique d'instrument) estimée à  $0.5\text{g}$ , avec comme résultat de série de 4 valeur expérimentales (voir tableau ci-dessous). On en déduit par un calcul élémentaire une estimation de l'incertitude absolue de type « accidentel », associable à la mesure effectuée, soit  $\Delta m_{acc} = |-1.6| = 1.6\text{g}$

**Tableau 1.4 :** Exemple de mesure directe répétitive

Masse du corps (g)	1 <sup>o</sup> mes	2 <sup>o</sup> mes	3 <sup>o</sup> mes	4 <sup>o</sup> mes	$m_{moy}$
	36.7	35.2	37.4	38.0	36.8
Ecart, $(m_{mes} - m_{moy})$ (g)	-0.1	-1.6	+0.6	+1.2	

Il est évident que la détermination de l'incertitude absolue sur un résultat expérimental doit prendre en compte toutes les incertitudes systématiques et accidentelles associées à la mesure.

Ainsi concernant l'exemple précédent, on aura :  $\Delta m = \Delta m_{acc} + \Delta m_{sys} = 1.6g + 0.5g = 2.1g$  .

Dans le cas d'une mesure indirecte si on détermine la valeur d'une grandeur à partir de quantités mesurées, le calcul de l'incertitude correspondante peut être conduit de plusieurs façons : méthode des extrêmes, méthode des dérivées partielles, de la différentielle logarithmique, etc.

### Méthode des dérivées partielles

Supposons que  $g$  dépend de plusieurs grandeurs  $a, b, c$ , mesurées avec les incertitudes  $\Delta a, \Delta b, \Delta c$  :  $g = f(a, b, c)$ . On calcul la différentielle totale de  $g$  :

$$dg = \frac{\partial g}{\partial a} da + \frac{\partial g}{\partial b} db + \frac{\partial g}{\partial c} dc$$

Les dérivées partielles sont les dérivées de  $g$  par rapport à une variable, les autres variables étant considérées comme constantes.

L'incertitude sur  $g$  est :

$$\Delta g = \left| \frac{\partial g}{\partial a} \right| \Delta a + \left| \frac{\partial g}{\partial b} \right| \Delta b + \left| \frac{\partial g}{\partial c} \right| \Delta c$$

### Méthode de la différentielle logarithmique

En général, lorsque  $G = K \cdot \frac{X^\alpha \cdot Y^\beta}{Z^\gamma}$ , avec  $K, \alpha, \beta$  et  $\gamma$  des réels,  $X, Y$  et  $Z$  étant mesurés à  $\Delta X, \Delta Y$  et  $\Delta Z$  près, pour connaître l'incertitude  $\Delta G$  sur  $G$  :

- on calcul  $\log G$  puis on effectue une différentielle logarithmique de  $G$  :

$$\log G = \log K + \alpha \log X + \beta \log Y - \gamma \log Z$$

$$\rightarrow \frac{dG}{G} = \alpha \frac{dX}{X} + \beta \frac{dY}{Y} - \gamma \frac{dZ}{Z}$$

- on prend la valeur absolue de chaque terme en revenant aux incertitudes :

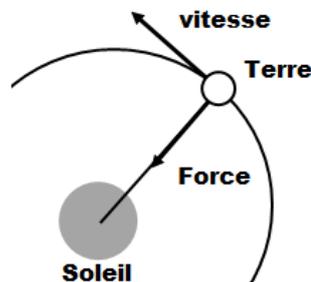
$$\frac{\Delta G}{G} = |\alpha| \frac{\Delta X}{|X|} + |\beta| \frac{\Delta Y}{|Y|} + |\gamma| \frac{\Delta Z}{|Z|}$$

- pour déterminer  $\Delta G$ , il suffit de faire  $\Delta G = \frac{\Delta G}{G} \times G$

### 1.8. Calcul vectoriel

#### 1.8.1. Grandeurs Scalaires et grandeurs vectorielles

En physique et en géométrie, certaines quantités sont complètement définies par une grandeur réelle : exemple la masse d'un corps, la charge d'un électron, l'aire d'un cercle et son diamètre, ..., chacune de ces quantités est représentées par nombre attaché d'une unité. Une telle quantité est appelée un *scalaire*. Il existe cependant d'autres quantités physiques et géométriques qui ne peuvent être représentées par un simple nombre, car leur caractérisation complète nécessite la connaissance d'une direction et d'une grandeur. Les forces en mécanique sont des quantités de ce type. Il est habituel de représenter une force graphiquement par un segment orienté qui indique la direction de la force et dont la longueur est égale à la grandeur de la force pour une échelle préalablement choisie (c'est le *vecteur*). La figure ci-dessous montre la force d'attraction de la Terre dans son mouvement autour du soleil. La vitesse instantanée de la Terre dans ce mouvement peut être également représentée par un segment orienté d'une longueur convenable. Ceci illustre le fait qu'une vitesse est aussi une quantité qui peut être caractérisée par une grandeur et une direction.



**Figure 1.1 :** Force d'attraction de la Terre dans son mouvement autour du soleil

#### 1.8.2. Notion d'un vecteur

Le vecteur permet, en physique, de modéliser des grandeurs qui ne peuvent être complètement définies par un nombre ou une fonction numérique seuls. Par exemple, pour préciser un déplacement, une vitesse, une force ou un champ électrique, la direction et le sens sont indispensables. En termes simples, un vecteur est une grandeur qui a une intensité, une direction et un sens. Il est commode de le représenter par une flèche.

On appelle vecteur un segment droit dont on distingue une origine et une extrémité. Le vecteur d'origine  $A$  et d'extrémité  $B$ , appelé "vecteur  $AB$ " aura un module, la distance entre  $A$  et  $B$ , et un sens qui est le sens de parcours de  $A$  vers  $B$ . Le vecteur  $AB$  se représente généralement par la notation  $\overrightarrow{AB}$ .

### 1.8.3. Généralités sur les vecteurs

- La droite joignant les points  $A$  et  $B$  est appelée *support* du vecteur  $\overrightarrow{AB}$ .
- Le vecteur  $\overrightarrow{BA}$  d'origine  $B$  et d'extrémité  $A$  est l'*opposé* du vecteur  $\overrightarrow{AB}$ . Nous écrirons :
$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$$
- Lorsque l'extrémité d'un vecteur coïncide avec son origine, on dit que c'est un *vecteur nul*. Son module sera nul, sa direction et son sens sont indéterminées. Nous le noterons  $\vec{0}$ .
- Sur une droite donnée on peut définir deux sens de parcours opposés. Lorsque deux vecteurs ont des supports parallèles distincts, on dit qu'ils ont *même sens* si, dans leur plan, ils sont situés d'un même côté de la droite qui joint leurs origines. Sur les figures 1.2(a) et 1.2(b) les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  sont de même sens. Sur la figure 1.2(b), les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{EF}$  sont de sens contraires ainsi que les vecteurs  $\overrightarrow{EF}$  et  $\overrightarrow{CD}$ .
- On dit que deux vecteurs (liés)  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{A'B'}$  sont *équipollents* si le quadrilatère  $ABB'A'$  est un parallélogramme (figure 1.2(c)). Dans le cas où  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{A'B'}$  ont le même support, nous dirons qu'ils sont équipollents s'ils sont liés par deux parallélogrammes (figure 1.2(d)). Si deux vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{A'B'}$  sont équipollents, nous avons les propriétés suivantes (figure 1.2(c)) qui sont celles des parallélogrammes :
  - a) Les vecteurs  $\overrightarrow{AA'}$  et  $\overrightarrow{BB'}$  sont équipollents,
  - b) Les segments  $AB'$  et  $BA'$  ont le même milieu  $M$ . chacune de ces deux propriétés est caractéristique de l'équipollence, y compris lorsque  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{A'B'}$  ont même support. Considérons un troisième vecteur  $\overrightarrow{A''B''}$  que nous comparons aux deux premiers ci-dessous,
  - c) Si  $\overrightarrow{AB}$  est équipollent à  $\overrightarrow{A'B'}$  et  $\overrightarrow{A'B'}$  à  $\overrightarrow{A''B''}$ , alors  $\overrightarrow{AB}$  est équipollent à  $\overrightarrow{A''B''}$ .Un vecteur dont l'*origine* et l'*extrémité* sont parfaitement déterminées est un *vecteur lié*.
  - 1) Un vecteur est dit « *vecteur libre* » s'il est défini par sa direction son sens et sa longueur sans fixer son point d'application.
  - Un vecteur est nommé "*vecteur glissant*" si l'on impose sa droite support ( $\Delta$ ) sans fixer son point d'application.
  - 2) Deux vecteurs sont égaux s'ils ont la même intensité (longueur), la même direction et le même sens. Par exemple, les deux vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{A'B'}$  (figure 1.2c) sont égaux, même s'ils ont des points initiaux et terminaux différents ;  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ .

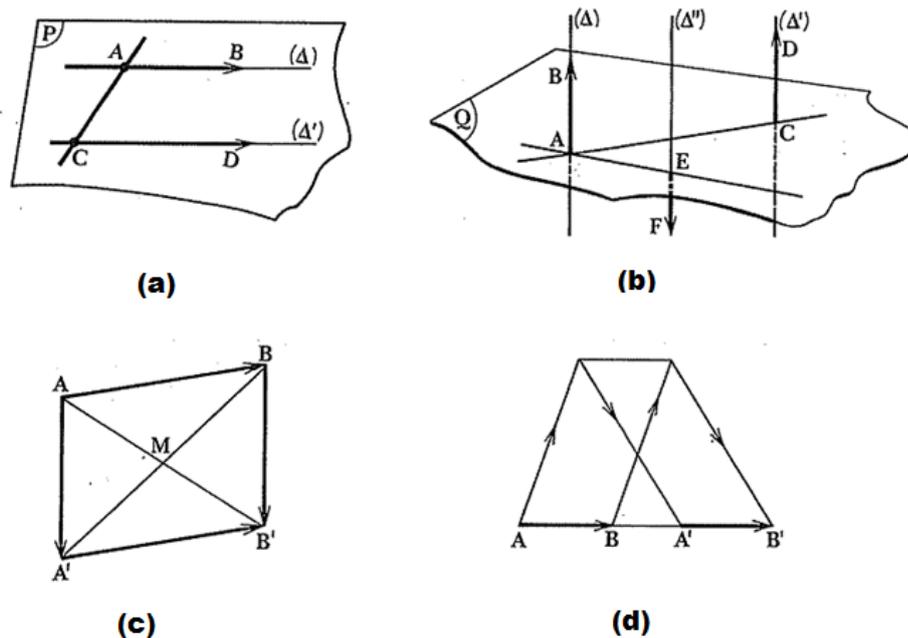
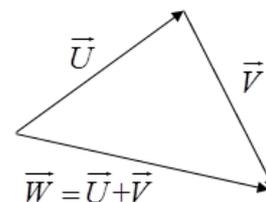


Figure 1.2 : caractéristiques des vecteurs.

### 1.8.4. Opérations élémentaires sur les vecteurs

#### 1.8.4.1. Addition vectorielle

La somme  $\vec{U} + \vec{V}$  de deux vecteurs  $\vec{U}$  et  $\vec{V}$  est définie comme suit : on met les deux vecteurs bout à bout de sorte que le point terminal de  $\vec{U}$  coïncide avec le point initial de  $\vec{V}$ . Le vecteur  $\vec{W} = \vec{U} + \vec{V}$  relie le point initial de  $\vec{U}$  au point terminal de  $\vec{V}$



L'addition de vecteurs est commutative. Cela signifie que, si  $\vec{U}$  et  $\vec{V}$  sont des vecteurs, alors

$$\vec{U} + \vec{V} = \vec{V} + \vec{U}$$

L'addition de vecteurs est aussi associative. Cela veut dire que, si  $\vec{U}$ ,  $\vec{V}$  et  $\vec{W}$  sont des vecteurs, alors

$$(\vec{U} + \vec{V}) + \vec{W} = \vec{U} + (\vec{V} + \vec{W})$$

L'addition a un élément neutre :

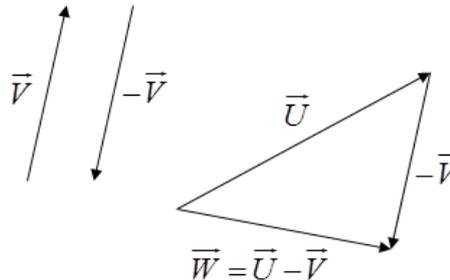
$$\vec{U} + \vec{0} = \vec{U}$$

Si  $\vec{V}$  est un vecteur, alors  $-\vec{V}$  est le vecteur ayant la même direction et la même intensité que  $\vec{V}$  mais de sens opposé. Donc

$$\vec{V} + (-\vec{V}) = \vec{0}$$

**1.8.4.2. Soustraction vectorielle**

La différence  $\vec{U} - \vec{V}$  de deux vecteurs  $\vec{U}$  et  $\vec{V}$  est définie comme  $\vec{U} - \vec{V} = \vec{U} + (-\vec{V})$

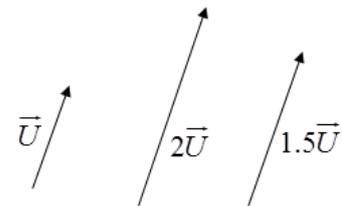


**1.8.4.3. Multiplication d'un vecteur par un scalaire**

Quand on manipule des vecteurs, on utilise le mot « scalaire » à la place de « nombre réel ». Les scalaires sont souvent désignés par une lettre grecque.

Si  $\lambda$  est un scalaire et  $\vec{U}$  un vecteur, alors le produit  $\lambda\vec{U}$  est défini comme suit :

- Si  $\lambda > 0$ , alors le produit  $\lambda\vec{U}$  dont l'intensité a  $\lambda$  fois l'intensité de  $\vec{U}$  et dont le sens est le même que  $\vec{U}$ .
- Si  $\lambda < 0$ , alors le produit  $\lambda\vec{U}$  dont l'intensité a  $|\lambda|$  fois l'intensité de  $\vec{U}$  et dont le sens est l'opposé de celui de  $\vec{U}$ .
- Si  $\lambda = 0$  ou si  $\vec{U} = \vec{0}$ , alors le produit  $\lambda\vec{U}$  est le vecteur nul.



**1.8.4.4. Propriétés du produit**

- a)  $\lambda(\vec{U} + \vec{V}) = \lambda\vec{U} + \lambda\vec{V}$
- b)  $(\lambda + \mu)\vec{U} = \lambda\vec{U} + \mu\vec{U}$
- c)  $1\vec{U} = \vec{U}$
- d)  $0\vec{U} = \vec{0}$

**1.8.4.5. Relation de Chasles**

La relation de Chasles porte le nom de Michel Chasles, mathématicien français du 19<sup>e</sup> siècle. Initialement associée à la géométrie, pour décrire une relation entre vecteurs dans un espace affine, la relation de Chasles s'écrit de la manière suivante :

$$\text{Pour des points } A, B \text{ et } C \text{ d'un espace affine : } \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

Les deux relations suivantes se déduisent de la relation de Chasles. Quels que soient les points  $A$  et  $B$  du plan et l'origine  $O$ , on a les deux relations suivantes :

$$-\vec{AB} = \vec{BA}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

**1.8.5. Représentation des vecteurs dans le plan**

On utilise un système de coordonnées rectangulaires pour représenter les vecteurs dans le plan. Appelons  $\vec{u}_x$  un vecteur de longueur 1 dont la direction est celle de l'axe  $Ox$  et  $\vec{u}_y$  un vecteur de longueur 1 dont la direction est celle de l'axe  $Oy$

$$\vec{u}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En deux dimensions, les deux vecteurs  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_y$  forment ce que l'on appelle la base canonique. Elle est orthonormée : les deux vecteurs sont orthogonaux et ont une longueur de 1

Si  $\vec{U}$  est un vecteur ayant son point initial à l'origine  $O$  et son point terminal en  $P(a, b)$ , alors on peut représenter  $\vec{U}$  comme combinaison des vecteurs  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_y$  :

$$\vec{U} = a\vec{u}_x + b\vec{u}_y = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Les scalaires  $a$  et  $b$  sont appelés les composantes du vecteur  $\vec{U} = a\vec{u}_x + b\vec{u}_y$ ,  $a$  étant la composante dans la direction  $\vec{u}_x$  et  $b$  la composante dans la direction  $\vec{u}_y$ . En  $n$  dimensions, les vecteurs ont  $n$  composantes.

**Théorème 1 :** Supposons qu'un vecteur  $\vec{U}$  a pour point initial  $P_1(x_1, y_1)$  et comme point terminal  $P_2(x_2, y_2)$ . On a alors :

$$\vec{U} = \overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\vec{u}_x + (y_2 - y_1)\vec{u}_y = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_x \\ \vec{u}_y \end{pmatrix}$$

$x_2 - x_1$  et  $y_2 - y_1$  sont les composantes du vecteur  $\vec{U}$

On peut écrire aussi :

$$\vec{U} \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$$

**Théorème 2 :** Deux vecteurs  $\vec{U}$  et  $\vec{V}$  sont égaux si et seulement si leurs composantes correspondantes sont égales.

Soient  $\vec{U} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  et  $\vec{W} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$  deux vecteurs et  $\lambda$  un scalaire. Alors :

$$\vec{U} + \vec{V} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix} \quad \vec{U} - \vec{V} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c \\ b-d \end{pmatrix}$$

$$\lambda \vec{U} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{pmatrix}$$

### 1.8.6. Norme d'un vecteur

Les quatre termes suivants sont synonymes : norme, intensité, longueur, module.

Si  $\vec{U}$  est un vecteur, on utilise le symbole  $\|\vec{U}\|$  pour représenter la *norme* de  $\vec{U}$ .

Puisque  $\|\vec{U}\|$  sera la longueur du vecteur, la norme doit avoir les cinq propriétés suivantes :

Soit  $\vec{U}$  un vecteur et  $\lambda$  un scalaire, alors

(1)  $\|\vec{U}\| \geq 0$  ; (2)  $\|\vec{U}\| = 0$  si et seulement si  $\vec{U} = \vec{0}$  ; (c)  $\|-\vec{U}\| = \|\vec{U}\|$  ; (3)  $\|\lambda \vec{U}\| = |\lambda| \|\vec{U}\|$  ;

(4)  $\|\vec{U} + \vec{V}\| \leq \|\vec{U}\| + \|\vec{V}\|$  (inégalité du triangle).

Un vecteur  $\vec{U}$  pour lequel la norme  $\|\vec{U}\| = 1$  est qualifié de vecteur unité (ou unitaire).

Dans le plan muni d'un système orthonormé, si  $a$  et  $b$  sont les composantes d'un vecteur  $\vec{U}$ , on

a :  $\|\vec{U}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$

#### Exemple récapitulatif

$$\vec{U} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{V} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}; \|\vec{U}\| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}; \|\vec{V}\| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\vec{U} + \vec{V} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+2 \\ 2+(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{U} - \vec{V} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-2 \\ 2-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$2\vec{U} = 2 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 4 \\ 2 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}; \|2\vec{U}\| = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} = 2\|\vec{U}\|.$$

**Théorème 3** : Pour tout vecteur non nul, le vecteur  $\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{U}\|} \vec{U}$  est un vecteur unité qui a la

même direction et le même sens que  $\vec{U}$ .

**Exemple** : soit  $\vec{U} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ . La norme de ce vecteur est  $\|\vec{U}\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ .

Le vecteur unité ayant même direction et même sens est  $\vec{u} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

On peut vérifier que  $\|\vec{u}\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$

On peut rendre unitaire n'importe quel vecteur non nul en le multipliant par l'inverse de sa norme.

### 1.8.7. Le produit scalaire

Le produit scalaire est une opération algébrique s'ajoutant aux lois s'appliquant aux vecteurs. À deux vecteurs, elle associe leur produit, qui est un nombre (ou scalaire, d'où son nom). Elle permet d'exploiter les notions de la géométrie euclidienne traditionnelle : longueurs, angles, orthogonalité.

#### 1.8.7.1. Définition du produit scalaire

Si  $\vec{U} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  et  $\vec{V} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$  sont deux vecteurs du plan, le produit scalaire des deux vecteurs  $\vec{U}$  et  $\vec{V}$

noté  $\vec{U} \cdot \vec{V}$  est le nombre réel :

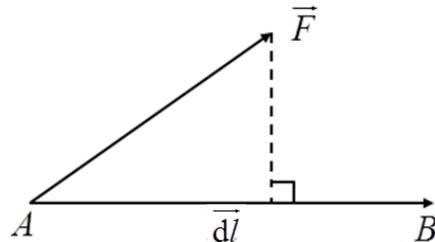
$$\vec{U} \cdot \vec{V} = ac + bd \quad (\text{L'expression analytique du produit scalaire})$$

ainsi  $\vec{U} \cdot \vec{V} = \|\vec{U}\| \cdot \|\vec{V}\| \cos(\vec{U}, \vec{V})$ ,

$\|\vec{U}\|$  et  $\|\vec{V}\|$  sont respectivement les normes (longueurs) de  $\vec{U}$  et  $\vec{V}$ ,  $(\vec{U}, \vec{V})$  est l'angle entre les deux vecteurs.

**Exemple 1 :** en mécanique le travail d'une force  $\vec{F}$  pour un déplacement élémentaire  $\vec{dl}$  s'écrit :  $dW = \vec{F} \cdot d\vec{l}$  ;

On a alors  $W_{A \rightarrow B} = \int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{AB} F \cdot dl \cos(\vec{F}, \vec{dl})$



**Exemple 2 :** Soient deux vecteurs  $\vec{U} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$  et  $\vec{V} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

Calculer  $\vec{U} \cdot \vec{V}$ ,  $\vec{V} \cdot \vec{U}$ ,  $\vec{U} \cdot \vec{U}$ ,  $\vec{V} \cdot \vec{V}$ ,  $\|\vec{U}\|$  et  $\|\vec{V}\|$ .

**Solution :**

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = 2 \times 5 + (-3) \times 3 = 1 ; \quad \vec{V} \cdot \vec{U} = 5 \times 2 + 3 \times (-3) = 1 ; \quad \vec{U} \cdot \vec{U} = 2 \times 2 + (-3) \times (-3) = 13 ;$$

$$\vec{V} \cdot \vec{V} = 5 \times 5 + 3 \times 3 ; \quad \|\vec{U}\| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13} ; \quad \|\vec{V}\| = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34} .$$

**1.8.7.2. Propriétés du produit scalaire**

Les principales propriétés du produit scalaire peuvent être déduites de l'exemple 2.

Soient  $\vec{U}$ ,  $\vec{V}$  et  $\vec{W}$  trois vecteurs, alors :

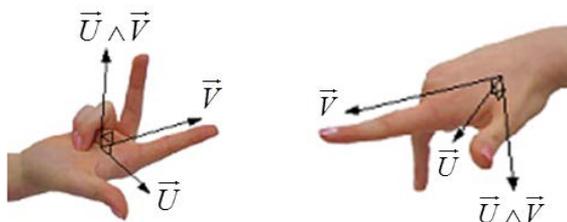
- 1) Le produit scalaire est symétrique (commutatif)  $\vec{U} \cdot \vec{V} = \vec{V} \cdot \vec{U}$
- 2) Le produit scalaire du même vecteur égal le carré de sa norme  $\vec{U} \cdot \vec{U} = \|\vec{U}\|^2$
- 3)  $\vec{0} \cdot \vec{U} = 0$
- 4)  $(\lambda \vec{U}) \cdot \vec{V} = \lambda(\vec{U} \cdot \vec{V})$
- 5) Le produit scalaire est distributif sur l'addition des vecteurs  $\vec{U} \cdot (\vec{V} + \vec{W}) = \vec{U} \cdot \vec{V} + \vec{U} \cdot \vec{W}$
- 6) Deux vecteurs  $\vec{U}$  et  $\vec{V}$  non nuls soient orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul  $\vec{U} \cdot \vec{V} = 0$
- 7) Deux vecteurs  $\vec{U}$  et  $\vec{V}$  non nuls sont *parallèles* (on dit aussi *colinéaires*) s'il existe un scalaire non nul  $\lambda$  tel que  $\vec{U} = \lambda \vec{V}$ .

**1.8.8. Le produit vectoriel**

**1.8.8.1. Définition du produit vectoriel**

Soient deux vecteurs  $\vec{U}$  et  $\vec{V}$  formant un angle  $\alpha$ . Par définition, le *produit vectoriel* de  $\vec{U}$  et  $\vec{V}$  est le vecteur noté  $\vec{U} \wedge \vec{V}$  (lire  $\vec{U}$  « cross »  $\vec{V}$ ) tel que :

- 1) La direction de  $\vec{U} \wedge \vec{V}$  est orthogonal à chacun des deux vecteurs  $\vec{U}$  et  $\vec{V}$ . Il s'agit d'un vecteur normal au plan contenant les deux vecteurs  $\vec{U}$  et  $\vec{V}$ .
- 2) Le sens de  $\vec{U} \wedge \vec{V}$  donne au triplet  $(\vec{U} ; \vec{V} ; \vec{U} \wedge \vec{V})$  une *orientation directe* : cette orientation est donnée par la règle des trois doigts de la main droite (pouce, index, majeur), illustrée ci-dessous ;

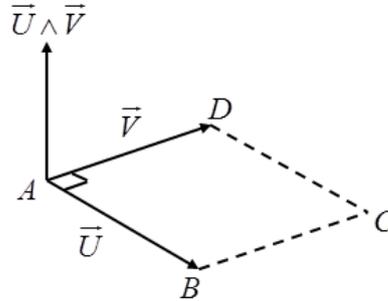


- 3) Le produit vectoriel  $\vec{U} \wedge \vec{V}$  de deux vecteurs position  $\vec{U}$  et  $\vec{V}$  (dont la dimension est

une longueur  $L$ ) représente l'aire orientée du parallélogramme formé par ces deux vecteurs (dimension  $L^2$ ) dirigée selon la normale à ce parallélogramme (figure ci-dessous).

La norme de  $\vec{U} \wedge \vec{V}$  est égale à l'aire du parallélogramme construit sur  $\vec{U}$  et  $\vec{V}$  :

$$\|\vec{U} \wedge \vec{V}\| = \|\vec{U}\| \|\vec{V}\| \cdot \sin \alpha$$



### 1.8.8.2. Propriétés du produit vectoriel

Les principales propriétés du produit vectoriel sont :

- 1) il est antisymétrique  $\vec{U} \wedge \vec{V} = -\vec{V} \wedge \vec{U}$  ;
- 2) il est distributif sur l'addition des vecteurs  $\vec{U} \wedge (\vec{V} + \vec{W}) = \vec{U} \wedge \vec{V} + \vec{U} \wedge \vec{W}$
- 3) deux vecteurs non nuls sont colinéaires si et seulement si leur produit vectoriel est nul.

### 1.8.8.3. Composantes du vecteur $\vec{U} \wedge \vec{V}$ dans une base $\vec{u}_x$ , $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$ orthonormée

Le produit vectoriel de  $\vec{U} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$  et  $\vec{V} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$  est le vecteur  $\vec{U} \wedge \vec{V} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_x \\ \vec{u}_y \\ \vec{u}_z \end{pmatrix}$

Truc mnémotechnique pour calculer  $\vec{U} \wedge \vec{V}$  :

Effectuez le « déterminant »

$$\begin{vmatrix} \vec{u}_x & a_1 & b_1 \\ \vec{u}_y & a_2 & b_2 \\ \vec{u}_z & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = (+\vec{u}_x) \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + (-\vec{u}_y) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + (+\vec{u}_z) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{u}_x - (a_1 b_3 - a_3 b_1) \vec{u}_y + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{u}_z$$

### 1.8.8.4. Aire d'un triangle

L'aire  $S$  d'un triangle  $ABC$  vaut la moitié de l'aire du parallélogramme  $ABDC$ . D'où, d'après le point 3 de la définition du produit vectoriel :

$$S = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$$

**1.8.9. Le produit mixte**

**1.8.9.1. Définition**

On appelle *produit mixte* de trois vecteurs  $\vec{U}$ ,  $\vec{V}$  et  $\vec{W}$ , pris dans cet ordre, le nombre réel noté  $[\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}] = (\vec{U} \wedge \vec{V}) \cdot \vec{W}$  défini par  $[\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}] = \det(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W})$ .

En effet :

$$[\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}] = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_2 c_3 - b_3 c_2 \\ b_3 c_1 - b_1 c_3 \\ b_1 c_2 - b_2 c_1 \end{pmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 (-1) \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

**1.8.9.2. Propriétés du produit mixte**

1) Le produit mixte  $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W})$  de trois vecteurs position  $\vec{U}$ ,  $\vec{V}$  et  $\vec{W}$  représente le volume du parallélépipède formé par ces trois vecteurs.

2)  $[\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}] = 0 \Leftrightarrow \vec{U}$ ,  $\vec{V}$  et  $\vec{W}$  sont coplanaires.

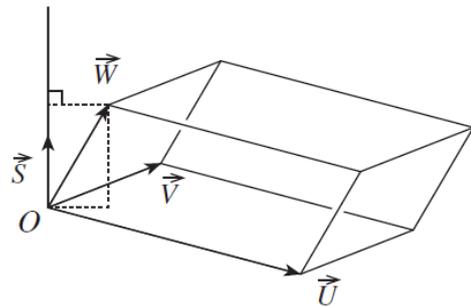
3)  $(\vec{U} \wedge \vec{V}) \cdot \vec{W} = \vec{U} \cdot (\vec{V} \wedge \vec{W})$ .

4) Le produit mixte est inchangé par permutation circulaire directe de ses vecteurs :

$$[\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}] = [\vec{V}, \vec{W}, \vec{U}] = [\vec{W}, \vec{U}, \vec{V}]$$

5) Pour toute permutation de deux termes du produit mixte, celui-ci change de signe :

$$[\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}] = -[\vec{V}, \vec{U}, \vec{W}]$$



**CHAPITRE 2 :**  
**CINEMATIQUE DU POINT**  
**MATERIEL**

# CHAPITRE 2 : CINEMATIQUE DU POINT MATERIEL

## SOMMAIRE :

---

2.1. Notion de point matériel	24
2.2. Relativité du mouvement et nécessité d'un référentiel	24
2.2.1. Notion de référentiel	25
2.2.2. Exemples de référentiel à connaître	25
2.2.2.1. Le référentiel de Copernic (ou héliocentrique du grec <i>Hèlios</i> signifiant Soleil).	25
2.2.2.2. Le référentiel géocentrique	26
2.2.2.3. Le référentiel terrestre	26
2.3. Repérage d'un point matériel dans l'espace et dans le temps	26
2.3.1. Repérage d'un point matériel dans l'espace	26
2.3.1.1. Les différents systèmes de coordonnées	26
2.3.1.1.1. Le système de coordonnées cartésiennes	27
2.3.1.1.2. Le système de coordonnées polaires	28
2.3.1.1.3. Le système de coordonnées cylindriques	30
2.3.1.1.4. Le système de coordonnées sphériques	32
2.3.1.1.5. Abscisse curviligne et repère local de Frenet	35
2.3.2.2. Repérage d'un point dans le temps	36
2.4. La vitesse du point matériel	36
2.4.2. Définition de la vitesse	36
2.4.3. Vitesse moyenne	36
2.4.4. Vitesse instantanée	37
2.5. Accélération d'un point matériel	37
2.5.1. Définition de l'accélération moyenne	37
2.5.2. L'accélération instantanée	37
2.6. Expression du vecteur vitesse et vecteur accélération dans les différents systèmes de coordonnées	38
2.6.1. En coordonnées cartésiennes	38
2.6.1.1. Vitesse en coordonnées cartésiennes	38
2.6.1.2. Vecteur accélération en coordonnées cartésiennes	39
2.6.2. En coordonnées polaires	39
2.6.2.1. Expression de la vitesse	39
2.6.2.2. Accélération d'un point matériel	40
2.6.3. En coordonnées cylindriques	40
2.6.3.1. Expression de la vitesse	40
2.6.3.2. Expression de l'accélération	41
2.6.4. En coordonnées sphériques	41
2.6.4.1. Expression vecteur vitesse	41
2.6.4.2. Expression de l'accélération	42
2.6.5. Expression de la vitesse et l'accélération dans la base de Frenet (coordonnées intrinsèques)	44
2.6.5.1. Expression de la vitesse	44
2.6.5.2. Expression de l'accélération	44
2.7. Exemples de mouvement	45
2.7.1. Mouvements rectilignes	45
2.7.1.1. Le mouvement rectiligne uniforme	45
2.7.1.2. Le mouvement uniformément varié	45
2.7.2. Mouvement circulaire	46
2.7.2.1. Mouvement circulaire uniforme	46
2.7.2.2. Mouvement circulaire non uniforme	47
2.7.3. Mouvement hélicoïdal	47
2.7.4. Mouvement parabolique	48
2.8. Changement de référentiel : Mouvement relatif	49
2.8.1. Loi de compositions des vitesses	50
2.8.2. Composition des accélérations	52
2.8.3. Référentiel en translation	54
2.8.4. Référentiel en rotation uniforme autour d'un axe fixe	55
2.8.4.1. Composition des vitesses	55
2.8.4.2. Composition des accélérations	56

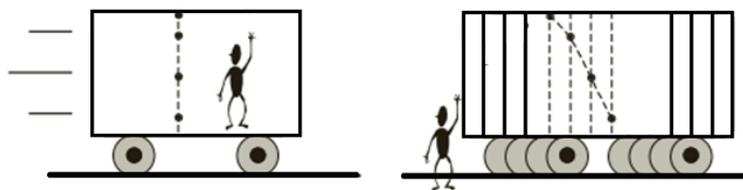
---

### 2.3. Notion de point matériel

Pour décrire plus simplement les mouvements d'un corps solide, on l'assimile souvent à un point qu'on nomme *point matériel*. En fait un corps matériel peut être assimilé à un point s'il ne roule pas sur lui-même et si ses dimensions caractéristiques sont petites par rapport aux distances qu'il parcourt. Un point matériel est un point géométrique dont la position peut être parfaitement définie par trois coordonnées seulement. Considérons par exemple un ballon, peut-on le considérer comme un point matériel ? Dans le cas d'un ballon de rugby, il paraît difficile de l'assimiler à un point vu sa rotation sur lui-même qu'est dû à sa forme ovoïdale. Dans le cas d'un ballon de football, sa forme sphérique ne permet pas de visualiser les effets liés à sa rotation sur lui-même. On peut alors étudier sa trajectoire comme celle d'un point matériel.

### 2.4. Relativité du mouvement et nécessité d'un référentiel

En mécanique, la description du mouvement d'un objet (un point matériel) est nécessairement liée à un référentiel. Le référentiel est un corps de référence (lieu, objet, point, observateur...) à partir duquel la position et la trajectoire d'un tel objet sont étudiées. L'étude du mouvement d'un point matériel nécessite la présence d'un observateur qui analyse son mouvement. Selon la position de l'observateur, les conclusions peuvent être différentes alors que l'étude porte sur le même point matériel. Si l'on considère l'exemple de la chute d'une bille réalisée dans le wagon d'un train qui se déplace sur une voie rectiligne à vitesse constante. Les résultats de l'étude de ce mouvement obtenus par un observateur assis dans ce wagon et un autre immobile sur le quai seront certainement différents. Pour l'observateur assis dans le wagon le mouvement de la bille est rectiligne alors que pour celui qui se trouve sur le quai le mouvement est curviligne (voir *figure 2.1*).



**Figure 2.1** : relativité du mouvement pour le chute d'une bille dans un wagon en mouvement rectiligne uniforme : positions d'une bille à différents instants pour un observateur dans le wagon et pour un autre immobile sur le quai.

Dans l'expression « le train se déplace à vitesse constante » il est évident que c'est par rapport au sol et donc la Terre. Le voyageur assis dans un wagon du train peut dire « je suis immobile », tout le monde comprendra que c'est par rapport au siège du wagon et du wagon lui-même. Il peut dire aussi « je me déplace à grande vitesse » et on comprendra que c'est par rapport à la Terre. Ainsi en mécanique, pour qu'il n'y ait pas de doute possible, il est impératif d'indiquer

le *référentiel* choisi c'est-à-dire préciser par rapport à quoi l'étude du mouvement sera effectuée.

### 2.3.2. Notion de référentiel

Un *référentiel* (ou *solide de référence*) est un ensemble de points tous fixes les uns par rapport aux autres. L'observateur qui étudie le mouvement d'un point matériel est lui-même immobile dans ce référentiel. Exemple : l'observateur est dans le train, le référentiel est le train. L'observateur est sur le quai, le référentiel est la Terre.

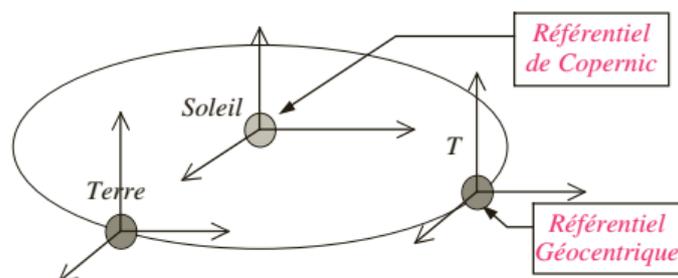
Un référentiel peut être caractérisé par son nom. Dans les exemples précédents on peut parler du référentiel « train » qui constitué de tout ce qui est fixe par rapport au train ou du référentiel « Terrestre » qui constitué de tout ce qui est fixe par rapport à la Terre sans qu'il y ait d'ambiguïté. Un référentiel peut aussi être caractérisé par un point  $O$  (origine) et trois directions fixes dans ce référentiel c'est-à-dire par un repère  $(O, x, y, z)$ . Tout ce qui est fixe dans ce repère constitue le référentiel. Par exemple, pour étudier le mouvement d'une bille dans un laboratoire il est possible de choisir un point  $O$  correspondant à la position de la bille à un instant initial et 3 axes  $Ox$  (longueur),  $Oy$  (largeur) et  $Oz$  (hauteur) lié au laboratoire. Le repère  $R(O, x, y, z)$  définit le référentiel d'étude correspondant au référentiel « laboratoire ».

Pour un référentiel donné il existe une infinité de repères possibles (infinité de possibilités de choisir une origine et 3 axes). Pour un repère donné il n'existe qu'un référentiel associé (tout ce qui est fixe dans le repère forme le référentiel)

### 2.3.3. Exemples de référentiel à connaître

#### 2.3.3.1. Le référentiel de Copernic (ou héliocentrique du grec *Hélios* signifiant Soleil).

L'origine du repère définissant ce référentiel correspond au centre d'inertie du système solaire (pratiquement confondu avec le centre d'inertie du Soleil). Les 3 axes du repère sont dirigés vers 3 étoiles qui s'éloignent du Soleil toujours dans la même direction.



**Figure 2.2 :** les référentiels de Copernic et géocentrique ; le référentiel géocentrique est en mouvement de translation circulaire uniforme par rapport au référentiel de Copernic

### 2.3.3.2. Le référentiel géocentrique<sup>1</sup>

Le repère caractérisant ce référentiel a pour origine le centre de la Terre et les 3 axes sont des axes qui restent parallèles à ceux du référentiel de Copernic.

### 2.3.3.3. Le référentiel terrestre

L'origine du repère choisi est liée à la Terre ainsi que les 3 axes. Le référentiel terrestre est en rotation uniforme par rapport au référentiel géocentrique (rotation autour d'un axe Nord-Sud fixe dans le référentiel géocentrique). Le référentiel géocentrique est en mouvement de translation circulaire uniforme par rapport au référentiel de Copernic (figure 2.2).

Un référentiel est défini soit par son nom (exemple : référentiel terrestre) soit par un de ses repères  $R(O, x, y, z)$ .

## 2.4. Repérage d'un point matériel dans l'espace et dans le temps

Pour décrire le mouvement d'un point, l'observateur doit connaître la position de cet objet au cours du temps. L'étude cinématique du mouvement d'un point revient à pouvoir répondre aux questions " où ? " (où se trouve le point ?) et " quand ? " (à quel moment dans le temps ?). Pour répondre à ces questions il est nécessaire de définir un repère d'espace, muni d'une origine  $O$  (fixe dans le référentiel) et d'axes de référence lui permettant de déterminer la direction dans laquelle se trouve l'objet, et un repère temporel (chronomètre, montre...).

### 2.4.1. Repérage d'un point matériel dans l'espace

Pour décrire la position d'un objet dans l'espace, il est nécessaire de disposer d'une référence. Par exemple, un homme assis dans un train est immobile par rapport au wagon, mais en mouvement par rapport à la Terre. Ainsi pour déterminer le mouvement d'un point, on se rapporte à un solide  $S$  supposé indéformable qui doit être défini clairement. Ce solide constitue le référentiel d'étude  $R$ . Ensuite, on repère les points de l'espace dans ce référentiel à l'aide d'un repère orthonormé direct, soit un point origine particulier au solide  $S$  (souvent on prend le centre de gravité de  $S$ ) et 3 axes orthogonaux formant un trièdre direct. Plusieurs repères ou systèmes de coordonnées peuvent alors être choisis en fonction notamment de la géométrie du problème.

#### 2.4.1.1. Les différents systèmes de coordonnées

La résolution de tout problème de physique et notamment de mécanique, nécessite le repérage d'un point  $M$  dans l'espace. Il faut connaître les composantes du vecteur position  $\overline{OM}$  et des vecteurs qui pourront être définis à partir de celui-là. On choisit donc une base de

---

<sup>1</sup> du grec *géo* signifiant Terre

projection dans laquelle on cherche à déterminer les composantes des vecteurs. Ce choix sera orienté par la géométrie du problème.

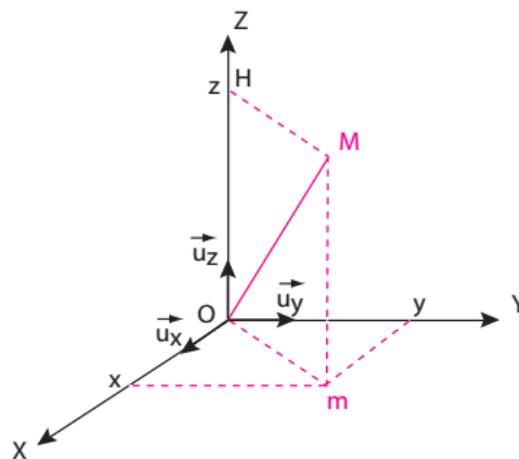
#### 2.4.1.1.1. Le système de coordonnées cartésiennes

Considérons un repère constitué de trois axes  $X, Y, Z$  rattachés à une origine  $O$  caractéristique du solide de référence ( $R$ ). À ce repère on associe une base orthonormée directe<sup>2</sup>  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ .  $\vec{u}_x, \vec{u}_y$  et  $\vec{u}_z$  sont les vecteurs unitaires des axes  $OX, OY$  et  $OZ$  respectivement.

À un instant donné, on note la position du point  $M$  par le vecteur  $\vec{r} = \overline{OM}$  qui s'appelle le *vecteur position*. On note également les coordonnées cartésiennes  $x, y$  et  $z$  (qui sont des grandeurs algébriques positives ou négatives) du point  $M$  définies par la relation suivante :

$$\vec{r} = \overline{OM} = x \cdot \vec{u}_x + y \cdot \vec{u}_y + z \cdot \vec{u}_z \quad (2.1)$$

Pour représenter ce système de coordonnées, on marque d'abord le point matériel  $M$ . Ensuite on projette ce point  $M$  sur l'axe  $OZ$  : on obtient alors le point  $H$  de coordonnée  $z$  sur l'axe  $OZ$ . On projette  $M$  orthogonalement dans le plan  $(OX, OY)$  en traçant une parallèle à l'axe  $OZ$  passant par  $M$  : on obtient alors le point  $m$ . On trace alors les droites passant par  $m$  et parallèles aux axes  $OX$  et  $OY$  : les intersections de ces droites avec les axes  $OX$  et  $OY$  donnent les coordonnées  $x$  et  $y$  du point  $M$  (Figure 2.3).



**Figure 2.3 :** Représentation du système de coordonnées cartésiennes dans le repère  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  : cas du point  $M$  de coordonnées  $(x, y, z)$ , et du vecteur position  $\vec{r} = \overline{OM}$ .

#### Vecteur déplacement élémentaire dans les coordonnées cartésiennes

Le déplacement élémentaire s'obtient en faisant varier de manière élémentaire chacune des coordonnées du point  $M$ . Dans le cas des coordonnées cartésiennes, le déplacement

<sup>2</sup> La base  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  est orthonormée directe lorsque  $\|\vec{u}_x\| = \|\vec{u}_y\| = \|\vec{u}_z\| = 1$ , les trois vecteurs sont orthogonaux deux à deux, et  $\vec{u}_x \wedge \vec{u}_y = \vec{u}_z$

élémentaire d'un point  $M$  de coordonnées  $(x, y, z)$  correspond à son déplacement jusqu'au point  $M'$  de coordonnées  $(x+dx, y+dy, z+dz)$ . On a donc :

$$\begin{aligned} d\overline{OM} &= \overline{OM'} - \overline{OM} = \overline{MM'} \\ &= dx \cdot \vec{u}_x + dy \cdot \vec{u}_y + dz \cdot \vec{u}_z \end{aligned} \quad (2.2)$$

Ce résultat peut s'obtenir géométriquement en sommant les déplacements élémentaires liés à la variation d'une seule variable, les autres restant constantes. Ceci est possible car les deux variables sont indépendantes et la base fixe.

#### 2.4.1.1.2. Le système de coordonnées polaires

Le système de coordonnées polaires peut être utilisé pour positionner un point matériel mobile dans un plan. La symétrie polaire consiste à privilégier un point  $O$  fixe autour duquel tourne le point  $M$ . La position de  $M$  est alors définie par deux coordonnées de nature différente notées habituellement  $\rho$  et  $\theta$ . La coordonnée  $\rho$  appelée la *coordonnée radiale* est la distance du point  $M$  au point  $O$  ( $OM = \rho$ ). L'autre coordonnée,  $\theta$ , est la *coordonnée angulaire* également appelée angle polaire ou azimut. L'angle de rotation  $\theta$  est l'angle que fait le segment  $OM$  avec l'axe polaire  $Ox$  (voir figure 2.4 (a)). Pour décrire la totalité des points du plan, l'angle  $\theta$  doit décrire un segment d'amplitude  $2\pi$  ( $\theta$  variée de 0 à  $2\pi$ ).

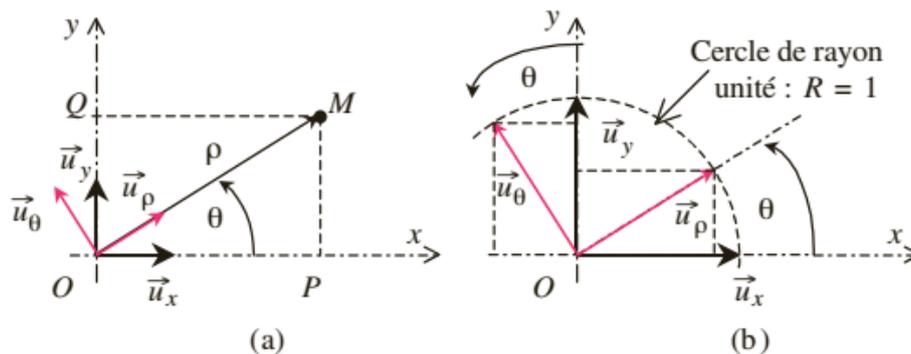


Figure 2.4 : Les coordonnées polaires  $(\rho, \theta)$  et la base associée  $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$

Pour exprimer le vecteur position  $\overline{OM}$  en coordonnées polaires il est commode d'introduire une nouvelle base orthonormée directe  $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$  définie de la façon suivante (voir figure 2.4) :

- $\vec{u}_\rho$  est le vecteur unitaire dont la direction et le sens sont ceux du vecteur position  $\overline{OM}$ . C'est le vecteur *radial* ;
- $\vec{u}_\theta$  est un vecteur unitaire obtenu par rotation d'un angle  $+\pi/2$  dans le plan à partir de  $\vec{u}_\rho$  ( $\vec{u}_\theta \perp \vec{u}_\rho$ ). C'est le vecteur *orthoradial*.

Le vecteur position s'écrit alors dans cette base :

$$\overline{OM} = \|\overline{OM}\| \vec{u}_\rho = \rho \cdot \vec{u}_\rho \quad (2.3)$$

$(\rho, \theta)$  sont les coordonnées polaires du point  $M$  mais ne correspondent pas aux composantes du vecteur position. Les composantes de ce vecteur position sont  $(\rho, 0)$  : il n'y a qu'une seule composante  $\rho$  suivant  $\vec{u}_\rho$ .

#### 2.4.1.1.2.1. Liens entre les systèmes de coordonnées polaires et cartésiennes (à 2D)

Avec les notations de la figure 2.4(a) nous pouvons écrire en utilisant le triangle rectangle ( $OPM$ ) :

$$\cos \theta = \frac{OP}{OM} = \frac{x}{\rho} \Rightarrow x = \rho \cos \theta \quad (2.4)$$

$$\sin \theta = \frac{PM}{OM} = \frac{y}{\rho} \Rightarrow y = \rho \sin \theta \quad (2.5)$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{y}{x} \quad (2.6)$$

En appliquant le théorème de Pythagore on trouve

$$OM = \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2.7)$$

On en déduit alors les expressions suivantes :

$$\cos \theta = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (2.8)$$

$$\sin \theta = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (2.9)$$

Si les coordonnées polaires  $(\rho, \theta)$  sont connues on obtient les coordonnées cartésiennes en utilisant les deux relations (2.4) et (2.5). Si les coordonnées cartésiennes  $(x, y)$  sont connues on obtient les coordonnées polaires en utilisant les deux relations (2.6) et (2.7).

On peut exprimer les vecteurs  $\vec{u}_\rho$  et  $\vec{u}_\theta$  dans la base des coordonnées cartésiennes, il suffit les projetés sur les axes ( $Ox$ ) et ( $Oy$ ). En s'aidant de la figure 2.4 (b) les composantes des vecteurs unitaires  $\vec{u}_\rho$  et  $\vec{u}_\theta$  dans la base cartésienne sont :

$$\begin{cases} \vec{u}_\rho = (\cos \theta) \vec{u}_x + (\sin \theta) \vec{u}_y \\ \vec{u}_\theta = (-\sin \theta) \vec{u}_x + (\cos \theta) \vec{u}_y \end{cases} \quad (2.10), (2.11)$$

De même, en inversant les relations précédentes on peut écrire :

$$\begin{cases} \vec{u}_x = (\cos \theta)\vec{u}_\rho - (\sin \theta)\vec{u}_\theta \\ \vec{u}_y = (\sin \theta)\vec{u}_\rho + (\cos \theta)\vec{u}_\theta \end{cases} \quad (2.12),(2.13)$$

Un moyen simple de retrouver rapidement les composantes d'un vecteur sur une base est d'utiliser les propriétés du produit scalaire. En effet on peut écrire par exemple :

$$\text{Composante de } \vec{u}_\rho \text{ sur } \vec{u}_x : \vec{u}_\rho \cdot \vec{u}_x = \|\vec{u}_\rho\| \cdot \|\vec{u}_x\| \cos \theta = \cos \theta$$

$$\text{Composante de } \vec{u}_\rho \text{ sur } \vec{u}_y : \vec{u}_\rho \cdot \vec{u}_y = \|\vec{u}_\rho\| \cdot \|\vec{u}_y\| \cos(\pi/2 - \theta) = \sin \theta$$

On trouve ainsi la relation (2.10).

### 2.3.1.1.1.2. Déplacement élémentaire en coordonnées polaires

Le déplacement élémentaire d'un point  $M$  de coordonnées  $(r, \theta)$  correspond à son déplacement jusqu'au point  $M'$  de coordonnées  $(\rho + d\rho, \theta + d\theta)$ . On a donc :

$$d\overline{OM} = \overline{OM'} - \overline{OM} = \overline{MM'} \quad (2.14)$$

Les variables  $\rho, \theta$  sont indépendantes : l'expression du déplacement élémentaire est donc la somme des déplacements élémentaires correspondant à la variation d'une seule variable.

- une variation  $d\rho$  de  $\rho$  correspond à un mouvement le long de la droite  $(OM)$  soit  $d\rho \cdot \vec{u}_\rho$ ,
- une variation  $d\theta$  de  $\theta$  correspond à un déplacement circulaire de centre  $O$ , de rayon  $\rho$  et d'angle  $d\theta$  donc de longueur  $\rho d\theta$  suivant  $\vec{u}_\theta$ , soit  $\rho d\theta \cdot \vec{u}_\theta$

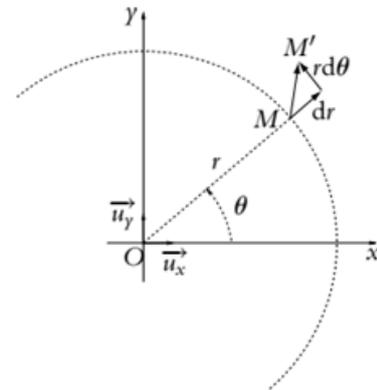


Figure 2.5 : Déplacement élémentaire en coordonnées polaires

Au final, le déplacement élémentaire en coordonnées polaires s'écrit :

$$d\overline{OM} = d\rho \cdot \vec{u}_\rho + \rho d\theta \cdot \vec{u}_\theta \quad (2.15)$$

### 2.4.1.1.3. Le système de coordonnées cylindriques

Pour repérer un point matériel dans l'espace il est possible d'utiliser les coordonnées cylindriques. Il suffit de compléter le système de coordonnées polaires par un troisième axe : l'axe  $Oz$  avec sa coordonnée cartésienne  $z$  (appelée la cote). La projection  $P$  du point  $M$  dans le plan  $(O, x, y)$  est repérée en coordonnées polaires  $(\rho, \theta)$ . La projection de  $M$  sur l'axe  $Oz$  donne

la cote  $z$  (figure 2.5). La base associée est composée de la base polaire et du vecteur unitaire  $\vec{u}_z$  suivant l'axe  $Oz$ . Le vecteur position  $\overline{OM}$  s'obtient en utilisant la relation de Chasles :

$$\overline{OM} = \overline{OP} + \overline{PM} = \rho \vec{u}_\rho + z \vec{u}_z \quad (2.16)$$

$$\|\overline{OM}\| = OM = \sqrt{\rho^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (2.17)$$

Les coordonnées cylindriques de  $M$  sont donc  $(\rho, \theta, z)$ . Les composantes du vecteur position  $\overline{OM}$  sont  $(\rho, 0, z)$  dans la base cylindrique  $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ .

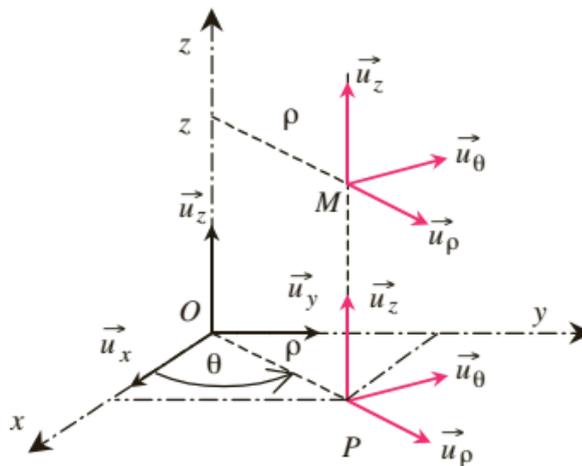
Le point  $M$  est situé sur un cylindre d'axe  $Oz$ , de rayon  $\rho$  d'où le terme coordonnées cylindriques. Pour repérer de façon univoque le point  $M$  dans l'espace, les coordonnées doivent être confinées dans les intervalles de valeurs suivantes :

$$\rho \in [0, +\infty[ , \theta \in [0, 2\pi], z \in ]-\infty, +\infty[$$

**2.4.1.1.3.1. Liens entre les coordonnées cylindriques et les coordonnées cartésiennes**

On passe facilement des coordonnées cylindriques aux coordonnées cartésiennes par les relations suivantes :

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad (2.18)$$



**Figure 2.5 :** Le système de coordonnées cylindriques.

**2.4.1.1.3.2. Vecteur déplacement élémentaire en coordonnées cylindriques**

Le vecteur déplacement élémentaire en coordonnées cylindriques égal au vecteur déplacement en coordonnée polaire plus le déplacement élémentaire suivant l'axe  $OZ$  ( $dz \cdot \vec{u}_z$ ).

On écrit alors :

$$d\overline{OM} = d\rho \cdot \vec{u}_\rho + \rho d\theta \cdot \vec{u}_\theta + dz \cdot \vec{u}_z \quad (2.19)$$

où  $d\rho$  représente le déplacement dans la direction de  $\overline{OP}$  et  $dz$  celui de la direction  $OZ$ . Le déplacement résultant de l'accroissement  $d\theta$  de l'angle polaire  $\theta$  s'effectue sur un arc de longueur  $\rho d\theta$  dans la tangente est  $\vec{u}_\theta$ .

La longueur de déplacement élémentaire total n'est autre que le module du vecteur  $d\overline{OM}$ , soit :

$$\|d\overline{OM}\| = \sqrt{(d\rho)^2 + (\rho d\theta)^2 + (dz)^2} \quad (2.20)$$

On peut définir également :

- Une surface élémentaire  $dS$  dans le plan polaire égale :  $dS = \rho d\rho d\theta$
- Un volume élémentaire  $dV$  tel que :  $dV = \rho d\rho d\theta dz$

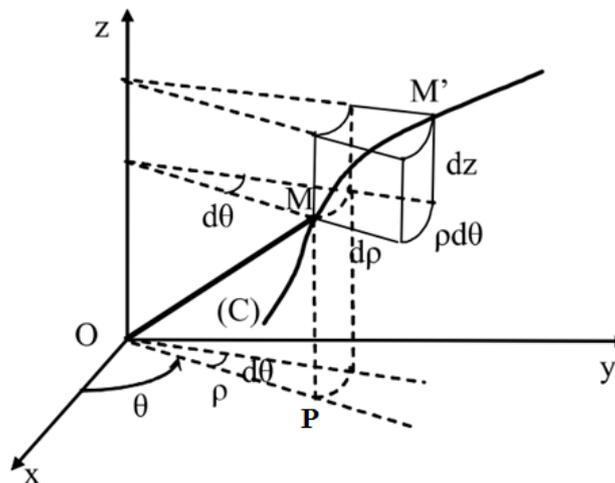


Figure 2.6 : vecteur déplacement élémentaire en coordonnées cylindriques

#### 2.4.1.1.4. Le système de coordonnées sphériques

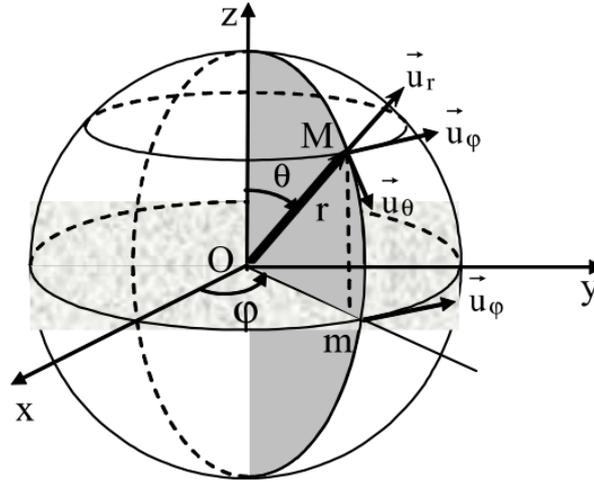
Le système de coordonnées sphériques est une représentation de l'espace à 3D qui est adaptée au problème présentant une symétrie sphérique autour d'un point  $O$ , c'est-à-dire pour lesquels les grandeurs ou les propriétés physiques en un point  $O$  quelconque de l'espace ne dépend que de la distance  $r$  de point  $O$  à ce point  $M$ . La position du point  $M$  est ici définie dans un repère  $(O, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ . On introduit ici la base  $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$  orthonormée directe, associée aux coordonnées sphériques  $(\rho, \theta, \varphi)$  (Figure 2.7).

Comme dans le cas des coordonnées cartésiennes, on note  $H$  et  $m$  les projections orthogonales du point  $M$  sur l'axe  $OZ$  et le plan  $(OX, OY)$  respectivement. Le point  $H$  a pour cote  $z$  qui est la coordonnée de  $M$  suivant l'axe  $OZ$ .

- La distance entre  $O$  et  $M$  est notée  $r$ , soit  $r = \|\overline{OM}\|$ .

- L'angle entre l'axe  $\overline{OZ}$  et le vecteur  $\overline{OM}$  est noté  $\theta$  et est appelé colatitude.
- L'angle entre l'axe  $\overline{OX}$  et  $\overline{Om}$  est noté  $\varphi$  et est appelé longitude ou azimut.

Pour couvrir tout l'espace, il suffit que les coordonnées sphériques décrivent les intervalles suivants :  $r \in [0, +\infty]$  ,  $\theta \in [0, \pi]$  ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$ .



**Figure 2.7:** Représentation du système de coordonnées sphériques dans le repère  $(O, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$  : cas du point  $M$  de coordonnées  $(\rho, \theta, \varphi)$ , et du vecteur position  $\vec{r} = \overline{OM}$ .

#### 2.4.1.1.4.1. Liens entre les coordonnées sphériques et les coordonnées cartésiennes

Les relations entre les coordonnées sphériques et cartésiennes sont données comme suivantes :

$$\begin{cases} x = r \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi \\ y = r \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi , \\ z = r \cdot \cos \theta \end{cases} \quad (2.21)$$

Le vecteur position  $\overline{OM}$  s'écrit comme suit dans la base sphérique :

$$\overline{OM} = r \cdot \vec{u}_r \quad (2.22)$$

Notons ici que les coordonnées  $\theta$  et  $\varphi$  ne figurent pas explicitement sur l'expression de  $\overline{OM}$  mais elles fixent implicitement la direction de  $\vec{u}_r$ .

Il peut être montré à partir de la figure 2.7 que les vecteurs unitaires  $\vec{u}_r$ ,  $\vec{u}_\theta$  et  $\vec{u}_\varphi$  s'exprime dans la base cartésienne par :

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \sin \theta \cos \varphi \vec{u}_x + \sin \theta \sin \varphi \vec{u}_y + \cos \theta \vec{u}_z \\ \vec{u}_\theta = \cos \theta \cos \varphi \vec{u}_x + \cos \theta \sin \varphi \vec{u}_y - \sin \theta \vec{u}_z \\ \vec{u}_\varphi = -\sin \varphi \vec{u}_x + \cos \varphi \vec{u}_y \end{cases} \quad (2.23)$$

de même les vecteurs unitaires  $\vec{u}_x$ ,  $\vec{u}_y$  et  $\vec{u}_z$  s'exprime en termes de  $\vec{u}_r$ ,  $\vec{u}_\theta$  et  $\vec{u}_\varphi$  par :

$$\begin{cases} \vec{u}_x = \sin \theta \cos \varphi \vec{u}_r + \cos \theta \cos \varphi \vec{u}_\theta - \sin \varphi \vec{u}_\varphi \\ \vec{u}_y = \sin \theta \sin \varphi \vec{u}_r + \cos \theta \sin \varphi \vec{u}_\theta + \cos \varphi \vec{u}_\varphi \\ \vec{u}_z = \cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta \end{cases} \quad (2.24)$$

#### 2.4.1.1.4.2. Le vecteur déplacement élémentaire en coordonnées sphériques

La différentiation du vecteur position  $\vec{r}$  donne :

$$d\vec{r} = d(r.\vec{u}_r) = dr.\vec{u}_r + r.d\vec{u}_r \quad (2.25)$$

La différentielle totale de  $\vec{u}_r$  :

$$d\vec{u}_r = \frac{\partial \vec{u}_r}{\partial r} dr + \frac{\partial \vec{u}_r}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \vec{u}_r}{\partial \varphi} d\varphi \quad (2.26)$$

Comme :  $\frac{\partial \vec{u}_r}{\partial r} = 0$ ,  $\frac{\partial \vec{u}_r}{\partial \theta} = \vec{u}_\theta$  et  $\frac{\partial \vec{u}_r}{\partial \varphi} = \sin \theta \vec{u}_\varphi$

$$\text{alors } d\vec{r} = rd\theta \vec{u}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{u}_\varphi \quad (2.27)$$

et par conséquent, le vecteur déplacement élémentaire s'écrit :

$$d\vec{r} = dr\vec{u}_r + rd\theta \vec{u}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{u}_\varphi \quad (2.28)$$

$$\|d\vec{r}\| = \sqrt{(dr)^2 + (rd\theta)^2 + (r \sin \theta d\varphi)^2} \quad (2.29)$$

On définit aussi l'élément de volume en coordonnées sphériques  $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$ .

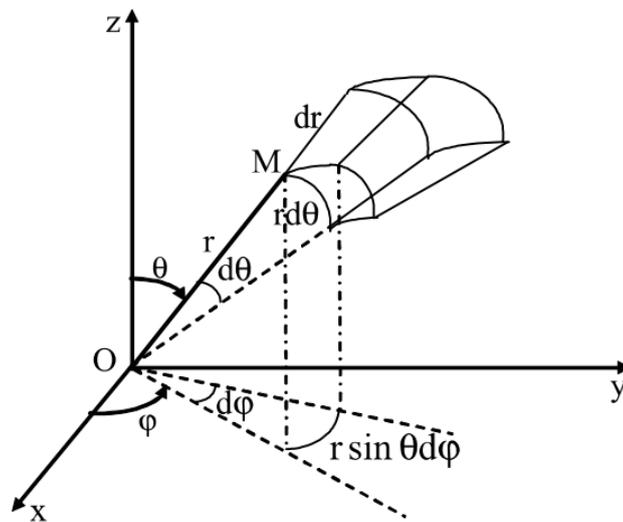


Figure 2.8 : vecteur déplacement élémentaire en coordonnées sphériques.

#### 2.4.1.1.5. Abscisse curviligne et repère local de Frenet

Supposons que l'on connaisse la courbe sur laquelle se déplace le point  $M$ . Dans ce cas, la connaissance de la distance à laquelle se trouve  $M$  d'un point particulier de la courbe suffit à repérer ce point. Pour cela, on commence par orienter la courbe en définissant arbitrairement un sens positif. Ensuite, on choisit un point particulier sur la courbe que nous noterons  $M_0$ . En fin, on définit la distance curviligne  $s(t)$  comme étant la mesure algébrique de la distance d'arc  $\widehat{M_0M}(t)$  le long de la trajectoire. Munis de  $M_0$ , de la courbe et de  $s(t)$ , nous sommes capables de repérer le point  $M$  à chaque instant  $t$ .

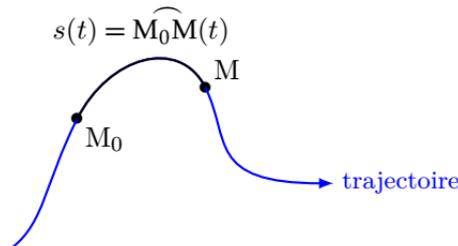


Figure 2.9 : notion d'abscisse curviligne

**Exemple :** Considérant un point matériel  $M$  décrivant une trajectoire d'équation paramétrique cartésienne :

$$\begin{cases} x(t) = R \cos \omega t \\ y(t) = R \sin \omega t \end{cases}, \text{ avec } \omega = \text{cste} \quad (2.30)$$

Le point  $M$  décrit un cercle. Si l'on fixe une origine en  $M_0 = (R, 0)$ , alors l'abscisse curviligne est liée à l'angle  $\theta(t) = \omega t$  :

$$s(t) = R\theta(t) = R\omega t \quad (2.31)$$

La distance algébrique parcourue croît linéairement avec le temps. On dit que le mouvement est uniforme.

Afin d'étudier le mouvement du point  $M$  par rapport au référentiel  $(R)$ , il est intéressant de lui affecter une base mobile  $(\vec{u}_t, \vec{u}_n)$ , dite base de Frenet. Le vecteur  $\vec{u}_t$  est tangent à la trajectoire (dirigé dans le sens de la direction du déplacement du point  $M$ ) et  $\vec{u}_n$  est un vecteur normal à la trajectoire (dirigé suivant le rayon de courbure de la trajectoire et orienté vers l'intérieur de la courbure).

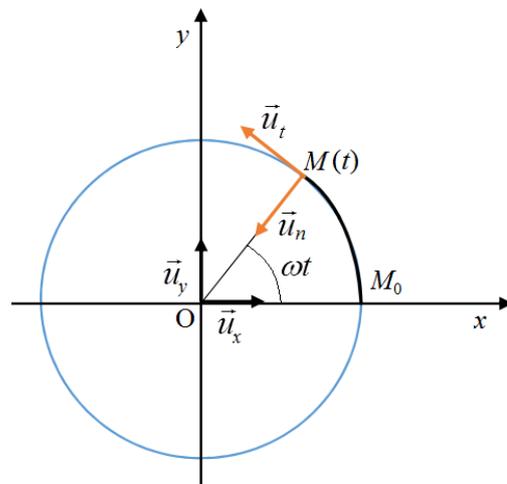
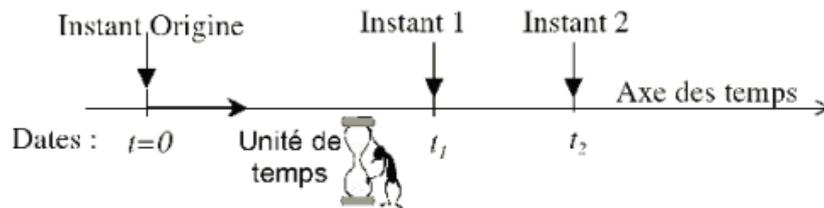


Figure 2.10 : Définition des coordonnées intrinsèques

### 2.5.2.2. Repérage d'un point dans le temps

Afin de pouvoir répondre à la question “ quand ? ” il faut ajouter un repère de temps c'est-à-dire une grandeur qui est la variable de temps. La durée écoulée entre 2 événements ou 2 instants est mesurée au moyen d'une horloge ou un chronomètre. Le repère de temps est constitué d'une origine des temps fixée par l'observateur et d'une durée unitaire fixant une chronologie. À chaque instant, on associe un nombre réel  $t$  appelé date qui correspond à la durée écoulée depuis l'instant origine.



**Figure 2.11 :** Repère de temps : la durée  $\Delta t$  entre les instants 1 et 2 correspond à la différence de leur date  $t_2 - t_1$ .

En mécanique classique ou newtonienne, on postule que le repère de temps est le même pour tous les référentiels et que le temps s'écoule de la même manière dans des référentiels en mouvement les uns par rapport aux autres.

## 2.6. La vitesse du point matériel

### 2.6.2. Définition de la vitesse

La vitesse est une grandeur qui mesure l'évolution de la position par rapport au temps. Cette grandeur est vectorielle car le mouvement d'un point se caractérise par une direction et un sens, attributs des vecteurs d'espace.

### 2.6.3. Vitesse moyenne

La vitesse moyenne représente la distance parcourue par un mobile  $M$  pendant le temps de parcours. Si l'on note  $M_1$ , la position de ce mobile à l'instant  $t_1$  et  $M_2$  sa position à l'instant  $t_2$  (postérieur à  $t_1$ ,  $t_2 = t_1 + dt$ ), alors on peut définir la vitesse moyenne du mobile entre les instants  $t_1$  et  $t_2$  par l'expression suivante :

$$\vec{v}_m = \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{t_2 - t_1} = \frac{\overrightarrow{OM_1}(t) - \overrightarrow{OM_2}(t)}{t_2 - t_1} \quad (2.32)$$

où le point  $O$  est l'origine de l'espace de référence à partir duquel la vitesse moyenne du point  $M$  est déterminée.

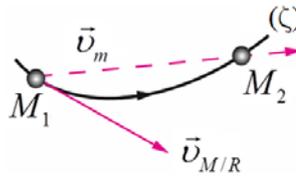


Figure 2.11: Définition de la vitesse moyenne

#### 2.6.4. Vitesse instantanée

La vitesse instantanée de  $M$  à l'instant  $t$  correspond en fait à la limite de la vitesse moyenne lorsque  $t_2$  tend vers  $t_1$  (i.e.,  $\delta t \rightarrow 0$ ). La vitesse instantanée du point  $M$  s'écrit alors :

$$\vec{v}(t) = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\overline{M_1 M_2}}{t_2 - t_1} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{OM}(t + \delta t) - \overline{OM}(t)}{\delta t} = \frac{d\overline{OM}(t)}{dt} \quad (2.33)$$

On peut définir alors la vitesse instantanée  $\vec{v}(t)$  du point matériel  $M$  comme la dérivée par rapport au temps du vecteur position  $\overline{OM}(t)$ . Il en résulte que le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire du point  $M$  et dirigé dans le sens du mouvement du point  $M$  sur le trajet ( $\zeta$ ). La norme du vecteur vitesse, que nous appellerons vitesse, se mesure en  $m.s^{-1}$ .

La vitesse est définie par rapport à un référentiel donné que l'on indique par une lettre en indice. On écrit la vitesse du point  $M$  dans le référentiel ( $R_0$ ) comme suit :

$$\vec{v}_{M/R_0}(t) = \left. \frac{d\overline{OM}}{dt} \right|_{R_0} \quad (2.34)$$

### 2.7. Accélération d'un point matériel

#### 2.8.5. Définition de l'accélération moyenne

Dans la plupart des mouvements, la vitesse varie au cours du temps, soit en norme, soit en direction, soit en sens, soit les trois à la fois. On caractérise cette variation de la vitesse par une grandeur physique qu'on appelle l'accélération du point. Si on considère un point matériel  $M$  passant d'un point  $A$  (atteint à l'instant  $t_1$ , avec une vitesse  $\vec{v}_1$ ) à un point  $B$  (atteint à l'instant  $t_2$ , avec une vitesse  $\vec{v}_2$ ). On définit l'accélération moyenne (notée  $\vec{a}_m$ ) du point  $M$  entre les positions  $A$  et  $B$  :

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{v}_2(t_2) - \vec{v}_1(t_1)}{t_2 - t_1} \quad (2.35)$$

#### 2.8.6. L'accélération instantanée

L'accélération instantanée de  $M$  à l'instant  $t$  correspond en fait à la limite de  $\vec{a}_m$  lorsque  $\Delta t = t_2 - t_1$  tend vers zéro. On peut dire que l'accélération instantanée correspond en fait à la

dérivée première du vecteur vitesse par rapport au temps et donc à la dérivée seconde du vecteur position  $\overline{OM}$  par rapport au temps. On écrit l'accélération instantanée  $\vec{a}(t)$  du point matériel  $M$  dans le référentiel  $(R_0)$  :

$$\vec{a}_{M/R_0}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \overline{OM}}{dt^2} \quad (2.36)$$

Comme la vitesse, l'accélération est définie par rapport à un référentiel donné. L'accélération du point  $M$  dans le référentiel  $(R_0)$  s'écrit donc :

$$\vec{a}_{M/R_0}(t) = \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{R_0} = \left. \frac{d^2 \overline{OM}}{dt^2} \right|_{R_0} \quad (2.37)$$

## 2.9. Expression du vecteur vitesse et vecteur accélération dans les différents systèmes de coordonnées

### 2.9.1. En coordonnées cartésiennes

Considérant un point  $M$  mobile dans un référentiel  $R(O, x, y, z, t)$  avec  $\vec{u}_x$ ,  $\vec{u}_y$  et  $\vec{u}_z$  fixe. Le vecteur position du point  $M$  dans le repère cartésien  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  lié au référentiel  $R$  s'écrit :

$$\overline{OM}(t) = x(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y + z(t)\vec{u}_z \quad (2.38)$$

#### 2.9.1.1. Vitesse en coordonnées cartésiennes

Lorsqu'on dérive le vecteur  $\overline{OM}(t)$  par rapport au temps pour obtenir la vitesse instantanée, on rappelle une règle élémentaire de dérivation d'une somme de produits, en marquant les dérivées avec la notation " primée " :

$$(fg + hk)' = f'.g + f.g' + h'.k + h.k' \quad (2.39)$$

On applique cette même règle en dérivant le vecteur position  $\overline{OM}$  par rapport au temps (avec la notation de Newton, " pointée " ) :

$$\vec{v}_{M/R}(t) = \dot{\overline{OM}} = \dot{x}\vec{u}_x + x\dot{\vec{u}}_x + \dot{y}\vec{u}_y + y\dot{\vec{u}}_y + \dot{z}\vec{u}_z + z\dot{\vec{u}}_z \quad (2.40)$$

Or les vecteurs  $\vec{u}_x$ ,  $\vec{u}_y$  et  $\vec{u}_z$  dans le repère cartésien lié au référentiel  $R$  sont invariants avec le temps ( $\vec{u}_x$ ,  $\vec{u}_y$  et  $\vec{u}_z$  sont constants au cours du temps :  $\dot{\vec{u}}_x = \dot{\vec{u}}_y = \dot{\vec{u}}_z = \vec{0}$ ).

Donc la vitesse s'écrit :

$$\vec{v}_{M/R}(t) = \frac{d\overline{OM}}{dt} = \dot{x}(t)\vec{u}_x + \dot{y}(t)\vec{u}_y + \dot{z}(t)\vec{u}_z \quad (2.41)$$

En notant :  $\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ ,  $\dot{y}(t) = \frac{dy(t)}{dt}$  et  $\dot{z}(t) = \frac{dz(t)}{dt}$

Les composantes de  $\vec{v}_{M/R}$  sont donc  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ,  $\dot{z}$ .

### 2.9.1.2. Vecteur accélération en coordonnées cartésiennes

De même que le vecteur vitesse, on écrit pour le vecteur accélération :

$$\vec{a}_{M/R}(t) = \frac{d\vec{v}_{M/R}(t)}{dt} = \frac{d^2\overline{OM}}{dt^2} \Big|_R = \ddot{x}(t)\vec{u}_x + \ddot{y}(t)\vec{u}_y + \ddot{z}(t)\vec{u}_z \quad (2.42)$$

avec  $\ddot{x}(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$ ,  $\ddot{y}(t) = \frac{d^2y(t)}{dt^2}$  et  $\ddot{z}(t) = \frac{d^2z(t)}{dt^2}$

## 2.9.2. En coordonnées polaires

### 2.9.2.1. Expression de la vitesse

En coordonnées polaires, le vecteur-position s'écrit :

$$\overline{OM}(t) = \rho(t)\vec{u}_\rho(t) \quad (2.43)$$

$\vec{u}_\rho$  et  $\vec{u}_\theta$  sont des vecteurs mobiles et donc variables dans le temps, contrairement aux vecteurs  $\vec{u}_x$ ,  $\vec{u}_y$  et  $\vec{u}_z$  qui eux sont fixes.

On déduit l'expression de la vitesse :

$$\vec{v}_{M/R}(t) = \frac{d\overline{OM}}{dt} \Big|_R = \frac{d\rho(t)}{dt}\vec{u}_\rho(t) + \rho(t)\frac{d\vec{u}_\rho(t)}{dt} \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{u}_\rho(t)}{dt} &= \frac{d}{dt}(\cos\theta \cdot \vec{u}_x + \sin\theta \cdot \vec{u}_y) = \frac{d\theta}{dt}(-\sin\theta) \cdot \vec{u}_x + \frac{d\theta}{dt}(\cos\theta) \cdot \vec{u}_y \\ &= \frac{d\theta}{dt} \underbrace{[-\sin\theta \cdot \vec{u}_x + \cos\theta \cdot \vec{u}_y]}_{=\vec{u}_\theta} = \frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta = \dot{\theta}\vec{u}_\theta \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{u}_\theta(t)}{dt} &= \frac{d}{dt}(-\sin\theta \cdot \vec{u}_x + \cos\theta \cdot \vec{u}_y) = \frac{d\theta}{dt}(-\cos\theta) \cdot \vec{u}_x + \frac{d\theta}{dt}(-\sin\theta) \cdot \vec{u}_y \\ &= -\frac{d\theta}{dt} \underbrace{[\cos\theta \cdot \vec{u}_x + \sin\theta \cdot \vec{u}_y]}_{=-\vec{u}_\rho} = -\dot{\theta}\vec{u}_\rho \end{aligned} \quad (2.46)$$

Ce qui engendre qu'en coordonnées polaires

$$\vec{v}_{M/R}(t) = \frac{d\rho(t)}{dt}\vec{u}_\rho(t) + \rho(t)\frac{d\theta(t)}{dt}\vec{u}_\theta(t) \quad (2.47)$$

en notant  $\frac{d\rho}{dt} = \dot{\rho}$  et  $\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$  (notation de Newton), on peut écrire l'expression de la vitesse en coordonnées polaires :

$$\vec{v}_{M/R}(t) = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta \quad (2.48)$$

Les deux composantes du vecteur vitesse  $\dot{\rho}$  et  $\rho\dot{\theta}$  s'appellent, respectivement, composante radiale (notée  $v_r = \dot{\rho}$ ) et composante transversale (notée  $v_\theta = \rho\dot{\theta}$ ).

La norme du vecteur vitesse est

$$v_{M/R} = \|\vec{v}_{M/R}(t)\| = \sqrt{v_\rho^2 + v_\theta^2} = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho\dot{\theta}^2} \quad (2.49)$$

### 2.9.2.2. Accélération d'un point matériel

Pour l'accélération, on dérive l'expression obtenue pour la vitesse :

$$\begin{aligned} \vec{a}_{M/R}(t) &= \frac{d\vec{v}_{M/R}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta) \\ &= \frac{d\dot{\rho}}{dt}\vec{u}_\rho + \dot{\rho}\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + \frac{d\rho}{dt}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \rho\frac{d\dot{\theta}}{dt}\vec{u}_\theta + \rho\dot{\theta}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} \end{aligned} \quad (2.50)$$

Soit en introduisant les dérivées des vecteurs unitaires par rapport à l'angle de rotation on obtient :

$$\vec{a}_{M/R}(t) = \ddot{\rho}\vec{u}_\rho + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \rho\ddot{\theta}\vec{u}_\theta + \rho\dot{\theta}(-\dot{\theta}\vec{u}_\rho) \quad (2.51)$$

Et finalement

$$\vec{a}_{M/R}(t) = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{u}_\theta \quad (2.52)$$

En notant  $\ddot{\rho} = \frac{d^2\rho}{dt^2}$  et  $\ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$

Les deux composantes du vecteur accélération :  $a_r = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2$  et  $a_\theta = 2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}$ .

La norme du vecteur accélération est

$$a_{M/R} = \|\vec{a}_{M/R}(t)\| = \sqrt{a_\rho^2 + a_\theta^2} = \sqrt{(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)^2 + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})^2} \quad (2.53)$$

### 2.9.3. En coordonnées cylindriques

#### 2.9.3.1. Expression de la vitesse

Pour écrire le vecteur vitesse en coordonnées cylindriques, il suffit de rajouter la composante suivant l'axe  $Oz$  ( $\dot{z}$ ) au vecteur vitesse en coordonnées polaires.

Le vecteur position dans le système de coordonnées cylindriques s'écrit :

$$\overline{OM}(t) = \rho(t)\vec{u}_\rho + z(t)\vec{u}_z \quad (2.54)$$

Le vecteur vitesse :

$$\vec{v}_{M/R}(t) = \left. \frac{d\overline{OM}}{dt} \right|_R = \frac{d\rho}{dt}\vec{u}_\rho + \rho \frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec{u}_z + z \frac{d\vec{u}_z}{dt}, \quad (2.55)$$

Nous avons  $d\vec{u}_z/dt = \vec{0}$  ( $\vec{u}_z$  est fixe)

$$\vec{v}_{M/R}(t) = \frac{d\rho}{dt}\vec{u}_\rho + \rho \frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec{u}_z = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z \quad (2.56)$$

La norme du vecteur vitesse est

$$v_{M/R} = \|\vec{v}_{M/R}(t)\| = \sqrt{v_\rho^2 + v_\theta^2 + v_z^2} = \sqrt{(\dot{\rho})^2 + (\rho\dot{\theta})^2 + (\dot{z})^2} \quad (2.57)$$

### 2.9.3.2. Expression de l'accélération

L'expression du vecteur accélération en coordonnées cylindriques est obtenue en ajoutant la composante  $\ddot{z}$  (suivant  $\vec{u}_z$ ) à l'expression du vecteur accélération en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} \vec{a}_{M/R}(t) &= \frac{d\vec{v}_{M/R}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z) \\ &= \underbrace{(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)}_{a_\rho}\vec{u}_\rho + \underbrace{(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})}_{a_\theta}\vec{u}_\theta + \underbrace{\ddot{z}}_{a_z}\vec{u}_z \end{aligned} \quad (2.58)$$

La norme du vecteur accélération est

$$a_{M/R} = \|\vec{a}_{M/R}\| = \sqrt{a_\rho^2 + a_\theta^2 + a_z^2} = \sqrt{(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)^2 + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})^2 + \ddot{z}^2} \quad (2.59)$$

### 2.9.4. En coordonnées sphériques

#### 2.9.4.1. Expression vecteur vitesse

Partant du vecteur de position :

$$\begin{cases} \overline{OM}(t) = r(t)\vec{u}_r \\ \vec{u}_r = \sin\theta \cos\varphi \vec{u}_x + \sin\theta \sin\varphi \vec{u}_y + \cos\theta \vec{u}_z \end{cases}; \quad (2.60)$$

Le vecteur vitesse :

$$\vec{v}_{M/R}(t) = \left. \frac{d\overline{OM}(t)}{dt} \right|_R = \frac{d}{dt}r\vec{u}_r = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r \frac{d\vec{u}_r}{dt} \quad (2.61)$$

Les vecteurs unitaires  $\vec{u}_\rho$ ,  $\vec{u}_\theta$  et  $\vec{u}_\varphi$  se déplacent avec le point  $M$ , donc ils dépendent du temps, et donc les dérivées de ces vecteurs par rapport au temps ne sont pas nulles.

$$\begin{aligned}
 \frac{d\vec{u}_r}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \sin \theta \cos \varphi \vec{u}_x + \sin \theta \sin \varphi \vec{u}_y + \cos \theta \vec{u}_z \right) \\
 &= \frac{d \sin \theta}{dt} \cos \varphi \vec{u}_x + \sin \theta \frac{d \cos \varphi}{dt} \vec{u}_x + \sin \theta \cos \varphi \frac{d\vec{u}_x}{dt} + \frac{d \sin \theta}{dt} \sin \varphi \vec{u}_y \\
 &\quad + \sin \theta \frac{d \sin \varphi}{dt} \vec{u}_y + \sin \theta \sin \varphi \frac{d\vec{u}_y}{dt} + \frac{d \cos \theta}{dt} \vec{u}_z + \cos \theta \frac{d\vec{u}_z}{dt} \\
 &= \frac{d\theta}{dt} \cos \theta \cos \varphi \vec{u}_x + \sin \theta \frac{d\varphi}{dt} (-\sin \varphi) \vec{u}_x + \frac{d\theta}{dt} \cos \theta \sin \varphi \vec{u}_y \\
 &\quad + \sin \theta \frac{d\varphi}{dt} \cos \varphi \vec{u}_y + \frac{d\theta}{dt} (-\sin \theta) \vec{u}_z \\
 &= \frac{d\theta}{dt} \underbrace{\left( \cos \theta \cos \varphi \vec{u}_x + \cos \theta \sin \varphi \vec{u}_y - \sin \theta \vec{u}_z \right)}_{\vec{u}_\theta} + \frac{d\varphi}{dt} \sin \theta \underbrace{\left( -\sin \varphi \vec{u}_x + \cos \varphi \vec{u}_y \right)}_{\vec{u}_\varphi} \\
 &= \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta + \frac{d\varphi}{dt} \sin \theta \vec{u}_\varphi \\
 &= \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{\varphi} \sin \theta \vec{u}_\varphi
 \end{aligned} \tag{2.62}$$

En remplaçant  $d\vec{u}_r/dt$  dans l'expression de  $\vec{v}_{M/R}(t)$  on obtient :

$$\vec{v}_{M/R}(t) = \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta + r \frac{d\varphi}{dt} \sin \theta \vec{u}_\varphi = \underbrace{\dot{r}}_{v_r} \vec{u}_r + \underbrace{r\dot{\theta}}_{v_\theta} \vec{u}_\theta + \underbrace{r\dot{\varphi} \sin \theta}_{v_\varphi} \vec{u}_\varphi \tag{2.63}$$

Le module du vecteur vitesse :

$$v_{M/R}(t) = \sqrt{(\dot{r})^2 + (r\dot{\theta})^2 + (r\dot{\varphi} \sin \theta)^2} \tag{2.64}$$

#### 2.9.4.2. Expression de l'accélération

En coordonnées sphériques le vecteur accélération s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \vec{a}_{M/R}(t) &= \frac{d\vec{v}_{M/R}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta + r \frac{d\varphi}{dt} \sin \theta \vec{u}_\varphi \right) \\
 &= \frac{d^2 r}{dt^2} \vec{u}_r + \frac{dr}{dt} \frac{d\vec{u}_r}{dt} + \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \vec{u}_\theta + r \frac{d\theta}{dt} \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} + \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \sin \theta \vec{u}_\varphi \\
 &\quad + r \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \sin \theta \vec{u}_\varphi + r \frac{d\varphi}{dt} \frac{d \sin \theta}{dt} \vec{u}_\varphi + r \frac{d\varphi}{dt} \sin \theta \frac{d\vec{u}_\varphi}{dt}
 \end{aligned} \tag{2.65}$$

Calculons  $d\vec{u}_\theta/dt$  et  $d\vec{u}_\varphi/dt$  :

$$\begin{aligned}
 \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \cos \theta \cos \varphi \vec{u}_x + \cos \theta \sin \varphi \vec{u}_y - \sin \theta \vec{u}_z \right) \\
 &= \frac{d \cos \theta}{dt} \cos \varphi \vec{u}_x + \cos \theta \frac{d \cos \varphi}{dt} \vec{u}_x + \cos \theta \cos \varphi \frac{d \vec{u}_x}{dt} + \frac{d \cos \theta}{dt} \sin \varphi \vec{u}_y \\
 &\quad + \cos \theta \frac{d \sin \varphi}{dt} \vec{u}_y + \cos \theta \sin \varphi \frac{d \vec{u}_y}{dt} - \frac{d \sin \theta}{dt} \vec{u}_z - \sin \theta \frac{d \vec{u}_z}{dt} \\
 &= \frac{d \theta}{dt} (-\sin \theta) \cos \varphi \vec{u}_x + \cos \theta \frac{d \varphi}{dt} (-\sin \varphi) \vec{u}_x + \frac{d \theta}{dt} (-\sin \theta) \sin \varphi \vec{u}_y \\
 &\quad + \cos \theta \frac{d \varphi}{dt} \cos \varphi \vec{u}_y - \frac{d \theta}{dt} \sin \theta \vec{u}_z \\
 &= -\frac{d \theta}{dt} \underbrace{(\sin \theta \cos \varphi \vec{u}_x + \cos \theta \sin \varphi \vec{u}_y + \sin \theta \vec{u}_z)}_{\vec{u}_r} + \frac{d \varphi}{dt} \cos \theta \underbrace{(-\sin \varphi \vec{u}_x + \cos \varphi \vec{u}_y)}_{\vec{u}_\varphi} \\
 &= -\frac{d \theta}{dt} \vec{u}_r + \frac{d \varphi}{dt} \cos \theta \vec{u}_\varphi \\
 &= -\dot{\theta} \vec{u}_r + \dot{\varphi} \cos \theta \vec{u}_\varphi
 \end{aligned} \tag{2.66}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d\vec{u}_\varphi}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( -\sin \varphi \vec{u}_x + \cos \varphi \vec{u}_y \right) \\
 &= \frac{d(-\sin \varphi)}{dt} \vec{u}_x + (-\sin \varphi) \frac{d \vec{u}_x}{dt} + \frac{d \cos \varphi}{dt} \vec{u}_y + \cos \varphi \frac{d \vec{u}_y}{dt} \\
 &= \frac{d \varphi}{dt} (-\cos \varphi) \vec{u}_x + \frac{d \varphi}{dt} (-\sin \varphi) \vec{u}_y \\
 &= -\dot{\varphi} (\cos \varphi \vec{u}_x + \sin \varphi \vec{u}_y) \\
 &= -\dot{\varphi} (\sin \theta \vec{u}_r + \cos \theta \vec{u}_\theta)
 \end{aligned} \tag{2.67}$$

En remplaçant les expressions obtenues pour  $d\vec{u}_\theta/dt$  et  $d\vec{u}_\varphi/dt$  dans l'expression précédente de  $\vec{a}_{M/R}(t)$ , on trouve :

$$\begin{aligned}
 \vec{a}_{M/R}(t) &= \ddot{r} \vec{u}_r + \dot{r} (\dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{\varphi} \sin \theta \vec{u}_\varphi) + \dot{r} \ddot{\theta} \vec{u}_\theta + r \ddot{\theta} \vec{u}_\theta + r \dot{\theta} (-\dot{\theta} \vec{u}_r + \dot{\varphi} \cos \theta \vec{u}_\varphi) + \dot{r} \dot{\varphi} \sin \theta \vec{u}_\varphi \\
 &\quad + r \dot{\varphi} \sin \theta \vec{u}_\varphi + r \dot{\varphi} \cos \theta \vec{u}_\varphi + r \dot{\varphi} \sin \theta (-\dot{\varphi} (\sin \theta \vec{u}_r + \cos \theta \vec{u}_\theta)) \\
 &= \ddot{r} \vec{u}_r + \dot{r} \ddot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{r} \dot{\varphi} \sin \theta \vec{u}_\varphi + \dot{r} \dot{\theta} \vec{u}_\theta + r \ddot{\theta} \vec{u}_\theta - r \dot{\theta}^2 \vec{u}_r + r \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \theta \vec{u}_\varphi + \dot{r} \dot{\varphi} \sin \theta \vec{u}_\varphi \\
 &\quad + r \dot{\varphi} \sin \theta \vec{u}_\varphi + r \dot{\varphi} \cos \theta \vec{u}_\varphi - r \dot{\varphi}^2 \sin \theta (\sin \theta \vec{u}_r + \cos \theta \vec{u}_\theta)
 \end{aligned} \tag{2.68}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
 \vec{a}_{M/R}(t) &= \underbrace{(\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta)}_{a_r} \vec{u}_r + \underbrace{(r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta} - r \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta)}_{a_\theta} \vec{u}_\theta \\
 &\quad + \underbrace{(r \sin \theta \dot{\varphi} + 2 \dot{r} \dot{\varphi} \sin \theta + 2 r \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \theta)}_{a_\varphi} \vec{u}_\varphi
 \end{aligned} \tag{2.69}$$

### 2.9.5. Expression de la vitesse et l'accélération dans la base de Frenet (coordonnées intrinsèques)

#### 2.9.5.1. Expression de la vitesse

La vitesse du point  $M$  en coordonnées intrinsèques, par rapport au référentiel ( $R$ ), s'écrit :

$$\vec{v}_{M/R}(t) = \left. \frac{ds(t)}{dt} \right|_R \vec{u}_t, \quad \text{soit } v_{M/R}(t) = \left. \frac{ds(t)}{dt} \right|_R \quad (2.70)$$

#### 2.9.5.2. Expression de l'accélération

Lorsque le point  $M$  est repéré à partir de son abscisse curviligne  $s(t)$ , l'accélération du point  $M$  dans la base de Frenet par rapport au référentiel ( $R$ ) s'écrit :

$$\vec{a}_{M/R} = \left. \frac{d^2s(t)}{dt^2} \right|_R = \left. \frac{d(\dot{s}u_t)}{dt} \right|_R = \left. \frac{d\dot{s}}{dt} \right|_R \vec{u}_t + \dot{s} \left. \frac{d\vec{u}_t}{dt} \right|_R \quad (2.71)$$

Sur une portion de trajectoire ( $\zeta$ ) suffisamment petite, la trajectoire du point  $M$  peut être assimilée à un cercle de centre,  $C$  et de rayon de courbure  $R$  (cercle osculateur). Le vecteur  $\vec{u}_t$  lié au point  $M$  est en rotation autour de l'axe fixe  $Oz$  (axe normal au plan de la trajectoire, passant par  $C$  et dirigé tel que  $(\vec{u}_t, \vec{u}_n, \vec{u}_z)$  soit une base orthonormée directe) avec une vitesse angulaire

$$\vec{\omega} = \frac{d\alpha(t)}{dt} \vec{u}_z = \dot{\alpha} \vec{u}_z \quad (2.72)$$

La dérivée de  $\vec{u}_t$  par rapport au temps est donc :

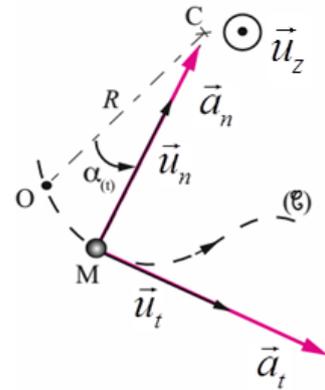
$$\left. \frac{d\vec{u}_t}{dt} \right|_R = \vec{\omega}(t) \wedge \vec{u}_t = \omega(t) \vec{u}_z \wedge \vec{u}_t = \dot{\alpha} \vec{u}_n \quad (2.73)$$

On peut alors écrire :

$$\vec{a}_{M/R} = \left. \frac{d^2s(t)}{dt^2} \right|_R = \ddot{s} \vec{u}_t + \dot{s} \dot{\alpha} \vec{u}_n \quad \text{or} \quad \begin{cases} \vec{v}_{M/R} = \dot{s} \vec{u}_t \\ s(t) = R\alpha(t) \end{cases} \quad (2.74)$$

$$\vec{a}_{M/R} = \ddot{s} \vec{u}_t + \dot{s}^2 \frac{\vec{u}_n}{R} = \underbrace{\frac{dv_{M/R}}{dt}}_{a_t} \vec{u}_t + \underbrace{\frac{(v_{M/R})^2}{R}}_{a_n} \vec{u}_n = a_t \cdot \vec{u}_t + a_n \cdot \vec{u}_n \quad (2.75)$$

$a_t$  et  $a_n$  sont respectivement l'accélération tangentielle et l'accélération normale,  $v_{M/R}$  la norme de  $\vec{v}_{M/R}$  et  $R$  le rayon de courbure de la trajectoire.



## 2.10. Exemples de mouvement

### 2.10.1. Mouvements rectilignes

La trajectoire est une portion de droite.  $\overline{OM}(t) = x(t)\vec{u}_x$ , il arrive donc :

$$\vec{v}_{M/R}(t) = \dot{x} \cdot \vec{u}_x \text{ et } \vec{a}_{M/R} = \ddot{x} \cdot \vec{u}_x \quad (2.76)$$

#### 2.10.1.1. Le mouvement rectiligne uniforme

Si le point matériel se déplace à vecteur vitesse constant  $\vec{v}_{M/R} = \overline{cste}$  et par conséquent l'accélération est nulle ( $\vec{a}_{M/R} = \vec{0}$ ).

Le vecteur vitesse étant constant, le mouvement est rectiligne car la vitesse est tangente à la trajectoire.

$$\vec{a}_{M/R} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_{M/R} = \dot{x}\vec{u}_x = C\vec{u}_x \Rightarrow \dot{x} = C \quad (2.77)$$

Ce qui conduit à l'équation horaire suivante :

$$x(t) = Ct + x_0 \quad (2.78)$$

#### 2.10.1.2. Le mouvement uniformément varié

Un mouvement est dit rectiligne uniformément varié si le vecteur accélération est constant ( $\vec{a}_{M/R} = \overline{cste}$ ) et la trajectoire est rectiligne.

$$\overline{OM}(t) = x(t)\vec{u}_x \Rightarrow \vec{v}_{M/R}(t) = \dot{x}(t)\vec{u}_x \text{ et } \vec{a}_{M/R} = \ddot{x}\vec{u}_x \quad (2.79)$$

Par intégration de cette équation nous obtenons la vitesse du point  $M$  :

$$a = \frac{dv_{M/R}(t)}{dt} \Rightarrow dv_{M/R} = a \cdot dt \Rightarrow \int_{v_{M/R}(0)}^{v_{M/R}(t)} dv_{M/R} = \int_0^t a \cdot dt \Rightarrow v_{M/R}(t) - v_{M/R}(0) = a(t-0) \quad (2.80)$$

$$v_{M/R}(t) = at + v_{M/R}(0) = at + v_0, \quad v_0 \text{ la vitesse initiale} \quad (2.81)$$

Ainsi nous avons :

$$v_{M/R}(t) = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v_{M/R}(t)dt \Rightarrow \int_{x(0)}^{x(t)} dx = \int_0^t (at + v_0) dt \quad (2.82)$$

On obtient l'équation horaire du mouvement :

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0, \quad x_0 = x(0) \quad (2.83)$$

**Remarque**

L'étude du signe du produit de la vitesse par l'accélération nous permettra de préciser si le mouvement est *accélééré* ( $a.v > 0$ ) ou *retardé* (décélééré) ( $a.v < 0$ ).

De (2.81) et (2.83) on déduit :

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0) \quad (2.84)$$

**2.10.2. Mouvement circulaire**

Considérons un point  $M$  décrivant un cercle de rayon  $R$  et notons  $\theta$  l'angle formé par l'axe ( $Ox$ ) et le rayon vecteur  $\overline{OM}$ .

**2.10.2.1. Mouvement circulaire uniforme**

On dit que le mouvement du point  $M$  est circulaire uniforme quand  $\theta$  augmente linéairement avec le temps. La vitesse angulaire de rotation  $\omega$  est constante :

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = cste \quad (2.85)$$

ce qui conduit par intégration à :

$$d\theta = \omega dt \Rightarrow \int_{\theta(0)=\theta_0}^{\theta(t)} d\theta = \omega \int_0^t dt \Rightarrow \theta(t) = \omega t + \theta_0 \quad (2.86)$$

Ici, le cercle est décrit à vitesse angulaire constante ce qui est caractéristique du mouvement circulaire uniforme. Ainsi le point  $M$  fait un tour au bout d'une durée constante  $T$  appelée *période*

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (2.87)$$

et le nombre de tours effectués en 1 seconde s'appelle la *fréquence*  $\nu$  et se mesure en hertz en hommage à Heinrich Hertz (Symbole Hz) :

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (2.88)$$

La vitesse est constante :

$$v_{M/R} = R\omega\vec{u}_t \quad (2.89)$$


---

L'accélération est centripète :

$$\vec{v}_{M/R} = R\omega^2 \vec{u}_n = \frac{(v_{M/R})^2}{R} \vec{u}_n \quad (2.90)$$

### 2.10.2.2. Mouvement circulaire non uniforme

Supposons maintenant que  $\theta(t)$  varie de façon quelconque. Par définition de l'angle exprimé en radian, l'abscisse curviligne s'écrit  $s(t) = \widehat{M_0M}(t) = R\theta(t)$  d'où la vitesse :

$$\vec{v}_{M/R} = \frac{ds}{dt} \vec{u}_t = R\omega(t) \vec{u}_t, \quad \text{avec } \omega(t) = \dot{\theta}(t) \quad (2.91)$$

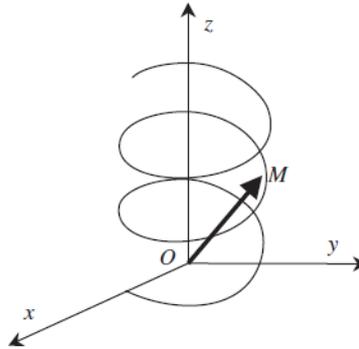
$\omega$  désigne la vitesse angulaire instantanée.

Le vecteur accélération s'écrit grâce à la formule de Frenet

$$\vec{a}_{M/R} = R \frac{d\omega}{dt} \vec{u}_t + R\omega \vec{u}_n \quad (2.92)$$

### 2.10.3. Mouvement hélicoïdal

Le mouvement hélicoïdal est la combinaison d'un mouvement de translation rectiligne uniforme selon l'axe  $Oz$  et d'un mouvement circulaire uniforme dans le plan  $xOy$ .



**Figure 2.10 :** Illustration d'un mouvement hélicoïdal.

Les équations horaires du mouvement selon les trois axes  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  du référentiel cartésien sont :

$$\overrightarrow{OM} \begin{cases} x(t) = R \cos(\omega t) \\ y(t) = R \sin(\omega t) \\ z(t) = v_0 t \end{cases} ; \quad (2.93)$$

Il est facile de déterminer par dérivations successives les composantes du vecteur vitesse et du vecteur accélération du point dans cette base :

$$\vec{v}_{M/R} = \begin{cases} -R\omega \sin(\omega t) \\ R\omega \cos(\omega t) \\ v_0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{a}_{M/R} = \begin{cases} -R\omega^2 \cos(\omega t) \\ -R\omega^2 \sin(\omega t) \\ 0 \end{cases} \quad (2.94),(2.95)$$

De même, la vitesse et de l'accélération dans la base cylindrique ( $\omega = 0$ ) sont données par :

$$\vec{v}_{M/R} = \begin{cases} 0 \\ R\omega \\ v_0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{a}_{M/R} = \begin{cases} -R\omega^2 \\ 0 \\ 0 \end{cases} \quad (2.96),(2.97)$$

#### 2.10.4. Mouvement parabolique

Supposons que le vecteur accélération soit un vecteur constant et qu'à l'instant  $t = 0$  le vecteur vitesse  $\vec{v}_0$  soit donné (Figure 2.11).

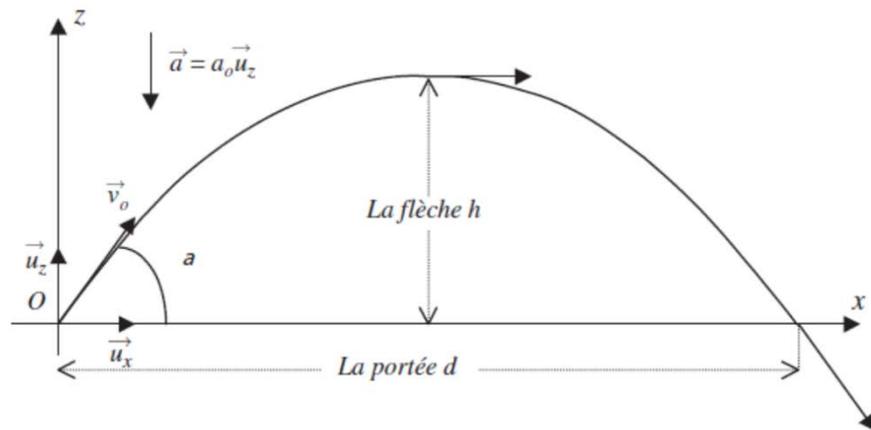


Figure 2.11 : Chute parabolique.

Le choix du repère étant libre, nous pouvons décider de le définir à partir des données du problème. Nous faisons le choix suivant :

- Origine du repère : position du point à  $t = 0$  ;
- Axe  $Oz$  suivant le vecteur accélération, soit  $\vec{a} = a\vec{u}_z$  ;
- Axe  $Ox$  perpendiculaire à l'axe  $z$  et dans le plan contenant  $\vec{a}$  et  $\vec{v}$ . On aura alors :

$$\vec{v}_0 = v_{0x}\vec{u}_x + v_{0z}\vec{u}_z$$

- Axe  $Oy$  défini de sorte que  $\vec{u}_x$ ,  $\vec{u}_y$  et  $\vec{u}_z$  forment une base orthonormée directe. On obtient, par intégrations successives et en tenant compte des conditions initiales :

$$\vec{a}_{M/R} \begin{cases} 0 \\ 0 \\ a_0 \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_{M/R} \begin{cases} v_{0x} \\ 0 \\ a_0 t + v_{0z} \end{cases} \text{ soit } \overrightarrow{OM} \begin{cases} x(t) = v_{0x} t + x_0 \\ y(t) = y_0 = 0 \\ z(t) = (1/2) a_0 t^2 + v_{0z} t + z_0 \end{cases} \quad (2.98),(2.99),(2.100)$$

Le mouvement projeté suivant l'axe des  $x$  est un mouvement uniforme de vitesse  $v_{0x}$ . Le mouvement projeté suivant l'axe des  $z$  est uniformément varié, d'accélération constante  $a_0$ .

En éliminant la variable  $t$  entre les deux équations horaires du mouvement, on obtient l'équation de la trajectoire :

$$t = \frac{x}{v_{0x}} \text{ et } z = \frac{1}{2} a_0 \frac{x^2}{v_{0x}^2} + v_{0z} \frac{x}{v_{0x}} \quad (2.101)$$

Si  $\alpha$  est l'angle que fait le vecteur vitesse  $\vec{v}_0$  avec l'axe  $Ox$  et  $v_0$  la norme de ce vecteur vitesse, on peut encore écrire :

$$z = \frac{1}{2} a_0 \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + x \tan \alpha \quad (2.102)$$

Par conséquent, la trajectoire est une portion de parabole.

La *portée*  $d$  correspond à la distance maximale que peut atteindre le point lorsque qu'il revient à l'ordonnée  $z = 0$ .

$$z = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ et } x = d = \frac{v_0^2}{a_0} 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{v_0^2}{a_0} \sin 2\alpha \quad (2.103)$$

La *flèche*  $h$  correspond à l'altitude maximale que peut atteindre le point mobile. Elle peut être obtenue de différentes façons. On peut rechercher, par exemple, l'ordonnée correspondant à l'abscisse  $x = d/2$ . On obtient alors :

$$h = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha \quad (2.104)$$

### 2.11. Changement de référentiel : Mouvement relatif

Reprenons l'exemple précédent du passager à bord d'un train en mouvement (section (2.2)). Le passager peut être immobile dans le train : sa vitesse par rapport au train est nulle mais par rapport à la Terre sa vitesse est non nulle. On voit que selon le référentiel d'étude la vitesse ne s'exprime pas de la même manière. Il donc nécessaire de préciser par rapport à quel référentiel on exprime les vecteurs de base de la cinématique. Le référentiel considéré comme fixe (ici celui lié à la Terre) est appelé *référentiel absolu* (noté  $R_a$ ) tandis que le référentiel en mouvement par rapport au référentiel fixe (ici le référentiel lié au train) est appelé *référentiel relatif* (noté  $R_r$ ). Le passager peut se déplacer vers le wagon restaurant du train : il est alors en

mouvement par rapport au train qui lui-même est en mouvement par rapport à la Terre. Le mouvement du passager dans le référentiel absolu s'appelle le *mouvement absolu*, celui du passager dans le référentiel relatif est appelé *mouvement relatif*, et le mouvement du référentiel mobile par rapport au référentiel fixe est appelé *mouvement d'entraînement*.

Pour trouver les caractéristiques du mouvement du passager par rapport à la Terre, il faut combiner les caractéristiques du mouvement du passager dans le repère mobile lié au train avec celles du mouvement du train dans le repère fixe lié à la Terre. Le mouvement du passager est donc un mouvement composé, qui résulte de la composition de son mouvement dans le train et du mouvement du train par rapport à la Terre. On parle alors de composition des mouvements.

### 2.11.1. Loi de compositions des vitesses

Soit le référentiel relatif  $R_r$  en mouvement par rapport au référentiel absolu  $R_a$  considéré comme fixe. Le référentiel  $R_a$  est caractérisé par son repère cartésien de base  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  de coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$ . Le référentiel  $R_r$  (le référentiel mobile) est caractérisé par son repère cartésien de base  $(O', \vec{u}'_x, \vec{u}'_y, \vec{u}'_z)$  de coordonnées cartésiennes  $(x', y', z')$ .

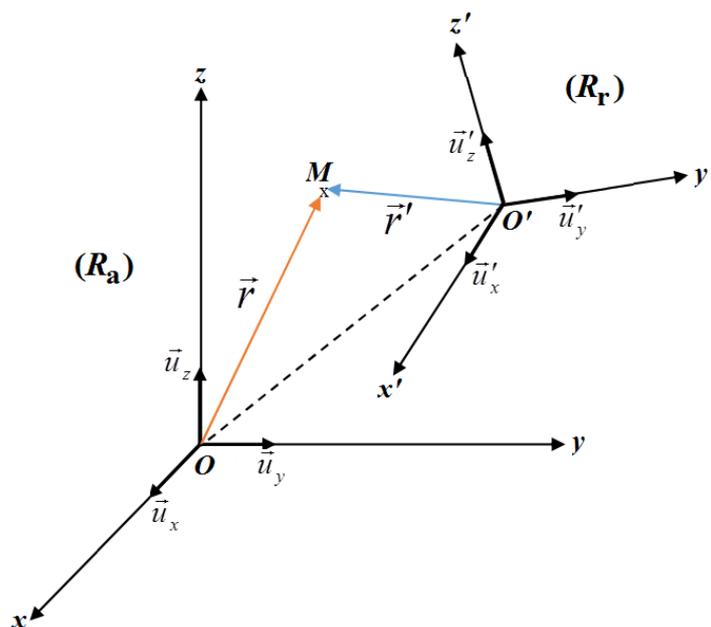


Figure 2.12 : référentiel absolue (fixe)  $(R_a)$  et référentiel relatif (mobile)  $(R_r)$ .

Dans le référentiel absolue  $(R_a)$  la position du point  $M$  est repérée par :

$$\vec{r} = \overline{OM} = x \cdot \vec{u}_x + y \cdot \vec{u}_y + z \cdot \vec{u}_z \quad (2.105)$$

Sa position dans le référentiel relatif  $R_r$  est donnée par :

$$\vec{r}' = \overline{O'M} = x' \cdot \vec{u}'_x + y' \cdot \vec{u}'_y + z' \cdot \vec{u}'_z \quad (2.106)$$

Pour passer d'un référentiel à un autre, il est très utile d'utiliser la relation de Chasles pour décomposer le vecteur position de  $M$  dans  $(R_a)$  en passant par l'origine du référentiel  $(R_r)$ . Ainsi, dans le cas présent, on peut écrire la vecteur position  $\overline{OM}$  comme suit :

$$\overline{OM} = \overline{OO'} + \overline{O'M} \text{ soit } \overline{OM} = \overline{OO'} + \vec{r}' \quad (2.107)$$

La vitesse du point  $M$  dans le référentiel absolu appelée vitesse absolue (notée  $\vec{v}_a$ ). Elle s'écrit comme suit :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_{M/R_a} = \left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_{R_a} = \left. \frac{d\overline{OM}}{dt} \right|_{R_a} \quad (2.108)$$

$$\vec{v}_a = \dot{x} \cdot \vec{u}_x + \dot{y} \cdot \vec{u}_y + \dot{z} \cdot \vec{u}_z \quad (2.109)$$

Les vecteurs  $\vec{u}_x$ ,  $\vec{u}_y$ ,  $\vec{u}_z$  de la base associée à  $(R_a)$  sont considérés comme fixes avec le temps.

La vitesse du point  $M$  dans le référentiel relatif appelée vitesse relative (notée  $\vec{v}_r$ ). Elle s'écrit comme suit :

$$\vec{v}_r = \vec{v}_{M/R_r} = \left. \frac{d\vec{r}'}{dt} \right|_{R_r} = \left. \frac{d\overline{O'M}}{dt} \right|_{R_r} \quad (2.110)$$

$$\vec{v}_r = \dot{x}' \cdot \vec{u}'_x + \dot{y}' \cdot \vec{u}'_y + \dot{z}' \cdot \vec{u}'_z \quad (2.111)$$

Les vecteurs  $\vec{u}'_x$ ,  $\vec{u}'_y$ ,  $\vec{u}'_z$  de la base associée à  $(R_r)$  sont aussi considérés comme fixes avec le temps.

Pour trouver la relation entre les vitesses absolue et relative, il faut partir de la relation  $\overline{OM} = \overline{OO'} + \vec{r}'$ . On dérive cette dernière par rapport au temps, en se plaçant dans le référentiel absolu  $(R_a)$  :

$$\vec{v}_{M/R_a} = \left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_{R_a} = \left. \frac{d\overline{OO'}}{dt} \right|_{R_a} + \left. \frac{d\vec{r}'}{dt} \right|_{R_a} \quad (2.112)$$

Or, comme  $\vec{r}' = x' \cdot \vec{u}'_x + y' \cdot \vec{u}'_y + z' \cdot \vec{u}'_z$ , on doit écrire tous les termes de la dérivée par rapport au temps dans le référentiel absolu  $(R_a)$ , en considérant les vecteurs  $\vec{u}'_x$ ,  $\vec{u}'_y$ ,  $\vec{u}'_z$  non fixes avec le temps dans  $(R_a)$ .

$$\left. \frac{d\vec{r}'}{dt} \right|_{R_a} = \dot{x}' \cdot \vec{u}'_x + x' \cdot \dot{\vec{u}}'_x + \dot{y}' \cdot \vec{u}'_y + y' \cdot \dot{\vec{u}}'_y + \dot{z}' \cdot \vec{u}'_z + z' \cdot \dot{\vec{u}}'_z \quad (2.113)$$

On peut alors regrouper les termes comme suit :

$$\left. \frac{d\vec{r}'}{dt} \right|_{R_a} = \underbrace{x' \cdot \dot{\vec{u}}'_x + y' \cdot \dot{\vec{u}}'_y + z' \cdot \dot{\vec{u}}'_z}_{\vec{v}_r} + x' \cdot \dot{\vec{u}}'_x + y' \cdot \dot{\vec{u}}'_y + z' \cdot \dot{\vec{u}}'_z \quad (2.114)$$

$$\left. \frac{d\vec{r}'}{dt} \right|_{R_a} = \vec{v}_r + x' \cdot \dot{\vec{u}}'_x + y' \cdot \dot{\vec{u}}'_y + z' \cdot \dot{\vec{u}}'_z \quad (2.115)$$

On peut donc compléter la relation initiale :

$$\left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_{R_a} = \left. \frac{d\overline{OO'}}{dt} \right|_{R_a} + \left. \frac{d\vec{r}'}{dt} \right|_{R_a} = \left. \frac{d\overline{OO'}}{dt} \right|_{R_a} + \vec{v}_r + x' \cdot \dot{\vec{u}}'_x + y' \cdot \dot{\vec{u}}'_y + z' \cdot \dot{\vec{u}}'_z \quad (2.116)$$

Si le point  $M$  est immobile dans  $(R_r)$ ,  $\vec{v}_r = \vec{0}$ . Dans l'expression de  $\vec{v}_a$ , il reste donc les termes suivants :

$$\left. \frac{d\overline{OO'}}{dt} \right|_{R_a} + x' \cdot \dot{\vec{u}}'_x + y' \cdot \dot{\vec{u}}'_y + z' \cdot \dot{\vec{u}}'_z \quad (2.117)$$

Le premier terme correspond à la vitesse du point  $O'$  (origine du référentiel  $(R_r)$ ) dans le référentiel absolu, tandis que les trois autres termes décrivent les variations avec le temps des vecteurs  $\vec{u}'_x$ ,  $\vec{u}'_y$ ,  $\vec{u}'_z$  (vecteurs de la base du référentiel relatif), dans le référentiel absolu. L'ensemble de ces quatre termes décrivent donc le mouvement du référentiel relatif par rapport au référentiel absolu : ils définissent ce qu'on appelle la vitesse d'entraînement du référentiel relatif par rapport au référentiel absolu, notée  $\vec{v}_e$ . On peut alors écrire :

$$\vec{v}_e = \left. \frac{d\overline{OO'}}{dt} \right|_{R_a} + x' \cdot \dot{\vec{u}}'_x + y' \cdot \dot{\vec{u}}'_y + z' \cdot \dot{\vec{u}}'_z \quad (2.118)$$

La vitesse absolue d'un point  $M$  s'exprime alors en fonction de la vitesse relative du point  $M$  et de la vitesse d'entraînement du référentiel relatif par rapport au référentiel absolu, suivant la relation :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e \quad (2.119)$$

### 2.11.2. Composition des accélérations

En suivant le même raisonnement utilisé pour les vitesses, on peut établir les expressions de l'accélération absolue  $\vec{a}_a$  et l'accélération relative  $\vec{a}_r$  du point matériel. L'accélération absolue se calcule en dérivant par rapport au temps le vecteur vitesse absolue  $\vec{v}_a$  (dans  $(R_a)$ ) en considérant les vecteurs  $\vec{u}_x$ ,  $\vec{u}_y$ ,  $\vec{u}_z$  de la base associée à  $(R_a)$  comme fixes avec le temps. On obtient donc :

$$\vec{a}_a = \left. \frac{d\vec{v}_a}{dt} \right|_{R_a} = \left. \frac{d^2 \overline{OM}}{dt^2} \right|_{R_a} = \ddot{x} \cdot \vec{u}_x + \ddot{y} \cdot \vec{u}_y + \ddot{z} \cdot \vec{u}_z \quad (2.120)$$

Pour l'accélération relative, on dérive par rapport au temps le vecteur vitesse relative  $\vec{v}_r$  (dans  $R_r$ ) en considérant les vecteurs  $\vec{u}'_x$ ,  $\vec{u}'_y$ ,  $\vec{u}'_z$  de la base associée à ( $R_r$ ) comme fixes avec le temps. On obtient donc :

$$\vec{a}_r = \left. \frac{d\vec{v}_r}{dt} \right|_{R_r} = \left. \frac{d^2 \overline{O'M}}{dt^2} \right|_{R_r} = \ddot{x}' \cdot \vec{u}'_x + \ddot{y}' \cdot \vec{u}'_y + \ddot{z}' \cdot \vec{u}'_z \quad (2.121)$$

On dérive maintenant l'équation de la composition des vitesses dans le référentiel ( $R_a$ ), comme suit :

$$\vec{a}_a = \left. \frac{d\vec{v}_a}{dt} \right|_{R_a} = \left. \frac{d\vec{v}_e}{dt} \right|_{R_a} + \left. \frac{d\vec{v}_r}{dt} \right|_{R_a} \quad (2.122)$$

1) On développe d'abord le terme

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\vec{v}_r}{dt} \right|_{R_a} &= \ddot{x}' \cdot \vec{u}'_x + \dot{x}' \cdot \dot{\vec{u}}'_x + \ddot{y}' \cdot \vec{u}'_y + \dot{y}' \cdot \dot{\vec{u}}'_y + \ddot{z}' \cdot \vec{u}'_z + \dot{z}' \cdot \dot{\vec{u}}'_z \\ &= \underbrace{\ddot{x}' \cdot \vec{u}'_x + \ddot{y}' \cdot \vec{u}'_y + \ddot{z}' \cdot \vec{u}'_z}_{\vec{a}_r} + \dot{x}' \cdot \dot{\vec{u}}'_x + \dot{y}' \cdot \dot{\vec{u}}'_y + \dot{z}' \cdot \dot{\vec{u}}'_z \\ &= \vec{a}_r + \dot{x}' \cdot \dot{\vec{u}}'_x + \dot{y}' \cdot \dot{\vec{u}}'_y + \dot{z}' \cdot \dot{\vec{u}}'_z \end{aligned} \quad (2.123)$$

2) On développe ensuite le terme  $\left. \frac{d\vec{v}_e}{dt} \right|_{R_a}$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\vec{v}_e}{dt} \right|_{R_a} &= \frac{d}{dt} \left( \left. \frac{d\overline{OO'}}{dt} \right|_{R_a} + x' \cdot \dot{\vec{u}}'_x + y' \cdot \dot{\vec{u}}'_y + z' \cdot \dot{\vec{u}}'_z \right) \\ &= \left. \frac{d^2 \overline{OO'}}{dt^2} \right|_{R_a} + \dot{x}' \cdot \dot{\vec{u}}'_x + x' \cdot \ddot{\vec{u}}'_x + \dot{y}' \cdot \dot{\vec{u}}'_y + y' \cdot \ddot{\vec{u}}'_y + \dot{z}' \cdot \dot{\vec{u}}'_z + z' \cdot \ddot{\vec{u}}'_z \\ &= \left. \frac{d^2 \overline{OO'}}{dt^2} \right|_{R_a} + \dot{x}' \cdot \dot{\vec{u}}'_x + \dot{y}' \cdot \dot{\vec{u}}'_y + \dot{z}' \cdot \dot{\vec{u}}'_z + x' \cdot \ddot{\vec{u}}'_x + y' \cdot \ddot{\vec{u}}'_y + z' \cdot \ddot{\vec{u}}'_z \end{aligned} \quad (2.124)$$

3) On peut donc maintenant écrire la relation suivante :

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \left. \frac{d^2 \overline{OO'}}{dt^2} \right|_{R_a} + x' \cdot \ddot{\vec{u}}'_x + y' \cdot \ddot{\vec{u}}'_y + z' \cdot \ddot{\vec{u}}'_z + 2(\dot{x}' \cdot \dot{\vec{u}}'_x + \dot{y}' \cdot \dot{\vec{u}}'_y + \dot{z}' \cdot \dot{\vec{u}}'_z) \quad (2.125)$$

Tous les termes ajoutés à  $\vec{a}_r$  peuvent être regroupés en deux termes comme suit :

Le terme :

$$\left. \frac{d^2 \overline{OO'}}{dt^2} \right|_{R_a} + x' \cdot \ddot{u}'_x + y' \cdot \ddot{u}'_y + z' \cdot \ddot{u}'_z \quad (2.126)$$

est appelé accélération d'entraînement (notée  $\vec{a}_e$ ). Comme pour la vitesse d'entraînement, il rend compte du mouvement de  $O'$  dans  $R_a$  et du mouvement (dans  $R_a$ ) des trois axes  $\vec{u}'_x$ ,  $\vec{u}'_y$ ,  $\vec{u}'_z$  de la base associée à  $(R_r)$ . Il décrit donc le mouvement du référentiel relatif par rapport au référentiel absolu.

Le terme  $(2(\dot{x}' \cdot \dot{u}'_x + \dot{y}' \cdot \dot{u}'_y + \dot{z}' \cdot \dot{u}'_z))$  est le terme complémentaire obtenu lors de la dérivation. Il est appelé accélération de Coriolis (notée  $\vec{a}_c$ ), du nom du physicien français Gaspard Coriolis (1792-1843) qui montra son existence en 1835.

Ainsi l'accélération absolue d'un point  $M$  s'exprime en fonction de l'accélération relative du point  $M$ , de l'accélération d'entraînement (du référentiel  $R_r$  par rapport au référentiel  $R_a$ ), et d'une accélération complémentaire dite accélération de Coriolis, suivant la relation :

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c \quad (2.127)$$

### 2.11.3. Référentiel en translation

Si le référentiel relatif ( $R_r$ ) est en translation par rapport au référentiel absolu ( $R_a$ ) alors les vecteurs  $\vec{u}'_x$ ,  $\vec{u}'_y$ ,  $\vec{u}'_z$  de la base associée à  $(R_r)$  sont fixes dans  $(R_a)$ . Le mouvement d'entraînement de  $(R_r)$  par rapport à  $(R_a)$  est une translation. Les vecteurs  $\vec{u}'_x$ ,  $\vec{u}'_y$ ,  $\vec{u}'_z$  sont fixes dans  $(R_a)$ , donc :

$$\left. \frac{d\vec{u}'_x}{dt} \right|_{R_a} = \left. \frac{d\vec{u}'_y}{dt} \right|_{R_a} = \left. \frac{d\vec{u}'_z}{dt} \right|_{R_a} = \vec{0} \quad \text{soit } \dot{u}'_x = \dot{u}'_y = \dot{u}'_z = \vec{0} \quad (2.128)$$

La vitesse d'entraînement se réduit à l'expression suivante :

$$\vec{v}_e = \left. \frac{d\overline{OO'}}{dt} \right|_{R_a} = \vec{v}_{O'/R_a} \quad (2.129)$$

Donc dans le cas de deux référentiels en translation l'un par rapport à l'autre, la vitesse d'entraînement se réduit à la vitesse de l'origine du référentiel mobile dans le référentiel fixe.

La vitesse absolue dans le cas de deux référentiels en translation s'écrit donc :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_{O'/R_a} \quad (2.130)$$

Pour les accélérations, on note que les dérivées premières et secondes des vecteurs de la base du référentiel relatif sont nulles. Donc :

$$\dot{\vec{u}}'_x = \dot{\vec{u}}'_y = \dot{\vec{u}}'_z = \ddot{\vec{u}}'_x = \ddot{\vec{u}}'_y = \ddot{\vec{u}}'_z = \vec{0} \quad (2.131)$$

L'accélération de Coriolis est nulle et l'accélération d'entraînement se réduit à l'accélération du point  $O'$  dans  $R_a$ .

$$\vec{a}_c = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{a}_e = \left. \frac{d^2 \overline{OO'}}{dt^2} \right|_{R_a} = \vec{a}_{O'/R_a} \quad (2.132)$$

On arrive alors à l'expression de l'accélération absolue dans le cas de deux référentiels en translation :

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_{O'/R_a} \quad (2.133)$$

Si le référentiel ( $R_r$ ) est en translation rectiligne uniforme par rapport à ( $R_a$ ),  $\vec{v}_{O'/R_a} = \text{Cste}$ , et par conséquent  $\vec{a}_{O'/R_a} = \vec{0}$ . Les lois de composition des vitesses et accélérations donnent les résultats suivants :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_{O'/R_a} \quad \text{et} \quad \vec{a}_a = \vec{a}_r \quad (2.134)$$

Ainsi l'accélération d'un point matériel est la même (en direction, sens et norme) dans tous les référentiels qui sont en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres.

#### 2.11.4. Référentiel en rotation uniforme autour d'un axe fixe

Considérons un référentiel relatif ( $R_r$ ), en rotation uniforme par rapport à un référentiel fixe ( $R_a$ ). Considérons aussi un axe vertical fixe est identique dans les deux référentiels ( $OZ$  dans ( $R_a$ ) et  $O'Z'$  dans ( $R_r$ ) sont confondus) (Figure 2.13). Les axes  $OX'$  et  $OY'$  de ( $R_r$ ) subissent une rotation uniforme par rapport aux axes  $OX$  et  $OY$  fixes de ( $R_a$ ). La rotation de ( $R_r$ ) par rapport à ( $R_a$ ) est uniforme, c'est-à-dire que la vitesse angulaire est égale à une constante ( $\omega = d\theta/dt = \text{Cste}$ ).

Dans le cas d'une rotation uniforme, dériver un vecteur par rapport au temps revient à calculer le produit vectoriel du vecteur rotation  $\vec{\omega}$  par ce vecteur  $d\vec{u}'_x/dt = \vec{\omega} \wedge \vec{u}'_x$ .

##### 2.11.4.1. Composition des vitesses

Déterminons, dans le cas d'une rotation uniforme, le vecteur vitesse d'entraînement. On rappelle son expression générale :

$$\vec{v}_e = \left. \frac{d\overline{OO'}}{dt} \right|_{R_a} + x' \cdot \dot{\vec{u}}'_x + y' \cdot \dot{\vec{u}}'_y + z' \cdot \dot{\vec{u}}'_z \quad (2.135)$$

Les points  $O$  et  $O'$  sont confondus, donc  $\left. \frac{d\overline{OO'}}{dt} \right|_{R_a} = \vec{0}$ .

On peut écrire les dérivées de vecteurs sous forme de produits vectoriels, comme suit :

$$\dot{\vec{u}}'_x = \vec{\omega} \wedge \vec{u}'_x \quad \dot{\vec{u}}'_y = \vec{\omega} \wedge \vec{u}'_y \quad \dot{\vec{u}}'_z = \vec{\omega} \wedge \vec{u}'_z = \vec{0} \quad (2.136)$$

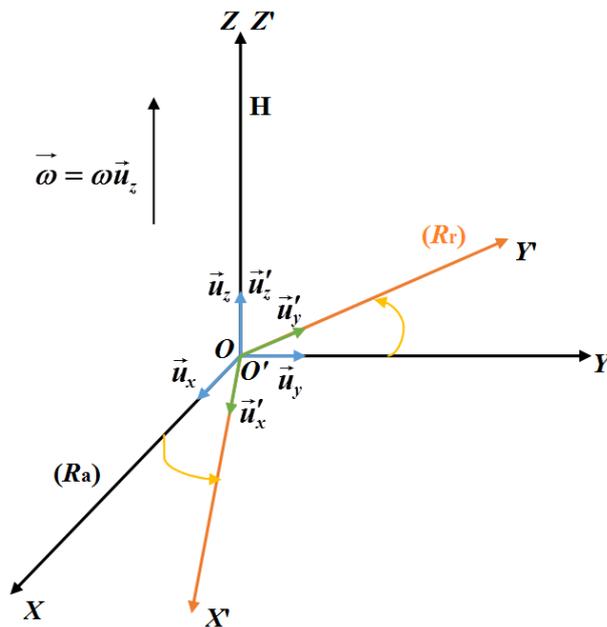
Donc :  $\vec{v}_e = \vec{\omega} \wedge (x' \vec{u}'_x + y' \vec{u}'_y)$  (2.137)

Or :  $x' \vec{u}'_x + y' \vec{u}'_y = \overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{OM}$  ; ainsi

$$\vec{v}_e = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M} \quad (2.138)$$

Et la vitesse absolue vaut :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M} \quad (2.139)$$



**Figure 2.13 :** référentiel relatif ( $R_r$ ) en rotation uniforme par rapport au référentiel absolu ( $R_a$ ). Les axes  $OZ$  et  $O'Z'$  sont confondus.

#### 2.11.4.2. Composition des accélérations

On rappelle les expressions générales des accélérations d'entraînement et de Coriolis :

$$\begin{cases} \vec{a}_e = \left. \frac{d^2 \overrightarrow{OO'}}{dt^2} \right|_{R_a} + x' \cdot \ddot{\vec{u}}'_x + y' \cdot \ddot{\vec{u}}'_y + z' \cdot \ddot{\vec{u}}'_z \\ \vec{a}_c = 2 \left( \dot{x}' \cdot \dot{\vec{u}}'_x + \dot{y}' \cdot \dot{\vec{u}}'_y + \dot{z}' \cdot \dot{\vec{u}}'_z \right) \end{cases} \quad (2.140)$$

O et O' sont confondus, donc  $\left. \frac{d^2 \overrightarrow{OO'}}{dt^2} \right|_{R_a} = \vec{0}$ .

En introduisant les produits vectoriels, on obtient l'accélération d'entraînement suivante :

$$\begin{aligned}
 \vec{a}_e &= x' \cdot \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \wedge \vec{u}'_x) + y' \cdot \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \wedge \vec{u}'_y) + z' \cdot \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \wedge \vec{u}'_z) \\
 &= \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge (x' \cdot \vec{u}'_x + y' \cdot \vec{u}'_y + z' \cdot \vec{u}'_z) + \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge (x' \cdot \vec{u}'_x + y' \cdot \vec{u}'_y + z' \cdot \vec{u}'_z) \\
 \vec{a}_e &= \left( \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overline{O'M} \right) + \left( \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \overline{O'M} \right)
 \end{aligned} \tag{2.141}$$

Or le vecteur rotation est ici constante donc  $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{0}$ .

De même en introduisant le produit vectoriel, on obtient une relation simple pour l'accélération de Coriolis :

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \wedge (x' \cdot \vec{u}'_x + y' \cdot \vec{u}'_y + z' \cdot \vec{u}'_z) = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r \tag{2.142}$$

et l'accélération absolue vaut :

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overline{O'M}) = 2 \cdot \vec{\omega} \wedge \vec{v}_r \tag{2.143}$$

Dans le cas général où le référentiel mobile est à la fois en translation et rotation non uniformes, il n'y a pas d'axe fixe et O et O' ne sont pas confondus. Les lois de compositions des vitesses et des accélérations donnent alors les résultats suivants :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_{O'/R_s} + \vec{\omega} \wedge \overline{O'M} \tag{2.144}$$

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_{O'/R_s} + \left( \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overline{O'M} \right) + \left( \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \overline{O'M} \right) + 2 \cdot \vec{\omega} \wedge \vec{v}_r \tag{2.145}$$

**CHAPITRE 3 :**  
**DYNAMIQUE DU POINT**  
**MATERIEL**  
**LOIS DE NEWTON ET**  
**FORCES**

# CHAPITRE 3 :

## DYNAMIQUE DU POINT MATERIEL

### SOMMAIRE

---

<b>3.1. Définitions</b>	60
<b>3.1.1. Système matériel</b>	60
<b>3.1.2. Masse</b>	60
<b>3.1.3. Centre d'inertie</b>	60
<b>3.1.4. Quantité de mouvement</b>	62
<b>3.2. Les trois lois de Newton de la dynamique</b>	63
<b>3.2.1. Première loi de Newton : principe d'inertie</b>	63
<b>3.3. Deuxième loi de Newton : principe fondamental de la dynamique</b>	64
<b>3.3.1. Énoncé du principe fondamental de la dynamique</b>	64
<b>3.3.2. Cas des systèmes pseudo-isolés</b>	64
<b>3.3.3. Cas particulier d'un système à masse constante</b>	64
<b>3.4. Troisième loi de Newton : principe des actions réciproques</b>	65
<b>3.5. Notion de force</b>	66
<b>3.5.1. Définition</b>	66
<b>3.5.2. Classification des forces</b>	66
3.5.2.1. Forces d'interaction à distance	66
3.5.2.1.1. Interaction gravitationnelle	66
3.5.2.1.2. Interaction coulombienne	67
3.5.2.1.3. Interaction électromagnétique	67
3.5.2. Forces de contact	68
3.5.2.1. Force de tension d'un fil	68
3.5.2.2. Force de rappel d'un ressort	68
3.5.2.3. Réaction des supports et force de frottement solide-solide	69
3.5.2.4. Force de frottement solide-fluide	71
<b>3.6. APPLICATIONS : Résolution d'un problème de mécanique</b>	72
<b>3.6.1. Mouvements rectiligne uniformes</b>	73
<b>3.6.2. Mouvements rectiligne uniformes varié</b>	73
<b>3.6.3. Mouvement d'un point matériel dans le champ de pesanteur</b>	73
<b>3.6.3.1. Mouvement d'un point matériel dans le champ de pesanteur en absence de résistance de l'air</b>	73
<b>3.6.3.2. Mouvement d'un point matériel dans le champ de pesanteur en présence de résistance de l'air</b>	77
<b>3.6.4. Pendule élastique</b>	78
<b>3.6.5. Pendule simple</b>	80
<b>3.7. Moment cinétique et théorème du moment cinétique</b>	81
<b>3.7.5. Moment d'une force</b>	81
<b>3.7.6. Moment cinétique d'un point matériel</b>	82
3.7.6.1. Définition	82
3.7.6.2. Expression analytique du moment cinétique	82
3.7.6.3. Théorème du moment cinétique	83
<b>3.7.7. Notion de force centrale</b>	84
<b>3.7.8. Application</b>	84

---

### 3.6. Définitions

#### 3.6.1. Système matériel

Un système matériel est un ensemble de points matériels. On distingue :

1) *Le système matériel indéformable* : tous les points matériels constituant le système restent fixes les uns par rapport aux autres. Ceci correspond à la définition d'un solide en mécanique.

2) *Le système matériel déformable* : tout système ne correspondant pas à un solide.

Le système matériel peut subir des actions ou pas de la part de l'extérieur. En particulier, on distingue :

1) *Le système matériel isolé (ou fermé)* : il n'existe aucune action venant de l'extérieur et s'exerçant sur le système.

2) *Le système matériel pseudo-isolé* : Les actions extérieures agissant sur le système se compensent (tout se passe comme s'il était isolé).

Ainsi sur Terre, un système ne peut pas être rigoureusement isolé puisqu'il subit forcément son poids. Un mobile autoporteur sur un plan horizontal est pseudo-isolé : la soufflerie du mobile compense le poids et le mobile se déplace dans le plan horizontal comme s'il était isolé (les principales forces de frottement solide-solide sont éliminées).

#### 3.6.2. Masse

La masse (très souvent noté  $m$ ) d'un système caractérise la quantité de matière qui le constitue. Il s'agit d'un scalaire positif qui est d'autant plus grand que le corps s'oppose au mouvement. L'unité de masse dans le système international est le kilogramme (symbole : kg). La masse d'un système est invariable dans le cadre de la mécanique Newtonienne. C'est une caractéristique du système.

#### 3.6.3. Centre d'inertie

Le centre d'inertie d'un système matériel ou centre de gravitation correspond au barycentre des positions des points matériels affectés de leur masse. Il est noté  $I$  (comme Inertie) ou plus souvent  $G$  (comme Gravitation).

Pour un système matériel comportant  $n$  points matériels noté  $M_1, M_2, \dots, M_n$  de masse respectivement  $m_1, m_2, \dots, m_i, \dots, m_n$  (voir figure 3.1), le barycentre est obtenu par la relation :

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0} \quad (3.1)$$

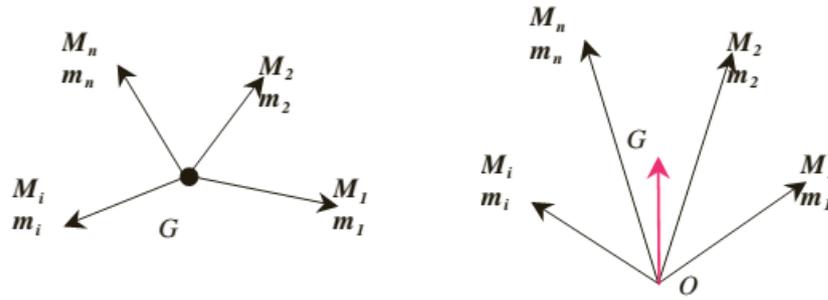


Figure 3.1 : centre d'inertie et barycentre.

Ce point  $G$  peut être repéré par rapport à une origine  $O$  (voir figure 3.1). En utilisant la relation de Chasles on obtient l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{i=n} m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0} &\Rightarrow \sum_{i=1}^{i=n} m_i [\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OM_i}] = \vec{0} \\ \sum_{i=1}^{i=n} m_i \overrightarrow{GO} + \sum_{i=1}^{i=n} m_i \overrightarrow{OM_i} &= \vec{0} \\ -\left(\sum_{i=1}^{i=n} m_i\right) \overrightarrow{GO} &= \sum_{i=1}^{i=n} m_i \overrightarrow{OM_i} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Soit :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} m_i \overrightarrow{OM_i}}{\sum_{i=1}^{i=n} m_i} \Rightarrow m \overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \overrightarrow{OM_i} \quad (3.3)$$

La quantité  $m$  correspond à la masse totale du système :  $m = \sum_{i=1}^{i=n} m_i$

**Exemple :** Centre d'inertie d'un système constitué de 2 masses  $m_1$  en  $M_1$  et  $m_2 = 2m_1$  en  $M_2$  tel que  $M_1M_2 = d = 6$  cm (figure 3.2). En utilisant la relation (3.1), on a :

$$m_1 \overrightarrow{GM_1} + m_2 \overrightarrow{GM_2} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{GM_1} = -\frac{m_2}{m_1} \overrightarrow{GM_2} = -2 \overrightarrow{GM_2} \quad (3.4)$$

Les deux vecteurs ont même direction et sont de sens opposé : les points  $G$ ,  $M_1$  et  $M_2$  sont alignés et  $G$  est entre  $M_1$  et  $M_2$ .

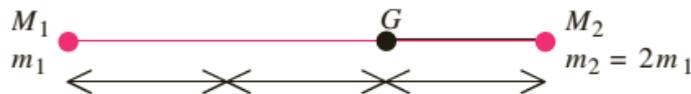


Figure 3.2 : centre d'inertie  $G$  pour un système constitué d'une masse  $m_1$  et  $m_2 = 2m_1$ .

En passant par les normes, on obtient :

$$\|\overline{GM_1}\| = 2\|\overline{GM_2}\| \Rightarrow GM_1 = 2GM_2 \quad (3.5)$$

La distance entre  $M_1$  et  $M_2$  est égale à  $d$  :

$$M_1M_2 = GM_1 + GM_2 = d \quad (3.6)$$

$$\begin{cases} GM_1 + GM_2 = d \Rightarrow 2GM_2 + GM_2 = d = 3GM_2 \Rightarrow GM_2 = \frac{d}{3} = 2\text{cm} \\ GM_1 = 2GM_2 \Rightarrow GM_1 = \frac{2d}{3} = 4\text{cm} \end{cases} \quad (3.7)$$

Le centre d'inertie se situe entre les deux masses, du côté de la masse la plus grande, le rapport des distances étant égal au rapport inverse des masses.

### 3.6.4. Quantité de mouvement

La quantité de mouvement est une grandeur introduite par Isaac Newton pour formuler les lois de la mécanique portant son nom. Pour un point  $M$  de masse  $m$  et de vecteur vitesse  $\vec{v}_{M/R}$  par rapport à un référentiel  $R$ , elle est définie par le vecteur :

$$\vec{P}_{M/R} = m\vec{v}_{M/R}$$

Puisqu'elle est fonction de la vitesse, la quantité du mouvement dépend du référentiel dans lequel on travaille.

Le vecteur quantité de mouvement d'un système matériel constitué de  $n$  masses  $m_i$  situées aux points  $M_i$  et se déplaçant à la vitesse  $\vec{v}_i$  dans le référentiel donné est obtenu en ajoutant tous les vecteurs quantité de mouvement :

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{p}_i \quad (3.8)$$

Cette relation peut encore s'écrire, en considérant que les masses sont des constantes dans le temps :

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \sum_{i=1}^{i=n} m_i \frac{d\overline{OM_i}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{i=n} (m_i \overline{OM_i}) \\ \vec{p} &= \frac{d}{dt} (m \overline{OG}) = m \frac{d\overline{OG}}{dt} = m \vec{V}_G \end{aligned} \quad (3.9)$$

Le vecteur quantité de mouvement d'un système matériel est égal au vecteur quantité de mouvement d'un point matériel fictif confondu avec le centre d'inertie du système où serait concentrée la masse totale du système.

### 3.7. Les trois lois de Newton de la dynamique

Ces trois lois de Newton constituent la base de la dynamique newtonienne et de la mécanique classique (par opposition à la mécanique quantique ou relativiste). Il s'agit de principes au sens où ces lois sont postulées et non démontrées théoriquement. Elles sont donc considérées comme valables tant que l'expérience n'a pas contredit les conséquences qu'on peut déduire théoriquement de ces postulats. Ce sont justement les écarts entre certaines observations expérimentales et les prédictions théoriques issues des principes de Newton qui ont conduit à l'édification des théories de la mécanique quantique et de la mécanique relativiste en posant des principes différents de ceux de Newton. Pour les problèmes envisagés ici, elles sont bien évidemment valables.

#### 3.7.1. Première loi de Newton : principe d'inertie

La première loi de Newton 'principe d'inertie' s'énonce comme suit :

*Tout corps isolé, qui n'est soumis à aucune interaction avec d'autres objets matériels, conserve l'état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme qu'il possédait auparavant.*

Le principe d'inertie repose sur l'hypothèse de l'existence d'un référentiel dit **galiléen**<sup>1</sup>. Ce type de référentiel fait partie d'une classe de référentiels dont l'archétype est en première approximation le référentiel de Copernic. Tout autre référentiel appartenant à cette classe doit être en mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel de Copernic. Si ( $R'$ ) est un référentiel en translation rectiligne et uniforme par rapport au référentiel galiléen ( $R$ ), alors on peut écrire  $\vec{a}_{M/R'} = \vec{0}$  car  $\vec{a}_{M/R'} = \vec{a}_{M/R}$  et  $\vec{a}_{M/R} = 0$ . Cela signifie donc que ( $R'$ ) est aussi un référentiel galiléen puisque ce même point matériel  $M$  ne subit aucune accélération dans ( $R'$ ) et est donc isolé. Le principe d'inertie est donc vérifié aussi dans ( $R'$ ).

Il en résulte du principe d'inertie que dans un référentiel ( $R$ ) galiléen, le centre d'inertie de tout système matériel mécaniquement isolé (ou pseudo isolé), est soit au repos soit en mouvement rectiligne uniforme. La quantité de mouvement totale d'un système isolé ou pseudo isolé est alors conservée :

$$\vec{v}_{G/R} = \overline{Cste} \Rightarrow \vec{p}_{G/R} = m\vec{v}_{G/R} = \overline{Cste} \Rightarrow \frac{d\vec{p}_{G/R}}{dt} = \vec{0} \quad (3.10)$$

**Remarque :** pour un système physique, le principe d'inertie ne renseigne que sur le mouvement de son centre d'inertie mais pas sur le mouvement des autres points constituant le système.

---

<sup>1</sup> Un référentiel est galiléen si le principe d'inertie s'applique.

### 3.8. Deuxième loi de Newton : principe fondamental de la dynamique

#### 3.8.1. Énoncé du principe fondamental de la dynamique

Le principe fondamental de la dynamique (appelé aussi relation fondamentale de la dynamique ou théorème de la quantité de mouvement) s'énonce comme suivant :

*Dans un référentiel galiléen, la dérivée par rapport au temps du vecteur quantité de mouvement est égale à la somme des forces s'exerçant sur le point matériel.*

Mathématiquement, ce principe se traduit par la relation suivante :

$$\frac{d\vec{p}_{M/R}}{dt} = \sum_i \vec{f}_i \quad (3.11)$$

Le principe fondamental de la dynamique relie un terme cinétique, la dérivée du vecteur quantité de mouvement, à un terme dynamique, la somme des forces traduisant les interactions subies par le point matériel. Cette relation peut être utilisée dans les deux sens : (1) obtenir la description cinématique du mouvement connaissant les forces subies par le point matériel, (2) déterminer à partir de la connaissance du mouvement la somme des forces s'exerçant sur le point matériel.

#### 3.8.2. Cas des systèmes pseudo-isolés

Les systèmes *pseudo-isolés* sont définis comme les systèmes pour lesquels la somme des forces qui s'exercent sur eux est nulle :

$$\sum_i \vec{f}_i = \vec{0} \quad (3.12)$$

Pour de tels systèmes, le principe fondamental de la dynamique montre que la quantité de mouvement  $\vec{p}_{M/R}$  est constante au cours du temps. Ces systèmes sont donc animés d'un mouvement rectiligne uniforme dans un référentiel galiléen. Ceci explique leur dénomination : tout se passe comme s'ils étaient isolés.

#### 3.8.3. Cas particulier d'un système à masse constante

Dans ce cas, il est possible de sortir la masse de la dérivée de la quantité de mouvement puisqu'il s'agit d'une constante :

$$\frac{d\vec{p}_{M/R}}{dt} = \frac{d(m \vec{v}_{M/R})}{dt} = m \frac{d\vec{v}_{M/R}}{dt} = \sum_i \vec{f}_i \quad (3.13)$$

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit alors à l'aide du vecteur accélération sous la forme :

$$m\vec{a}_{M/R} = \sum_i \vec{f}_i \quad (3.14)$$

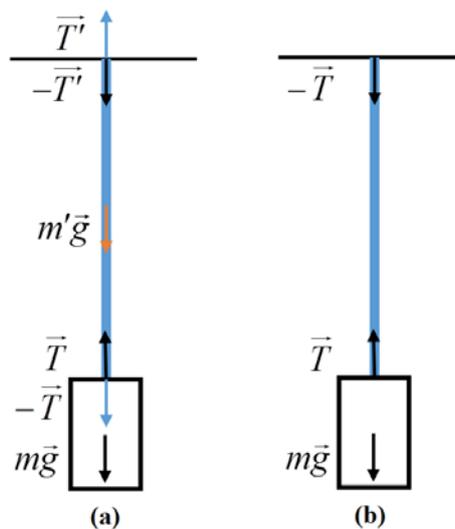
### 3.9. Troisième loi de Newton : principe des actions réciproques

La troisième et dernière loi de Newton, appelé parfois principe des actions réciproques ou principe de l'action et de la réaction, s'énonce de la manière suivante :

*Quand deux corps interagissent, la force  $\vec{F}_{12}$  exercée par le premier corps sur le second corps est égale en intensité et opposée en sens à la force  $\vec{F}_{21}$  exercée par le second corps sur le premier corps. On écrit donc :  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ .*

Le principe des actions réciproques suppose une transmission instantanée de l'information. Il s'applique aussi bien aux interactions à distance qu'aux interactions de contact, à l'échelle de l'Univers comme à l'échelle des particules.

Illustrons cette troisième loi de Newton avec un exemple que nous rencontrons fréquemment, un bloc de masse  $m$ , suspendu verticalement par une corde de masse  $m'$ . Faisons l'inventaire complet des forces en présence (figure 3. 3) : le bloc est soumis à son poids  $m\vec{g}$  et à la force de tension  $\vec{T}$  exercée par la corde. La troisième loi nous dit que le bloc exerce la force  $-\vec{T}$  sur la corde dont le poids est  $m'\vec{g}$ . L'extrémité supérieure de la corde est attachée à un support fixe qui exerce sur elle la force de tension  $\vec{T}'$ , et donc la corde exerce sur ce support fixe la force  $-\vec{T}'$  (par souci de clarté, nous avons représenté les forces avec la même couleur que celle du corps sur lequel elles s'exercent).



**Figure 3. 3 :** : Illustration du principe des actions réciproques : (a) Inventaire de toutes les forces en présence (b) le cas où la masse  $m'$  de la corde est négligeable devant la masse  $m$  du bloc.

Nous sommes dans le référentiel galiléen terrestre, l'ensemble est immobile, par conséquent les résultantes des forces s'exerçant respectivement sur le bloc et sur la corde doivent être nulles :

$$m\vec{g} + \vec{T} = \vec{0} \quad \text{et} \quad -\vec{T} + m'\vec{g} + \vec{T}' = \vec{0} \quad (3.15)$$

Dans le cas le plus fréquent, où l'on néglige la masse  $m'$  devant  $m$ , on obtient  $\vec{T}' = \vec{T}$  ce qui nous conduit au schéma simplifié de la figure 3. 3(b), dans lequel toutes les forces s'exerçant sur la corde ont été volontairement omises. Ce schéma est parfaitement légitime et c'est celui que nous utiliserons, mais en gardant présent à l'esprit que, s'il paraît violer la troisième loi de Newton, c'est parce que toutes les forces ne sont pas représentées.

### 3.10. Notion de force

#### 3.10.1. Définition

On appelle *force* la grandeur vectorielle décrivant l'interaction capable de modifier et/ou de produire un mouvement ou une déformation du système. La force est décrite par un vecteur caractérisé par une direction, un sens et une intensité. Par exemple, lorsqu'on tire sur un ressort, on constate que ce dernier se déplace le long d'une direction et dans un sens qui sont ceux de l'effort ou de la force qu'on exerce sur lui. L'allongement du ressort est d'autant plus grand que la force est importante. Trois paramètres : direction, sens et intensité interviennent pour déterminer l'action exercée sur le ressort.

#### 3.10.2. Classification des forces

On distingue deux grandes catégories de forces : (1) forces de types *interactions à distance* (exemple : force gravitationnelle et force électromagnétique) et (2) forces de types *interactions de contact* (exemple : force de rappel d'un ressort, tension d'un fil, force de frottement fluide, force de réaction d'un support, frottement de glissement)

##### 3.10.2.1. Forces d'interaction à distance

Actuellement on considère quatre types d'interaction à distance entre particules.

###### 3.10.2.1.1. Interaction gravitationnelle

Il s'agit d'une autre interaction à portée infinie qui intervient entre toutes particules possédant une masse dite gravitationnelle. Elle est décrite par la loi d'attraction universelle de Newton :

*Tout point matériel de masse  $m_1$  attire tout point matériel de masse  $m_2$  avec une force dirigée le long de la droite qui les relie. Cette force varie comme l'inverse du carré de la distance entre les particules et proportionnellement au produit de leurs masses.*

L'interaction gravitationnelle se traduit donc par la force s'exerçant sur la masse  $m_2$  située au point  $M_2$  du fait de la présence de la masse  $m_1$  placée en  $M_1$  :

$$\vec{F}_{1/2} = -G \frac{m_1 m_2}{(M_1 M_2)^2} \vec{u}, \text{ avec } \vec{u} = \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{\|\overrightarrow{M_1 M_2}\|} \quad (3.16)$$

en notant  $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}$ , la constante de gravitation. On peut noter l'analogie entre les expressions de l'interaction gravitationnelle et de l'interaction électrostatique. La différence essentielle provient du fait que l'interaction électrostatique peut être attractive ou répulsive alors que l'interaction gravitationnelle n'est qu'attractive.

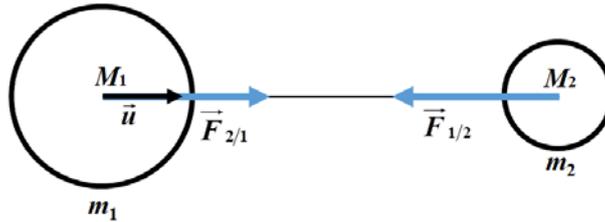


Figure 3.4 : force de gravitation d'un objet de masse  $m_1$  sur un objet de masse  $m_2$ .

### 3.10.2.1.2. Interaction coulombienne

L'interaction coulombienne est l'analogue de l'interaction gravitationnelle pour des charges électriques ponctuelles. La force subie par une charge  $q_2$  placée en  $M_2$  du fait de la présence en  $M_1$  d'une charge  $q_1$  s'écrit :

$$\vec{F}_{1/2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{(M_1 M_2)^2} \vec{u}, \vec{u} = \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{\|\overrightarrow{M_1 M_2}\|} \quad (3.17)$$

en notant  $\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$  la permittivité diélectrique du vide. On retrouve la formulation de la force de Lorentz en notant que :

$$\vec{F}_{1/2} = q_2 \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{(M_1 M_2)^2} \vec{u} \right] = q_2 \vec{E}(q_1), \text{ soit } \vec{E}(q_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{(M_1 M_2)^2} \vec{u}$$

### 3.5.2.3. Interaction électromagnétique

Cette interaction entre particules chargées électriquement est décrite dans le cadre des équations de Maxwell qui sont à la base de tout l'électromagnétisme. Dans un référentiel ( $R$ ), la force subie par une particule de charge  $q$  et de vitesse  $\vec{v}$  soumise à un champ électrique  $\vec{E}$  et à un champ magnétique  $\vec{B}$  est décrite par la force de Lorentz :

$$\vec{F} = q \left[ \vec{E} + \vec{v}_{/R} \wedge \vec{B} \right] \quad (3.18)$$

Cette force traduit les interactions entre particules chargées dans la mesure où les champs électrique  $\vec{E}$  et magnétique  $\vec{B}$  sont créés par des particules chargées, immobiles ou en mouvement, ces champs dépendant a priori du point et du référentiel.

### 3.5.3. Forces de contact

Par opposition aux forces qui avaient une action à distance, les forces de contact n'existent que lors d'un contact entre systèmes.

#### 3.6.2.1. Force de tension d'un fil

Un fil de masse négligeable prend une forme rectiligne dès qu'il est tendu. On observe que la tension est la même en tout point du fil et que sa valeur dépend du mouvement du point. Dans le cas où le fil n'est plus tendu, la tension est nulle. On modélise ces observations en considérant que la force exercée par un fil tendu sur un objet auquel il est attaché est équivalente à une tension  $\vec{T}$  appliquée au point d'attache, dirigée le long du fil dans la direction de l'objet vers le fil (figure 3.5) et dont la norme dépend des autres forces appliquées.

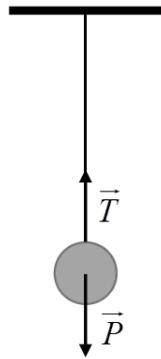


Figure 3.5 : Tension d'un fil

#### 3.6.2.2. Force de rappel d'un ressort

C'est la force exercée par l'extrémité libre d'un ressort lorsqu'il est déformé (étiré ou comprimé). Ce ressort, dont on considère l'autre extrémité fixe, est caractérisé par une longueur au repos  $l_0$  (figure 3.6b) et une constante de raideur  $k$ . Lorsque le ressort est étiré (figure 3.6a), il exerce une force de rappel, proportionnelle à son allongement  $x$ , qui s'écrit dans le régime linéaire où le ressort n'est pas trop étiré :

$$\vec{F}_R = -k.x \vec{u}, \text{ avec } x = l - l_0 > 0 \quad (l > l_0) \quad (3.19)$$

Si le ressort est comprimé (figure 3.6c), il exerce une force qui s'écrit aussi :

$$\vec{F}_R = -k.x \vec{u} ; x = l - l_0 < 0 \quad (l < l_0) \quad (3.20)$$

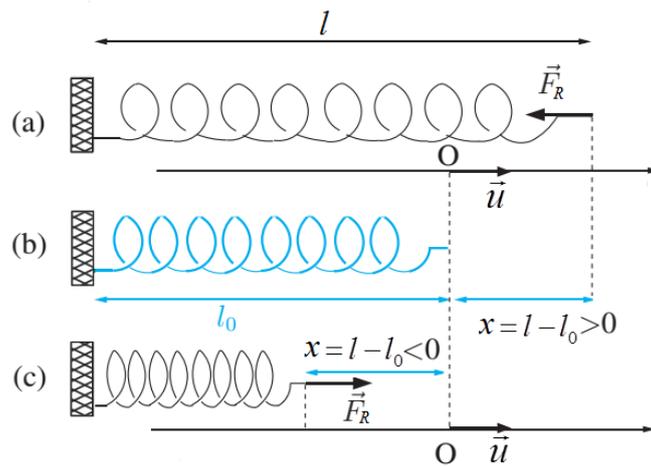


Figure 3.6 : Définition de la tension d'un ressort

### 3.6.2.3. Réaction des supports et force de frottement solide-solide

Lorsqu'un solide de masse  $m$  se déplace sur la surface d'un support, ce solide appuie sur cette surface tant qu'il est en contact avec elle. D'après le principe de l'action et de la réaction, le solide subit de la part du support une force, appliquée au point de contact entre le solide et le support solide, appelée *réaction du support* notée généralement  $\vec{R}$  (force du contact). La réaction du support peut être décomposée en la somme de deux forces :

- 1) Une force normale à la surface "réaction normale  $\vec{R}_N$ " orientée vers le haut (voir figure 3.7).

Son module est égal au poids du solide,  $\|\vec{R}_N\| = mg$  si la surface est horizontale (Figure 3.7a

et  $\|\vec{R}_N\| = mg \cos \alpha$  pour une surface inclinée (Figure 3.7b). Dans tous les cas, l'existence d'une réaction normale implique que l'objet est au contact de la surface. Il se pourra qu'au cours de son mouvement l'objet quitte cette surface : la condition correspondante s'écrira

$$\|\vec{R}_N\| = 0.$$

- 2) Une force « réaction » tangentielle dite force de frottement  $R_T$  appartenant au plan tangent au support « une force parallèle à la surface ». C'est la présence de cette force qui explique la diminution progressive de la vitesse de du solide en mouvement et qui finit par s'arrêter. La force de frottement toujours s'oppose au mouvement du corps solide. C'est cette force de frottement qui nous permet de marcher et fait que notre véhicule peut rouler. Son module :  $\|\vec{R}_T\| = \mu \|\vec{R}_N\|$ , avec  $\mu$  le coefficient de frottement qui est fonction de la nature et de l'état de la surface (rugosité, bosses, trous...).

Ainsi :

$$\vec{R} = \vec{R}_N + \vec{R}_T . \quad (3.21)$$

On peut distinguer deux cas de frottement : frottement statique et frottement dynamique.

1) **Le frottement statique** : si le solide est immobile (cas statique, Figure 3.7a), on parle de frottement statique et dans ce cas, on introduit le coefficient de frottement statique noté  $\mu_s$  qui dépend des deux matériaux en contact (plus les surfaces seront rugueuses et plus  $\mu_s$  sera grand).

$$\|\vec{R}_T\| = \mu_s \|\vec{R}_N\| \quad (3.22)$$

Sur un plan horizontal le corps solide de masse  $m$  restera immobile tant que :

$$R_T \leq \mu_s R_N \rightarrow R_T \leq \mu_s mg \quad (3.23)$$

Sur un plan incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale (figure 3.7b), le solide restera immobile tant que la force de contact  $\vec{R}$  sera égale à  $-m\vec{g}$ , c'est-à-dire compensera exactement le poids, ce qui se traduit par :

$$R_N = mg \cos \alpha \text{ et } R_T = mg \sin \alpha$$

Le solide reste en équilibre tant que l'angle  $\alpha$  satisfait la condition :  $\tan \alpha \leq \mu_s$ .

2) **Le frottement dynamique** : lorsque la condition d'équilibre n'est plus satisfaite, le corps se met à glisser, et la force de frottement qui s'exerce sur lui est alors la force de frottement dynamique, parallèle au plan, opposée au sens de déplacement, son intensité est constante :

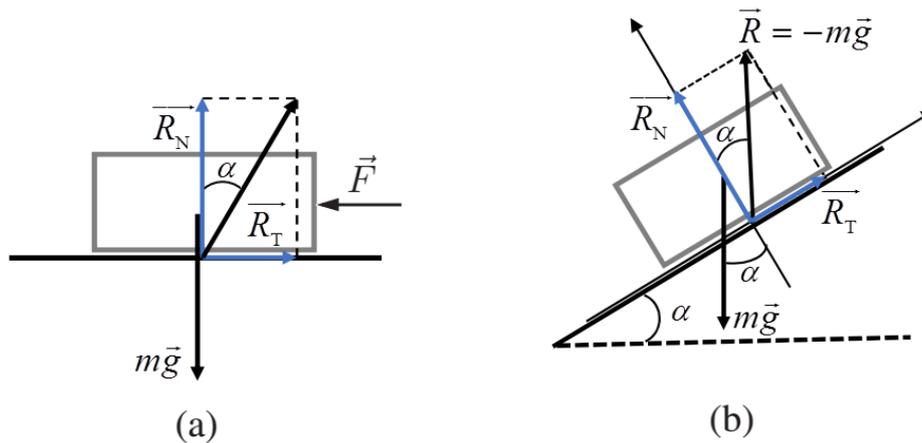
$$\|\vec{R}_T\| = \mu_d \|\vec{R}_N\| \quad (3.24)$$

$\mu_d$  est le coefficient de frottement dynamique.

Le support ne présente pas les mêmes frottements selon que le corps solide est immobile ou en mouvement. L'intensité de la force de frottement est plus importante dans le cas statique. C'est ce qui nous explique que lorsque nous poussons une caisse pour la mettre en mouvement, dès qu'elle se met à glisser nous remarquons que notre effort est moins intense qu'au départ : certainement la force de frottement que nous devons vaincre a diminué<sup>2</sup>. Dans tous les cas, on a toujours :  $\mu_d < \mu_s$ .

---

<sup>2</sup> C'est la raison pour laquelle votre voiture est équipée d'un système de freinage ABS qui, en contrôlant la pression des mâchoires de frein sur les disques, empêche le blocage des roues. Tant que les roues tournent, la vitesse du point de contact du pneu sur le sol est nulle, c'est donc la force de frottement statique qui intervient. Lorsque la roue se bloque, le point de contact du pneu glisse sur le sol, c'est la force de frottement dynamique qui entre alors en jeu, elle est plus faible et le freinage est donc moins efficace.



**Figure 3.7 :** Réaction normale  $\vec{R}_N$  et tangentielle  $\vec{R}_T$  exercées sur un objet de masse  $m$ , (a) par une surface horizontale, (b) par une surface inclinée.

### 3.6.2.4. Force de frottement solide-fluide

Quand un solide se déplace dans un fluide, il est soumis à une force de frottement qui dépend de sa vitesse. À faible vitesse (inférieure à  $1 \text{ ms}^{-1}$  dans l'air), cette force s'écrit :

$$\vec{F} = -f\vec{v} \quad (3.25)$$

Le coefficient  $f$  dépendant de la viscosité  $\eta$  du fluide et de la géométrie du corps solide en mouvement. Par exemple dans le cas d'une sphère de rayon  $R$ , le coefficient  $f = 6\pi\eta R$ . Il faut réaliser que ce type de force, proportionnelle à la vitesse, conduit toujours à observer une *vitesse limite* de chute d'un corps. En effet, pour un corps de masse  $m$  tombant dans un fluide visqueux, l'équation fondamentale de la dynamique s'écrit vectoriellement, puis projetée sur l'axe vertical  $OZ$  orienté positivement vers le bas :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - f\vec{v} \quad \text{soit} \quad m\dot{z} = mg - f \dot{z} \quad (3.26)$$

Deux termes de signes opposés déterminent l'accélération : l'un constant (le poids) l'autre variable puisque dépendant de la vitesse. Le corps abandonné sans vitesse initiale va d'abord accélérer sous l'action de son poids : la vitesse augmente donc jusqu'à ce qu'elle atteigne la valeur qui annule l'accélération. Cette valeur appelée vitesse limite est définie par :

$$\vec{v}_L = \frac{m\vec{g}}{f} \rightarrow \dot{z}_L = \frac{mg}{f} \quad (3.27)$$

Le mouvement devient alors rectiligne uniforme avec cette vitesse limite.

Pour de grandes vitesses de déplacement du solide, la force de frottement exercée par le fluide devient proportionnelle au carré de la vitesse. Elle implique toujours l'existence d'une vitesse limite, comme par exemple celle que vous observez en regardant descendre un parachutiste, après qu'il a ouvert son parachute. La surface de celui-ci (qui détermine la valeur de  $f$ ) est calculée pour que cette vitesse limite soit de l'ordre de  $10 \text{ ms}^{-1}$ .

### 3.7. APPLICATIONS : Résolution d'un problème de mécanique

Pour résoudre un problème de mécanique on suit le schéma suivant dans cet ordre :

- 1) Définir le système à étudier,
- 2) Définir le référentiel par rapport à quel on fait l'étude,
- 3) Déterminer le bilan des forces appliquées,
- 4) Choisir de la méthode qui convient pour la résolution du problème.

#### 3.6.5. Mouvements rectiligne uniformes

Le système étudié est un point matériel  $M$  de masse  $m$  (figure 3.8). Le référentiel dans lequel on effectue l'étude du mouvement est un référentiel galiléen.

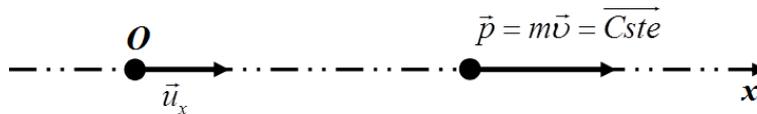


Figure 3.8 : Mouvement rectiligne uniforme

#### Étude dynamique :

Bilan des forces : le système n'est soumis à aucune force ou à un ensemble de forces dont la résultante est nulle. L'application du principe fondamental de la dynamique au point matériel  $M$  conduit à :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a}_{M/R} = \vec{0} \quad (3.28)$$

#### Étude cinématique :

Par définition un mouvement est rectiligne uniforme si

$$\vec{a} = 0 \rightarrow \vec{v} = \overline{cste} \quad (3.29)$$

Les conditions initiales sont les suivantes : à  $t = 0$ ,  $\vec{v}(t = 0) = \vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$  et  $OM(t = 0) = x_0$ .

Il s'ensuit que l'équation horaire du mouvement est :

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \Rightarrow dx = v_0 dt \Rightarrow \int_{x(0)=x_0}^{x(t)} dx = v_0 \int_0^t dt \Rightarrow x(t) = v_0 t + x_0 \quad (3.30)$$

### 3.6.6. Mouvements rectiligne uniformes varié

#### Étude dynamique

Le bilan des forces se résume à un ensemble de forces dont la résultante  $\vec{F}$  est constante. Le principe fondamental de la dynamique conduit à

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a}_{M/R} = \vec{F} \quad (3.31)$$

#### Étude cinématique :

En projetant l'équation précédente sur la direction du mouvement nous avons

$$a = \frac{F}{m} = \text{Cste} \quad (3.32)$$

Nous avons conditions initiales : à  $t = 0$ ,  $\vec{v}(t = 0) = v_0\vec{u}_x$  et  $OM(t = 0) = x_0$ .

$$\ddot{x} = \frac{F}{m} \Rightarrow \frac{d}{dt}\dot{x} = \frac{F}{m} \Rightarrow \int_{\dot{x}(0)=\dot{x}_0}^{\dot{x}(t)} d\dot{x} = \frac{F}{m} \int_0^t dt \quad (3.33)$$

$$\dot{x}(t) = \frac{F}{m}t + v_0 \quad (3.34)$$

ce qui conduit à l'équation horaire :

$$x(t) = \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2 + v_0 t + x_0 \rightarrow x(t) = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + x_0 \quad (3.35)$$

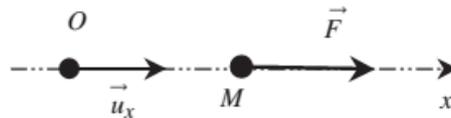


Figure 3.9 : Mouvement uniformément variés.

### 3.6.7. Mouvement d'un point matériel dans le champ de pesanteur

#### 3.6.7.1. Mouvement d'un point matériel dans le champ de pesanteur en absence de résistance de l'air

Pour établir l'équation de mouvement on suit la procédure de résolution d'un problème de mécanique décrite ci-dessus : le système qu'on veut étudier est un point matériel  $M$  de masse  $m$ , le référentiel est le référentiel terrestre que l'on considère galiléen. Maintenant effectuant le bilan des forces en négligeant la résistance de l'air (ce qui revient à négliger tout phénomène de frottements). La seule force qui s'exerce dans ces conditions sur le point matériel est son poids :  $\vec{P} = m\vec{g}$ . En employant le principe fondamental de la dynamique, on peut écrire :

$$m\vec{a} = \sum_i \vec{f}_i = m\vec{g} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g} \quad (3.36)$$

Pour poursuivre l'analyse du mouvement, il est nécessaire de préciser les conditions initiales et par conséquent de distinguer le cas de la chute libre et celui du tir d'un point matériel.

### 1) Cas d'un mouvement de chute libre.

Dans le cas d'un mouvement de chute libre, la seule force qui s'exerce sur le point matériel est dirigée selon la verticale, les seules modifications du mouvement auront lieu le long de cet axe. Par conséquent, on se limite à l'étude le long de l'axe vertical. On utilise une base de projection cartésienne en choisissant l'axe  $Oz$  vertical ascendant et on ne s'intéresse qu'au mouvement selon cet axe. Le point matériel est lâché d'une hauteur  $h$  ( $z(t=0) = h$ ) et sans vitesse initiale  $v(t=0) = 0$ . Etablissant dans ce cas les équations horaires du mouvement. La projection de l'équation vectoriel précédente sur l'axe du mouvement donne :

$$a = \ddot{z} = -g \quad (3.37)$$

Soit, par intégrations successives, et en tenant compte des conditions initiales :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = -gt \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h \end{cases} \quad (3.38)$$

Ainsi le mouvement est rectiligne uniformément accéléré le long de l'axe vertical  $Oz$ .

On peut étudier différentes caractéristiques du mouvement :

**Durée de chute  $T$  :** On l'obtient en résolvant l'équation  $z(t=T) = 0$ , soit :

$$0 = -\frac{1}{2}gT^2 + h, \text{ d'où } T = \sqrt{2h/g} \quad (3.39)$$

**Vitesse du point matériel quand il touche le sol :** Il s'agit de la valeur de la vitesse à l'instant  $t = T$  soit

$$v = gT = g\sqrt{2h/g} = \sqrt{2gh} \quad (3.40)$$

### 2) Cas d'une vitesse initiale verticale :

Lorsque le mobile effectue une chute avec une vitesse initiale verticale non nulle, son mouvement n'est pas intrinsèquement différent du cas de la chute libre : il est rectiligne et uniformément accéléré. En suivant le même raisonnement précédent, on trouve les équations horaires suivantes :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = -gt + v_0 \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h \end{cases} \quad (3.41)$$

La durée de chute est solution de l'équation

$$t^2 - 2\frac{v_0}{g}t - 2\frac{h}{g} = 0 \quad (3.42)$$

Le discriminant réduit de cette équation est :  $\Delta' = \left(\frac{v_0}{g}\right)^2 + 2\frac{h}{g}$ . Il est positif, on a donc deux solutions réelles :

$$T = \frac{v_0}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 + 2\frac{h}{g}} \quad (3.43)$$

et seule la solution positive  $T = \frac{v_0}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 + 2\frac{h}{g}}$  convient.

### 3) Cas d'une vitesse initiale faisant un angle $\alpha$ avec l'horizontale

On s'intéresse maintenant au cas où le point matériel est initialement animé d'une vitesse  $\vec{v}_0$  faisant un angle  $\alpha$  avec l'horizontale (Figure 3.10) et où la position initiale est  $(x_0, z_0)$ . Il suffit de limiter l'étude au plan  $xOz$  vertical dirigé par  $\vec{g}$  et la vitesse initiale  $\vec{v}_0$ . Dans ce plan, les projections de l'équation ( $\vec{a} = \vec{g}$ ) fournissent :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases} \quad (3.44)$$

Soit par intégrations successives et en tenant compte des conditions initiales :  $x(0) = x_0$ ,  $z(0) = z_0$  et  $\vec{v}_0 = \underbrace{v_0 \cos \alpha}_{v_{0x}} \vec{u}_x + \underbrace{v_0 \sin \alpha}_{v_{0z}} \vec{u}_z$ .

$$\begin{cases} \int dx = \int_0^t 0 \cdot dt \\ \int dz = \int_0^t -g \cdot dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = C \\ \dot{z}(t) = -gt + C' \end{cases} \quad (3.45)$$

Avec  $C = \dot{x}(0) = v_0 \cos \alpha$  et  $C' = \dot{z}(0) = v_0 \sin \alpha$ .

$$\text{Soit } \begin{cases} \dot{x}(t) = v_0 \cos \alpha = cste \\ \dot{z}(t) = -gt + v_0 \sin \alpha \end{cases} \quad (3.46)$$

$$\text{puis } \begin{cases} x(t) = \int_0^t \dot{x} \cdot dt = v_0 t \cos \alpha + x_0 \\ z(t) = \int_0^t \dot{z} \cdot dt = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin \alpha + z_0 \end{cases} \quad (3.47)$$

L'équation de la trajectoire s'obtient en éliminant le temps dans les équations horaires. De l'expression de  $x$  en fonction du temps, on tire :

$$t = \frac{x - x_0}{v_0 \cos \alpha} \quad (3.48)$$

Puis en reportant dans l'expression de  $z$  :

$$z(x) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \left( \tan \alpha + \frac{gx_0}{v_0^2 \cos^2 \alpha} \right) x + z_0 - x_0 \tan \alpha - \frac{gx_0^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \quad (3.49)$$

La trajectoire est donc une parabole. Par la suite, on prendra  $x_0 = z_0 = 0$  par souci de simplification. L'équation de la trajectoire s'écrit alors :

$$z(x) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha \quad (3.50)$$

**Remarque :** on peut également intégrer l'équation vectorielle ( $\vec{a} = \vec{g}$ ) et obtenir :

$$\vec{v}(t) = \vec{g}t + \vec{v}_0 \quad \text{et} \quad \overline{OM}(t) = \frac{1}{2} \vec{g}t^2 + \vec{v}_0 t + \overline{OM}_0. \quad (3.51)$$

Cela permet de regrouper les deux cas et de ne pas projeter que pour étudier la trajectoire.

#### Hauteur maximale atteinte

Elle correspond au sommet de la parabole et s'obtient en résolvant l'équation :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{-gx}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + \tan \alpha = 0 \quad \text{soit} \quad x_m = \frac{\sin \alpha \cos \alpha v_0^2}{g} \quad (3.52)$$

**L'altitude maximale est alors :**

$$z_m = \frac{\sin^2 \alpha v_0^2}{2g} \quad (3.53)$$

#### Portée du tir

La portée du tir correspond à l'endroit où le point matériel retombe sur le sol qu'on suppose plan et horizontal (donc à l'altitude  $z = 0$ ). On obtient l'expression de la portée en résolvant l'équation :

$$z(x) = 0 \rightarrow \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha = x \left( \tan \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x \right) = 0 \quad (3.54)$$

On obtient deux solutions :

$$x = 0 \quad \text{et} \quad x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \quad (3.55)$$

La solution  $x = 0$  correspond à la position d'origine du tir qui appartient naturellement à la trajectoire. Il est normal de la trouver mais elle ne présente pas d'intérêt ici. La portée du tir est donc :

$$x_p = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \quad (3.56)$$

On note qu'elle est maximale pour  $\alpha = \pi/4$ . C'est d'ailleurs l'angle avec lequel sautent les grenouilles pour retomber le plus loin possible.

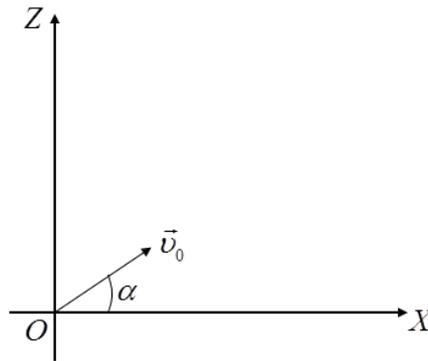


Figure 3.10 : conditions initiales d'une tire dans le vide.

### 3.6.7.2. Mouvement d'un point matériel dans le champ de pesanteur en présence de résistance de l'air

On considère uniquement le cas de force de frottement proportionnelle à la vitesse ( $\vec{f} = -k\vec{v}$ ). Le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$m\vec{a} = -k\vec{v} + m\vec{g} \quad (3.57)$$

On suppose toujours que la vitesse initiale est nulle et que la masse est lâchée d'une hauteur  $h$  par rapport au sol. Les deux forces  $\vec{P}$  et  $\vec{f}$  sont verticales. Le point matériel acquiert une vitesse verticale qui entraîne l'existence d'une force de frottement également verticale. La projection de l'équation vectorielle précédente selon l'axe du mouvement  $Oz$  (ascendant) conduit à :

$$a\vec{u}_z = -\frac{k}{m}v\vec{u}_z + g(-\vec{u}_z) \Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = -g \quad (3.58)$$

La solution de cette équation est la somme de la solution générale de l'équation homogène associée  $v_H(t)$  et d'une solution particulière  $v_p(t)$ . La résolution de l'équation homogène associée conduit à :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{k}{m}dt \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\frac{k}{m} \int dt \Rightarrow \ln v = -\frac{k}{m}t + Cste \quad (3.59)$$

$$\text{Soit } v_H(t) = C \exp(-(k/m)t), \quad (3.60)$$

où  $C$  est une constante.

La recherche d'une solution particulière est simple puisque le second membre est constant :

$$v_p(t) = -\frac{m}{k}g \quad (3.61)$$

La solution générale est donc :

$$v(t) = C \exp(-t/\tau) - \frac{m}{k}g \quad (3.62)$$

On détermine la constante à l'aide des conditions initiales à savoir

$$v(t=0) = 0 = C - \frac{m}{k}g, \quad (3.63)$$

Soit  $C = \frac{m}{k}g$  et finalement on obtient

$$v(t) = \frac{m}{k}g (\exp(-t/\tau) - 1), \text{ avec } \tau = m/k. \quad (3.64)$$

La position se déduit alors facilement par intégration par rapport au temps :

$$z = -\frac{m}{k}gt - \frac{m^2}{k^2}g \exp(-t/\tau) + K \quad (3.65)$$

et la constante  $K$  s'obtient en tenant compte de la position initiale :

$$z(t=0) = h = -\frac{m^2}{k^2}g + K \quad \text{soit} \quad K = h + \frac{m^2}{k^2}g \quad (3.66)$$

Et finalement

$$z(t) = -\frac{m}{k}gt + \frac{m^2}{k^2}g (1 - \exp(-t/\tau)) + h \quad (3.67)$$

### Vitesse limite

On peut à partir des résultats précédents établir l'existence d'une vitesse limite obtenue quand le temps tend vers l'infini :

$$v_l = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = -\frac{m}{k}g \quad (3.68)$$

On peut noter qu'il s'agit de la valeur obtenue quand l'accélération s'annule.

3.6.8. Pendule élastique

Considérons le cas classique d'une masse accrochée à un ressort à spires non jointives pouvant travailler aussi bien en compression qu'en étirement. On tire sur la masse de sa position d'équilibre et on la lâche. On cherche à établir l'équation du mouvement de la masse  $m$ . Pour cet objectif on applique les quatre étapes de résolution d'un problème mécanique. Le système étudié est la masse accrochée au ressort considérée comme point matériel de masse  $m$ . le référentiel par rapport auquel en fait notre étude est celui du laboratoire considéré comme galiléen. Deux forces s'exerçant sur la masse, le poids  $m\vec{g}$  et la force de rappel (tension) du ressort  $\vec{f} = -k(l-l_0)\vec{u}_x$  (où  $l_0$  désigne la longueur du ressort à vide et  $l$  la longueur du ressort avec la masse à l'instant considéré). Appliquant le principe fondamental de la dynamique, on trouve :

$$m\vec{g} - k(l-l_0)\vec{u}_x = m\vec{a} \tag{3.69}$$

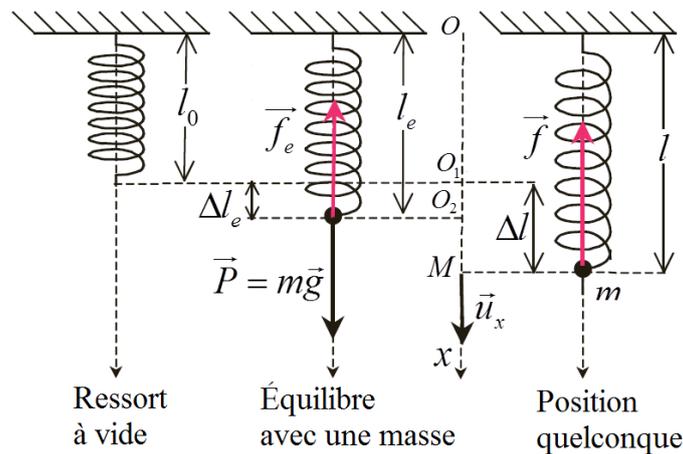


Figure 3.11 : Masse suspendue à un ressort.

A l'équilibre, on obtient en projection sur l'axe verticale :

$$-k(l_e - l_0) + mg = 0 \tag{3.70}$$

Le ressort a donc une longueur à l'équilibre égale à :

$$l_e = l_0 + \frac{mg}{k} \tag{3.71}$$

On choisit toujours l'origine de l'axe vertical  $Ox$  à la position d'équilibre à savoir quand le ressort a une longueur  $l_e$ . L'abscisse  $x$  est alors le déplacement de la masse  $m$  par rapport à sa position d'équilibre :

$$l = l_e + x \tag{3.72}$$

Il s'agit d'une quantité algébrique pouvant être négative ou positive (figure 3.11). La projection du principe fondamental de la dynamique le long de l'axe du mouvement conduit à l'équation scalaire suivante :

$$m\ddot{x} = mg - k(l - l_0) = mg - k(l_e + x - l_0) \quad (3.73)$$

En reportant l'expression obtenue pour  $l_e$ , on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (3.74)$$

En posant  $\omega_0^2 = k/m$ , l'équation précédente peut se réécrire comme :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (3.75)$$

Il s'agit de l'équation d'un oscillateur harmonique dont la solution s'écrit :

$$x(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t \quad (3.76)$$

A et B deux constantes. Si on suppose qu'initialement on a  $x(0) = x_0$  et  $\dot{x}(0) = v_0$ , on en déduit :

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t \quad (3.77)$$

### 3.7.9. Pendule simple

Un pendule simple est constitué d'une masse  $m$  considérée ponctuelle fixée à l'extrémité libre  $M$  d'un fil (l'autre  $O$  étant fixe par rapport à la Terre). La longueur du fil est  $l$ . On écarte la masse de sa position d'équilibre et on la lâche sans lui donner de vitesse (vitesse initiale nulle). On considère le mouvement de la masse  $m$  par rapport à un référentiel galiléen  $R(O, x, y, z, t)$  et on choisit la base mobile  $(M; \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$  pour étudier le mouvement.

Les forces extérieures appliquées sont le poids  $\vec{P} = m\vec{g}$  et la tension  $\vec{T}$  du fil. La relation fondamentale de la dynamique conduit à :

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}_{G/R} = m(-l\dot{\theta}^2\vec{u}_\rho + l\ddot{\theta}\vec{u}_\theta) \quad (3.78)$$

La projection sur les vecteurs de base conduit à :

$$\begin{cases} mg \cos \theta - T = -ml\dot{\theta}^2 & \dots\dots\dots(1) \\ -mg \sin \theta = ml\ddot{\theta} & \dots\dots\dots(2) \end{cases} \quad (3.79)$$

De l'équation (2), on peut écrire l'équation différentielle du mouvement de la masse  $m$  :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (3.80)$$

C'est une équation différentielle *non linéaire* à cause de la présence du terme en sinus. La solution n'est donc pas facile à obtenir sauf si dans certaines conditions l'équation peut être assimilée à une équation linéaire. Cette condition est satisfaite dans le cas où l'angle  $\theta$  est petit, c'est-à-dire lorsque  $\sin \theta = \theta$ . Dans ce cas, l'équation différentielle devient :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0 \rightarrow \ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0, \text{ avec } \omega^2 = \frac{g}{l} \quad (3.81)$$

C'est l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique. La solution de cette équation différentielle s'écrit :

$$\theta = \theta_m \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (3.82)$$

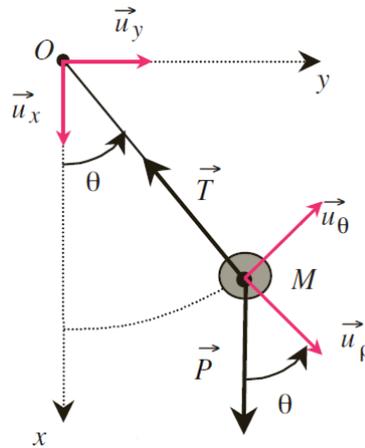


Figure 12 : Pendule simple en mouvement

### 3.8. Moment cinétique et théorème du moment cinétique

#### 3.8.5. Moment d'une force.

Le moment d'une force en un point O quelconque,

$$\vec{M}_{M/O} = \vec{OM} \wedge \vec{F}, \quad (3.83)$$

définit l'efficacité d'une force  $\vec{F}$  appliquée en un point M pour effectuer un mouvement de rotation autour d'un axe passant par le point O et orthogonal au plan  $(\vec{OM}, \vec{F})$ . Il s'agit d'un vecteur orthogonal au plan  $(\vec{OM}, \vec{F})$ .

Le moment par rapport à un point O d'une grandeur vectorielle liée à un point M est :

$$\vec{M}_{M/O}(\vec{X}) = \vec{OM} \wedge \vec{X} \quad (3.84)$$

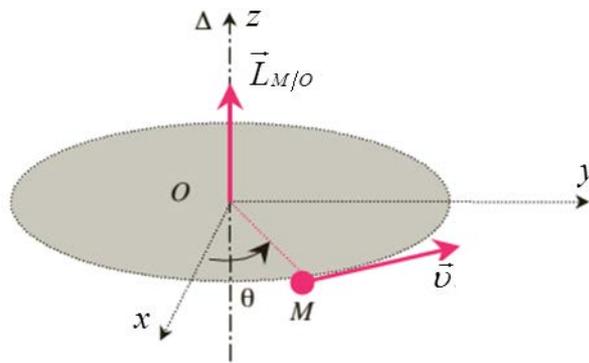
### 3.8.6. Moment cinétique d'un point matériel

#### 3.8.6.1. Définition

Considérons un point matériel  $M$  en rotation autour d'un point fixe dans le référentiel galiléen  $R(O, x, y, z)$ . Sa vitesse, dans ce référentiel, est notée  $\vec{v}$ . On appelle moment cinétique du point  $M$  par rapport à un point fixe  $O$ ,  $\vec{L}_{M/O}$ , le moment par rapport à  $O$  de sa quantité de mouvement c'est-à-dire :

$$\vec{L}_{M/O} = \overline{OM} \wedge \vec{p} = \overline{OM} \wedge m\vec{v} \quad (3.85)$$

Le moment cinétique  $\vec{L}_{M/O}$  est un vecteur perpendiculaire au plan formé par  $\overline{OM}$  et  $\vec{v}$ , orienté dans le sens usuel d'un produit vectoriel et de module  $\|\vec{L}_{M/O}\| = \|\overline{OM}\| \cdot \|\vec{p}\| \cdot \sin \alpha$  où  $\alpha$  est l'angle entre  $\overline{OM}$  et  $\vec{v}$  (Figure 3.14).



**Figure 3.14 :** Représentation du moment cinétique d'une particule (un point  $M$ ) en mouvement autour de  $O$ .

Le moment cinétique correspond au moment du vecteur quantité de mouvement. Ainsi le moment d'un système de points matériels ( $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$ ) est donné par :

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \sum_{i=1}^n (\overline{OM}_i \wedge \vec{P}_i) \quad (3.86)$$

#### 3.8.6.2. Expression analytique du moment cinétique

En coordonnées cartésiennes où le vecteur position  $\overline{OM}$  et la quantité de mouvement  $\vec{p}$  sont :

$$\begin{cases} \overline{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z \quad \dots \\ \vec{p} = p_x\vec{u}_x + p_y\vec{u}_y + p_z\vec{u}_z \end{cases} \quad (3.87)$$

On a par conséquent :

$$\vec{L}_{M/O} = \overline{OM} \wedge \vec{p} = L_x \vec{u}_x + L_y \vec{u}_y + L_z \vec{u}_z \quad (3.88)$$

$$\text{Tel que : } \begin{cases} L_x = yp_z - zp_y \\ L_y = zp_x - xp_z \\ L_z = xp_y - yp_x \end{cases} \quad (3.89)$$

Si le mouvement est plan et s'effectue dans xOy,  $\vec{L}_{M/O}$  est porté par  $\overline{Oz}$  ( $\vec{L}_{M/O} = L_{M/O} \vec{k}$ ). Il est alors plus simple d'utiliser les coordonnées polaires  $r$  et  $\theta$ . On a alors dans ce cas :

$$\vec{L}_{M/O} = \overline{OM} \wedge m\vec{v} \text{ avec } \overline{OM} = r\vec{u}_r \text{ et } \vec{v} = r\dot{\theta}\vec{u}_\theta, \text{ soit :}$$

$$\vec{L}_{M/O} = mr^2\dot{\theta}\vec{k} \quad (3.90)$$

### 3.8.6.3. Théorème du moment cinétique

En dérivant, par rapport au temps, l'expression donnant  $\vec{L}_{M/O}$ , on a :

$$\frac{d\vec{L}_{M/O}}{dt} = \frac{d(\overline{OM} \wedge \vec{p})}{dt} = \frac{d\overline{OM}}{dt} \wedge \vec{p} + \overline{OM} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (3.91)$$

Le premier terme est nul car  $\frac{d\overline{OM}}{dt} = \vec{v} = \frac{\vec{p}}{m}$  et  $\frac{\vec{p}}{m} \wedge \vec{p} = \vec{0}$  et comme  $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$  où  $\vec{F}$  est la résultante des forces appliquées à  $M$  ( $\vec{F} = \sum \vec{F}_{ext}$ ), on a alors :

$$\frac{d\vec{L}_{M/O}}{dt} = \overline{OM} \wedge \vec{F} \quad (3.92)$$

Soit :

$$\frac{d\vec{L}_{M/O}}{dt} = \mathbf{M}_{M/O}(\vec{F}) \quad (3.93)$$

D'où le théorème :

La dérivée (par rapport au temps) du moment cinétique d'un point matériel  $M$  par rapport à un point fixe  $O$  dans un référentiel ( $R$ ) galiléen est égale au moment par rapport au même point  $O$  de la résultante des forces extérieures appliquées au point  $M$ .

$$\frac{d\vec{L}_{M/O}}{dt} = \overline{OM} \wedge \vec{F} = \mathbf{M}_{M/O}(\sum \vec{F}_{ext}) \quad (3.94)$$

Cette formulation s'interprète comme le principe fondamental de la dynamique pour les mouvements de rotation. Pour un point matériel en rotation autour d'un axe fixe, on peut

appliquer indifféremment le principe fondamental de la dynamique ou le théorème du moment cinétique. Si la somme des moments des forces extérieures est nulle alors le moment cinétique est une grandeur vectorielle constante pouvant possiblement être nulle.

$$\text{Si } \vec{L}_{M/O} = \vec{0} \Rightarrow \frac{d\vec{L}_{M/O}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \overline{OM} \wedge \sum \vec{F}_{ext} = \vec{0},$$

$$\begin{cases} \vec{F} = \sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} & \rightarrow \text{le système est isolé} \\ \overline{OM} // \vec{F} \Rightarrow \overline{OM} // \vec{a} & \rightarrow \text{les forces sont centrales} \end{cases} \quad (3.95)$$

Dans ce cas, le point matériel soit en mouvement rectiligne (vecteur position et vitesse ont même direction) soit il est en équilibre (vitesse nulle) dans le référentiel d'étude.

Dans le cas où le moment cinétique est non nul le mouvement est plan. En effet, les vecteurs vitesse et position sont perpendiculaires à tout instant au vecteur moment cinétique constant. Ils sont donc toujours dans le même plan qui correspond au plan du mouvement.

### 3.8.7. Notion de force centrale

Un mouvement est dit central ou sous l'influence d'une force centrale si la résultante des forces appliquées sur le mobile est à tout instant dirigée vers un point fixe C :

$$\overline{CM} // \sum \vec{F}_{ext} \Rightarrow \overline{CM} \wedge \sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \quad (3.96)$$

### 3.8.8. Application

**Exercice 1 :** Soient trois forces :  $\vec{F}_1 = \vec{u}_x$  ,  $\vec{F}_2 = -2\vec{u}_y + \vec{u}_z$  ,  $\vec{F}_3 = -\vec{u}_x + 0.5\vec{u}_y - 4\vec{u}_z$  .

Déterminer la force résultante  $\vec{F}$  . On suppose que les forces s'appliquent au point A(4, -3, 1) :

- 1) Calculer le moment,  $(\vec{M}_{M/O})_i = \overline{OA} \wedge \vec{F}_i$  , de chacune des forces par rapport à O(0,0).
- 2) Calculer la somme  $\vec{M}_{M/O}$  des moments.
- 3) Calculer le moment  $\vec{M}'_{M/O} = \overline{OA} \wedge \vec{F}$  de la résultante  $\vec{F}$  par rapport à O.
- 4) Comparer  $\vec{M}_{M/O}$  à  $\vec{M}'_{M/O}$  .
- 5) Calculer l'angle de  $\vec{M}_{M/O}$  avec  $\vec{F}$  . Pouvait-on prévoir le résultat ?

**Solution :**

La force résultante  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{u}_x - 2\vec{u}_y + \vec{u}_z - \vec{u}_x + 0.5\vec{u}_y - 4\vec{u}_z = -1.5\vec{u}_y - 3\vec{u}_z$

- 1) Le moment de chacune des trois forces

$$\left(\overline{\mathbf{M}}_{M/O}\right)_1 = \overline{\mathbf{M}}_{M/O}(\overline{\mathbf{F}}_1) = \overline{\mathbf{OA}} \wedge \overline{\mathbf{F}}_1 = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{u}_y + 3\vec{u}_z$$

$$\left(\overline{\mathbf{M}}_{M/O}\right)_2 = \overline{\mathbf{M}}_{M/O}(\overline{\mathbf{F}}_2) = \overline{\mathbf{OA}} \wedge \overline{\mathbf{F}}_2 = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ 4 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{u}_x - 4\vec{u}_y - 8\vec{u}_z$$

$$\left(\overline{\mathbf{M}}_{M/O}\right)_3 = \overline{\mathbf{M}}_{M/O}(\overline{\mathbf{F}}_3) = \overline{\mathbf{OA}} \wedge \overline{\mathbf{F}}_3 = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ 4 & -3 & 1 \\ -1 & 1/2 & -4 \end{vmatrix} = 11.5\vec{u}_x + 15\vec{u}_y - \vec{u}_z$$

2) Le moment total

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{M}}_{M/O} &= \left(\overline{\mathbf{M}}_{M/O}\right)_1 + \left(\overline{\mathbf{M}}_{M/O}\right)_2 + \left(\overline{\mathbf{M}}_{M/O}\right)_3 = (\vec{u}_y + 3\vec{u}_z) + (-\vec{u}_x - 4\vec{u}_y - 8\vec{u}_z) + (11.5\vec{u}_x + 15\vec{u}_y - \vec{u}_z) \\ &= 10.5\vec{u}_x + 12\vec{u}_y - 6\vec{u}_z \end{aligned}$$

3) Le moment  $\overline{\mathbf{M}}'_{M/O} = \overline{\mathbf{OA}} \wedge \overline{\mathbf{F}}$

$$\overline{\mathbf{M}}'_{M/O} = \overline{\mathbf{OA}} \wedge \overline{\mathbf{F}} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ 4 & -3 & 1 \\ 0 & -1.5 & -3 \end{vmatrix} = 10.5\vec{u}_x + 12\vec{u}_y - 6\vec{u}_z$$

4)  $\overline{\mathbf{M}}'_{M/O} = \overline{\mathbf{M}}_{M/O} = 10.5\vec{u}_x + 12\vec{u}_y - 6\vec{u}_z$

5) L'angle entre  $\overline{\mathbf{M}}'_{M/O}$  et  $\overline{\mathbf{F}}$

$$\begin{aligned} \cos(\overline{\mathbf{M}}'_{M/O}, \overline{\mathbf{F}}) &= \frac{\overline{\mathbf{M}}'_{M/O} \cdot \overline{\mathbf{F}}}{\|\overline{\mathbf{M}}'_{M/O}\| \cdot \|\overline{\mathbf{F}}\|} = \frac{(10.5\vec{u}_x + 12\vec{u}_y - 6\vec{u}_z) \cdot (-1.5\vec{u}_y - 3\vec{u}_z)}{\sqrt{10.5^2 + 12^2 + (-6)^2} \sqrt{(-1.5)^2 + (-3)^2}} \\ &= \frac{-18 + 18}{\sqrt{10.5^2 + 12^2 + (-6)^2} \sqrt{(-1.5)^2 + (-3)^2}} = 0 \end{aligned}$$

Alors  $(\overline{\mathbf{M}}'_{M/O}, \overline{\mathbf{F}}) = \pi/2 \rightarrow \overline{\mathbf{M}}'_{M/O} \perp \overline{\mathbf{F}}$ .

**Exercice 2 :** Du sommet O d'une tour, on lance à l'instant  $t = 0$ , dans le champ de gravitation terrestre  $\vec{g} = -\|\vec{g}\|\vec{u}_z$ , un objet assimilable à un point matériel A de masse  $m$  avec une vitesse initiale horizontale  $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_y$ . On néglige tout frottement, on suppose le référentiel terrestre galiléen et  $\|\vec{g}\| = 9.81m/s^2$ .

1) Rappeler l'expression des coordonnées y et z de A à l'instant  $t$  (origine des coordonnées en O).

2) En déduire l'expression :

a) Du moment par rapport à O des forces agissant sur A à l'instant  $t$  :  $\vec{M}_{A/O}(t)$

b) Du moment cinétique de A par rapport à O à l'instant  $t$  :  $\vec{L}_{A/O}(t)$

3) Vérifier le théorème du moment cinétique.

**Solution :**

1) L'expression des coordonnées  $y$  et  $z$  de A à l'instant  $t$  :

$$\begin{cases} y(t) = v_0 t \\ z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

2)

a) L'expression du moment par rapport à O des forces agissant sur A à l'instant  $t$  :

$$\begin{aligned} \vec{M}_{A/O}(t) &= \vec{M}_{A/O}(\vec{P})(t) = \vec{OA} \wedge \vec{P} = (v_0 t \vec{u}_y - 0.5 g t^2 \vec{u}_z) \wedge (-m g \vec{u}_z) \\ &= -m g v_0 t (\vec{u}_y \wedge \vec{u}_z) \\ &= -m g v_0 t \vec{u}_x \end{aligned}$$

b) L'expression du moment cinétique de A par rapport à O à l'instant  $t$  :

$$\begin{aligned} \vec{L}_{A/O}(t) &= \vec{M}_{A/O}(\vec{p})(t) = \vec{OA} \wedge \vec{p} = \vec{OA} \wedge m \vec{v} \\ &= (v_0 t \vec{u}_y - 0.5 g t^2 \vec{u}_z) \wedge m (v_0 \vec{u}_y - g t \vec{u}_z) \\ &= -m g v_0 t^2 (\vec{u}_y \wedge \vec{u}_z) - 0.5 m g v_0 t^2 (\vec{u}_z \wedge \vec{u}_y) \\ &= -m g v_0 t^2 \vec{u}_x - 0.5 m g v_0 t^2 (-\vec{u}_x) \\ &= -0.5 m g v_0 t^2 \vec{u}_x \end{aligned}$$

3) Vérification du théorème du moment cinétique.

$$\frac{d\vec{L}_{A/O}}{dt} = \frac{d}{dt} (-0.5 m g v_0 t^2 \vec{u}_x) = -m g v_0 t \vec{u}_x = \vec{M}_{A/O}(t)$$

Donc le théorème du moment cinétique est vérifié.

**CHAPITRE 4 :**  
**TRAVAIL ET ENERGIE**

# CHAPITRE 4 :

## TRAVAIL ET ENERGIE

### SOMMAIRE

---

4.1. Travail d'une force	89
<b>4.1.1.</b> Travail d'une force constante sur un déplacement rectiligne	89
<b>4.1.2.</b> Travail élémentaire	90
<b>4.1.3.</b> Travail total d'une force le long d'un trajet fini	90
4.2. Puissance d'une force	93
4.3. Théorème de l'énergie cinétique	94
<b>4.3.1.</b> Définition de l'énergie cinétique	94
<b>4.3.2.</b> Théorème de l'énergie cinétique en référentiel galiléen	94
<b>4.3.3.</b> Application : utilisation du théorème de l'énergie cinétique pour résoudre un problème physique	96
4.4. Energie potentielle et forces conservatives	98
<b>4.4.1.</b> Définitions	98
<b>4.4.2.</b> Définition de l'énergie potentielle	98
<b>4.4.3.</b> Exemples d'énergie potentielle	99
4.4.3.1. Energie potentielle de pesanteur	99
4.4.3.2. Energie potentielle élastique	100
4.4. Energie mécanique	101
4.4.1. Définition de l'énergie mécanique	101
4.4.2. Applications : Utilisation de l'énergie mécanique pour résoudre un problème physique	102

---

4.5.Travail d'une force

En physique, le terme travail permet de décrire le résultat de l'application d'une force servant à déplacer un objet sur une certaine distance. C'est en 1686 que Gottfried Leibniz a proposé de caractériser l'effet d'une force par une grandeur scalaire appelée travail de la force.

4.5.1. Travail d'une force constante sur un déplacement rectiligne

Lorsqu'on applique une force pour déplacer un corps, l'effort qu'on doit fournir est d'autant plus important que la distance du déplacement est grande et que la force appliquée est intense. Le travail d'une force  $\vec{F}$  constante au cours d'un déplacement d'un point A vers un point B (distance  $AB = d$ ) est défini comme suit :

$$\vec{F} = \text{cste sur } \overline{AB} \Rightarrow W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overline{AB} = \|\vec{F}\| \cdot \|\overline{AB}\| \cos \alpha, \tag{4.1}$$

avec  $\alpha$  l'angle que fait le vecteur force  $\vec{F}$  avec le vecteur déplacement  $\overline{AB}$ .

Le travail est une grandeur scalaire qui peut être négative, nulle ou positive selon la direction de la force  $\vec{F}$  par rapport au déplacement (le trajet). Lorsque la force  $\vec{F}$  est exercée dans le sens du mouvement (Fig. 4.1(a)), on dit que le travail de  $\vec{F}$  est moteur ( $W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) > 0$ ) car il contribue au déplacement du point M. Si  $\vec{F}$  est perpendiculaire à  $\overline{AB}$  le travail est nul ( $W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = 0$ ), on dit que la force ne travaille pas le long du trajet considéré<sup>1</sup>. Lorsque la force s'exerce dans le sens opposé au mouvement (Fig. 4.1(b)), on dit que le travail de  $\vec{F}$  est résistant car il s'oppose au déplacement de M ( $W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) < 0$ ).

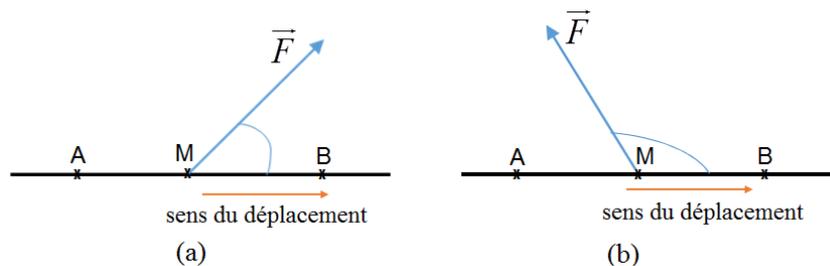


Figure 4.1: a) Travail moteur de  $\vec{F}$  . b) Travail résistant de  $\vec{F}$  .

Dans le Système International d'unités, le travail s'exprime en Joule (symbole : J) en hommage à James Prescott Joule. Une analyse dimensionnelle donne

$$[W] = ML^2T^{-2} \quad \Rightarrow \quad 1J = N.m = kg.m^2.s^{-2}$$

<sup>1</sup> Deux exemples de forces importantes sont concernées par cette propriété : 1) les forces de gravitation exercées sur un corps en rotation autour d'un point avec la force exercée toujours radiale et donc perpendiculaire au vecteur déplacement tangent à la trajectoire circulaire ; 2) la réaction du support dans le cas où il n'y a pas de frottement, est toujours perpendiculaire au support et donc ne travaille pas.

4.5.2. Travail élémentaire

Soit un point matériel  $M$ , soumis à une force  $\vec{F}$  et à un déplacement élémentaire  $\vec{dl}$  le long d'un trajet orienté  $(\zeta)$ . On suppose  $\vec{dl}$  suffisamment petit pour considérer que la force est constante le long de  $(\zeta)$ . Le travail élémentaire  $\delta W$  de la force  $\vec{F}$  associé au déplacement  $\vec{dl}$  s'écrit alors :

$$\delta W = \vec{F} \cdot \vec{dl} = \|\vec{F}\| \times \|\vec{dl}\| \cos(\vec{F}, \vec{dl}) \tag{4.2}$$

Le vecteur déplacement élémentaire,  $\vec{dl}$ , le long d'un trajet quelconque est toujours tangent à la trajectoire.

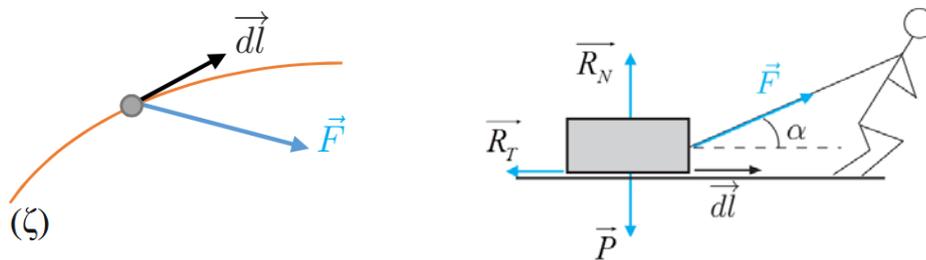


Figure 4.2: Cas d'un vecteur force restant constant au cours du déplacement : exemple d'une caisse tirée sur un plan horizontal.

Dans le cas où la force n'est pas constante au cours du déplacement, il est plus commode d'écrire le travail élémentaire de la force  $\vec{F}$  de manière analytique. En coordonnées cartésiennes, la projection de la force  $\vec{F}$  sur la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  s'écrit :  $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$  (où  $F_x, F_y$  et  $F_z$  sont respectivement les composantes de  $\vec{F}$  sur les axes  $\vec{Ox}, \vec{Oy}$  et  $\vec{Oz}$ ). Le vecteur déplacement élémentaire  $\vec{dl}$  en coordonnées cartésiennes s'écrit :  $dl = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$  (où  $dx, dy$  et  $dz$  sont respectivement les composantes de  $\vec{dl}$  sur les axes  $\vec{Ox}, \vec{Oy}$  et  $\vec{Oz}$ ). Le travail élémentaire de  $\vec{F}$  est alors :

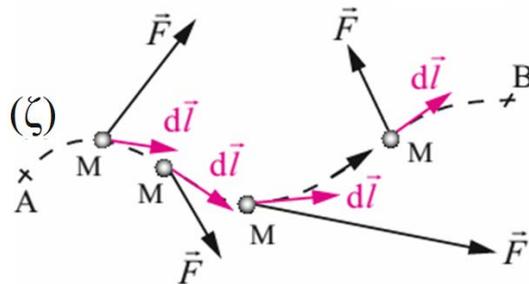
$$\delta W = \vec{F} \cdot \vec{dl} = F_x dx + F_y dy + F_z dz \tag{4.3}$$

4.5.3. Travail total d'une force le long d'un trajet fini

Soit un point matériel  $M$  qui sous l'action d'une force  $\vec{F}$ , qui peut varier pendant le déplacement, décrit un trajet orienté fini sur la courbe  $(\zeta)$  entre les deux positions  $A$  et  $B$ . Le travail total de la force entre  $A$  et  $B$  est alors la somme des travaux élémentaires définis entre ces deux points. Dans le cas général, le module et la direction du vecteur force varient d'un

point à l'autre de ce chemin (Figure 4.3), et le travail total s'exprime sous la forme d'une intégrale le long de ce chemin :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} \quad (4.4)$$



**Figure 4.3:** cas général : le vecteur force varie le long du trajet ( $\zeta$ ).

Compte tenu de l'expression analytique du travail élémentaire de  $\vec{F}$ , l'expression analytique du travail total de le long du trajet AB s'écrit :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \int_A^B (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \quad (4.5)$$

Suivant les symétries des problèmes étudiés et l'expression de la force  $\vec{F}$ , il n'est pas toujours pertinent d'exprimer le vecteur déplacement élémentaire,  $d\vec{l}$ , en coordonnées cartésiennes. Il est parfois plus commode de l'exprimer en coordonnées cylindriques (ou polaires) ou sphériques.

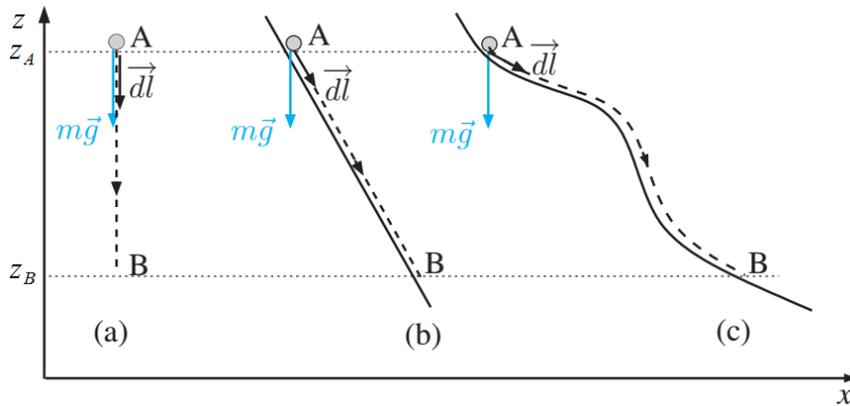
**Exemple 1 :** Reprenons l'exemple de la caisse déplacée d'une distance  $l$  sur un plan horizontal (Figure 3.2). Les forces s'exerçant sur elle sont la réaction normale du sol  $\vec{R}_N$ , la force de frottement solide  $\vec{R}_T$ , le poids  $\vec{P}$ , et la force de traction  $\vec{F}$  dont la direction fait un angle  $\alpha$  avec l'horizontale. En utilisant la définition (4.2) du travail élémentaire, il apparaît que les travaux de  $\vec{R}_N$  et de  $\vec{P}$  sont nuls. Le travail de  $\vec{R}_T$  est négatif ( $(\vec{R}_T, d\vec{l}) = 180^\circ \rightarrow \cos(180^\circ) = -1$ ), on dit qu'il est résistant. Le travail de  $\vec{F}$  est positif, on le qualifie de moteur. Soit finalement :

$$\delta W = \left( \|\vec{F}\| \cos \alpha - \|\vec{R}_T\| \right) \|d\vec{l}\| \quad (4.6)$$

L'expression entre parenthèse reste constante tout au long du déplacement, et peut par conséquent être sortie de l'intégrale (4.4). L'expression du travail total est donc simplement :

$$W = \left( \|\vec{F}\| \cos \alpha - \|\vec{R}_T\| \right) L \quad (4.7)$$

**Exemple 2 : (travail du poids).** Un corps de masse  $m$ , lâché en un point  $A$  d'ordonnée  $z_A$ , tombe verticalement (figure 4.4a) jusqu'au point  $B$  d'ordonnée  $z_B$ . Le travail du poids est dans ce cas facile à calculer car les vecteurs  $\vec{g}$  et  $\vec{dl}$  sont parallèles sur tout le chemin  $AB$ , donc :  $\delta W = \vec{P} \cdot \vec{dl} = mg \cdot dl$ . L'intégration sur le chemin  $AB$  est immédiate :  $W = mg \cdot AB = mg(z_A - z_B)$ .



**Figure 4.4:** Travail du poids entre deux points A et B. (a) Chute verticale. (b) Chute sur un plan incliné. (c) Chute sur un support de forme quelconque.

Considérons la même masse  $m$ , glissant cette fois le long d'un plan incliné (figure 4.4.b). On peut calculer  $\delta W$  comme précédemment, en faisant intervenir l'angle que fait le plan incliné avec l'horizontale. Mais on peut aussi utiliser l'expression du produit scalaire en fonction des coordonnées des vecteurs  $\vec{g}(0, -g)$  et  $dl(dx, dy)$ :  $\delta W = 0 - mg \cdot dy$  soit :

$$W = - \int_{z_A}^{z_B} mg \cdot dz = mg(z_A - z_B) \quad (4.8)$$

c'est-à-dire le même résultat que pour une chute verticale. Dans le cas où la masse  $m$  glisse sur un support de forme quelconque (figure 4.4.c), cette fois l'angle entre les vecteurs  $m\vec{g}$  et  $\vec{dl}$  varie tout au long du trajet  $AB$ , mais en exprimant le produit scalaire à l'aide des coordonnées, on retrouve le même résultat  $W = mg(z_A - z_B)$ . Nous pouvons donc conclure que le travail du poids entre deux points ne dépend que de la différence d'altitude entre le point de départ et d'arrivée, et pas du chemin suivi pour aller de l'un à l'autre. Dans le cas d'une chute, le travail du poids est moteur ( $W > 0$ ), c'est-à-dire que le mouvement se fait spontanément. Vous vérifierez sans difficulté que si la masse  $m$  se déplace de  $B$  vers  $A$ , le travail du poids est résistant ( $W < 0$ ) : dans ce cas  $m$  ne se déplacera pas spontanément de  $B$  en  $A$  ; il faudra qu'une force extérieure fournisse le travail  $-W$  pour réaliser ce déplacement.

**Exemple 2 : Travail de la force de frottement.** Une lugeuse glisse sur une piste de forme quelconque et l'on suppose que la force de frottement qu'exerce la neige sur la luge est constante. Calculons le travail produit par les forces de contact après avoir parcouru une distance  $L$ . Tout d'abord, l'action normale ( $\vec{R}_N$ ) à la surface ne travaille pas puisqu'elle est perpendiculaire à la vitesse de glissement. Le travail des forces de contact s'identifie donc avec le travail de la force de frottement :

$$W_{A \rightarrow B} = \int_{\zeta_{AB}} \vec{R}_T \cdot d\vec{l} = - \int_{\zeta_{AB}} R_T \cdot dl = -R_T \cdot L \quad (4.9)$$

Contrairement au poids, le travail des forces de frottement dépend de la longueur du trajet et donc de la forme du chemin parcouru.

#### 4.6. Puissance d'une force

La notion de la puissance a été introduite pour mesurer à quel rythme une force travaille. La puissance d'une force "notée P" exprime le travail effectué par la force par unité de temps. Soit  $dW(\vec{F})$  le travail élémentaire accompli par une force  $\vec{F}$  pendant un intervalle de temps  $dt$ . Le point d'application de  $\vec{F}$  (un point matériel  $M$ ) parcourt une distance élémentaire  $d\vec{l}$  durant cet intervalle de temps. La puissance instantanée de la force  $\vec{F}$ , s'écrit :

$$P = \frac{dW(\vec{F})}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{l}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{l}}{dt} \quad (4.10)$$

La quantité  $d\vec{l}/dt$  correspond à la vitesse instantanée du point d'application de  $\vec{F}$ . Ainsi, on peut écrire la puissance comme produit scalaire entre la force  $\vec{F}$  et la vitesse du point  $M$  :

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (4.11)$$

Finalement, le travail d'une force  $\vec{F}$  sur un trajet ( $\zeta_{AB}$ ) peut se calculer à partir de la puissance :

$$W_{t_A \rightarrow t_B}(\vec{F}) = \int_{t_A}^{t_B} P_{\vec{F}} \cdot dt = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F} \cdot \vec{v} \, dt, \quad (4.12)$$

où  $t_A$  et  $t_B$  sont les instants où le point  $M$  se trouve en  $A$  et  $B$ . Dans le cas particulier où la puissance est constante, on a tout simplement :

$$W_{t_A \rightarrow t_B}(\vec{F}) = P \cdot \Delta t \quad (4.13)$$

Avec  $\Delta t = t_B - t_A$ , la durée que met le point d'application à aller de  $A$  vers  $B$ .

---

Dans le Système International d'unités, la puissance s'exprime en Watt (symbole : W), en hommage à James Watt.

### 4.7. Théorème de l'énergie cinétique

#### 4.7.1. Définition de l'énergie cinétique

On définit l'énergie cinétique pour un point matériel  $M$  de masse  $m$  se déplaçant à la vitesse  $v$  dans un référentiel galiléen, par la quantité scalaire :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \quad (4.14)$$

Comme la puissance ou le travail, l'énergie cinétique est une quantité qui dépend du référentiel dans lequel on la calcule, par l'intermédiaire de la vitesse du point.

#### 4.7.2. Théorème de l'énergie cinétique en référentiel galiléen

Le théorème de l'énergie cinétique s'énonce de la façon suivante :

Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie cinétique d'un point matériel, soumis à un ensemble de forces extérieures, entre une position  $A$  et une position  $B$ , est égale à la somme des travaux de ces forces entre ces deux points :

$$\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = \sum W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{\text{ext}}) \quad (4.15)$$

Ce théorème est une conséquence du principe fondamental de la dynamique et n'introduit pas de nouveau postulat. Considérons un point matériel  $M$  de masse  $m$  animé d'une vitesse  $\vec{v}$  dans un référentiel galiléen ( $R$ ) et soumis à l'action d'un ensemble de forces extérieures. L'application du principe fondamental de la dynamique donne

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \frac{d\vec{v}_M}{dt} \quad (4.16)$$

En multipliant scalairement cette relation par  $\vec{v}_M \cdot dt$ , on obtient :

$$\left( \sum \vec{F}_{\text{ext}} \right) \cdot \vec{v}_M dt = m \frac{d\vec{v}_M}{dt} \cdot \vec{v}_M dt \quad (4.17)$$

or

$$\left( \sum \vec{F}_{\text{ext}} \right) \cdot \vec{v}_M dt = \left( \sum \vec{F}_{\text{ext}} \cdot \vec{v}_M \right) dt = \delta W, \quad (4.18)$$

$\delta W$  la somme des différents travaux.

$$m \frac{d\vec{v}_M}{dt} \cdot \vec{v}_M dt = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}mv_M^2 \right) dt = d \left( \frac{1}{2}mv_M^2 \right) \quad (4.19)$$

Soit finalement :

$$d\left(\frac{1}{2}mv_M^2\right) = dE_c = \delta W \quad (4.20)$$

On en déduit par intégration le travail de la somme des forces entre deux instants  $t_A$  et  $t_B$  :

$$\frac{1}{2}mv^2(t_B) - \frac{1}{2}mv^2(t_A) = E_c(t_B) - E_c(t_A) = \Delta E_c = \sum W_{t_A \rightarrow t_B}(\vec{F}_{\text{ext}}) \quad (4.21)$$

Le théorème de l'énergie cinétique peut se formuler de trois manières :

a) Expression intégrale :

$$E_c(t_2) - E_c(t_1) = \frac{1}{2}mv^2(t_2) - \frac{1}{2}mv^2(t_1) = W_{t_1 \rightarrow t_2}(\vec{F}_{\text{ext}}) \quad (4.22)$$

b) Expression différentielle :

$$dE_c = \delta W(\vec{F}_{\text{ext}}) \quad (4.23)$$

c) Expression en fonction de la puissance :

$$\frac{dE_c}{dt} = P(\vec{F}_{\text{ext}}) \quad (4.24)$$

L'utilisation du théorème de l'énergie cinétique nous permettra :

- déduire le travail de la somme des forces appliquées à partir de la connaissance de la variation d'énergie cinétique,
- déduire la variation de l'énergie cinétique connaissant le travail de la somme des forces.

La détermination de la variation de l'énergie cinétique en connaissant le travail de la somme des forces est souvent délicate car le travail des forces ne s'exprime pas de façon simple en général.

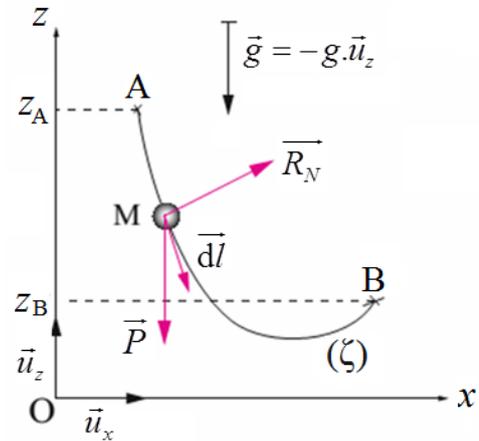
### Remarque

La méthode énergétique est adaptée aux cas où un seul paramètre de position suffit pour décrire l'évolution du système. Lorsqu'on traite un problème à un degré de liberté dont la résolution ne concerne qu'une variable, cela ne pose aucune difficulté puisqu'une seule équation suffit pour déterminer une seule variable. Par contre, si la situation nécessite de connaître l'expression de deux variables ou plus, la seule utilisation du théorème de l'énergie cinétique ne permettra pas la résolution complète du problème. On devra alors recourir à des projections du principe fondamental de la dynamique sur des axes différents pour compléter la formalisation énergétique.

**4.7.3. Application : utilisation du théorème de l'énergie cinétique pour résoudre un problème physique**

**Exemple 1 :** Considérons un point matériel  $M$  de masse  $m$  qui glisse sans frottement le long d'une courbe plane  $(\zeta)$ , à partir du point  $A$ , où il est abandonné sans vitesse initiale, jusqu'au point  $B$ . Déterminons la vitesse du point  $M$  en  $B$ ,  $v_B$ .

- Système étudié : point matériel  $M$  de masse  $m$
- Référentiel et base de projection : le mouvement de  $M$  est étudié par rapport au référentiel fixe galiléen  $(R_0)$ , d'origine  $O$ , muni du repère cartésien orthonormé direct  $(O, x, y)$  de base  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ .



→ Effectuons le bilan des forces extérieures :

- Poids du point matériel  $M$  de masse  $m$ , noté  $\vec{P}$  :

$$\vec{P} = -mg \vec{u}_z \tag{4.25}$$

- Réaction du support, notée  $\vec{R}_N$

$$\vec{R} = (R_N)_x \vec{u}_x + (R_N)_z \vec{u}_z \tag{4.26}$$

→ Calculons le travail des forces extérieures agissant sur  $M$  :

- Travail de la réaction  $\vec{R}_N$  du support entre  $A$  et  $B$  :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{R}_N) = \int_A^B \vec{R}_N \cdot d\vec{l} \tag{4.27}$$

La réaction  $\vec{R}_N$  du support et le déplacement élémentaire  $d\vec{l}$  sont toujours orthogonaux le long de  $(\zeta)$ , car le point  $M$  se déplace sans frottement, donc :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{R}_N) = \int_A^B \vec{R}_N \cdot d\vec{l} = 0 \tag{4.28}$$

- Travail du poids  $\vec{P}$  entre  $A$  et  $B$  :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) = \int_A^B \vec{P} \cdot d\vec{l} \quad \text{or} \quad \vec{P} \cdot d\vec{l} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dz \end{pmatrix} = -mgdz \tag{4.29}, (4.30)$$

( $d\vec{l}$  est exprimé en coordonnées cartésiennes :  $d\vec{l} = dx \cdot \vec{u}_x + dz \cdot \vec{u}_z$  ) donc :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) = \int_{h_A}^{h_B} \vec{P} \cdot d\vec{l} = \int_{h_A}^{h_B} -mgdz = mg(z_A - z_B) \tag{4.31}$$

où  $h_A$  et  $h_B$  sont les coordonnées de  $A$  et  $B$ .

→ Appliquons le théorème de l'énergie cinétique au point matériel  $M$  entre  $A$  et  $B$ .

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) = \int_{h_A}^{h_B} \vec{P} \cdot d\vec{l} = mg(h_A - h_B) = E_C(B) - E_C(A) = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 \quad (4.32)$$

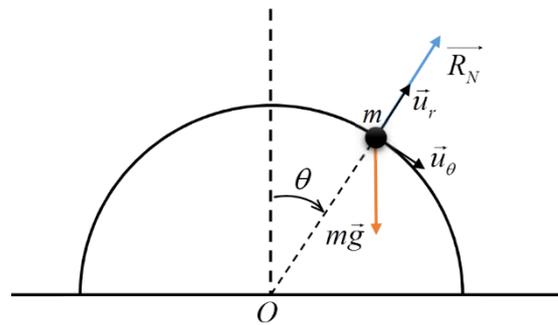
Le point  $M$  est abandonné sans vitesse initiale →  $v_A = 0$ . Ainsi la vitesse du point matériel  $M$  en  $B$ ,

$$v_B = \sqrt{2g(z_A - z_B)} > 0 \quad (4.33)$$

**Exemple 2 :** On considère une bille assimilée à un point matériel de masse  $m$  pouvant se déplacer sans frottement sur une demi-sphère de centre  $O$  et de rayon  $a$ . On l'abandonne sans vitesse initiale depuis le sommet de la sphère et on cherche à déterminer les conditions nécessaires pour que la bille ne décolle pas.

1. Système : masse  $m$ .
2. Référentiel du laboratoire considéré comme galiléen.
3. Bilan des forces :

- poids  $m\vec{g}$
- réaction de la sphère normale à la surface du fait de l'absence de frottement.



4. Résolution par le théorème de l'énergie cinétique.

On utilise les coordonnées polaires dans le plan vertical où a lieu le mouvement ; la vitesse s'écrit :  $\vec{v} = a\dot{\theta} \vec{u}_\theta$ . L'énergie cinétique est :

$$E_c = \frac{1}{2}m(a\dot{\theta})^2 \quad (4.34)$$

La réaction, étant perpendiculaire au mouvement, ne travaille pas et le travail du poids entre l'instant  $t = 0$  et un instant  $t$  où la position du point  $M$  est repérée par l'angle  $\theta$  vaut :

$$W(\vec{P}) = \int_0^t m\vec{g} \cdot \vec{v} dt = \int_0^t mga\dot{\theta} \sin \theta dt = \int_0^\theta mga \sin \theta d\theta = mga(1 - \cos \theta) \quad (4.35)$$

Le théorème de l'énergie cinétique entre ces deux instants donne :

$$\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 - 0 = mga(1 - \cos \theta) \quad (4.36)$$

$$\text{Soit } \dot{\theta}^2 = \frac{2g}{a}(1 - \cos \theta) \quad (4.37)$$

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R} \quad (4.38)$$

$$m \left[ (\ddot{a} - r\dot{\theta}^2) \vec{u}_r + (2\dot{a}\dot{\theta} + a\ddot{\theta}) \vec{u}_\theta \right] = R\vec{u}_r + mg [-\cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta] \quad (4.39)$$

$$-ma\dot{\theta}^2 \vec{u}_r + ma\ddot{\theta} \vec{u}_\theta = R\vec{u}_r + mg [-\cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta] \quad (4.40)$$

$$\begin{cases} \vec{u}_r : & -ma\dot{\theta}^2 = R - mg \cos \theta \\ \vec{u}_\theta : & ma\ddot{\theta} = mg \sin \theta \end{cases} \quad (4.41)$$

On cherche l'expression de la réaction :

$$R = -ma\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta \quad (4.42)$$

En remplaçant  $\dot{\theta}^2$  par l'expression établie précédemment on obtient :

$$R = mg(3 \cos \theta - 2) \quad (4.43)$$

La bille reste en contact avec la sphère tant que la réaction ne s'annule pas. Il y aura décollage pour  $R = 0$  donc pour  $\theta_0$  tel que

$$\cos \theta_0 = \frac{2}{3} \rightarrow \theta_0 = 48.2^\circ$$

## 4.8. Energie potentielle et forces conservatives

### 4.8.1. Définitions

Le théorème de l'énergie cinétique permet de déterminer l'état de la vitesse d'un point matériel. Il repose sur la détermination du travail de toutes les forces extérieures appliquées à ce point. Il est possible de définir une seconde fonction d'état appelée énergie potentielle du système. Pour ce faire, il est important de distinguer deux types de forces extérieures : les forces conservatives (*force dérive d'un potentiel*) et les forces non conservatives.

- *Les forces conservatives* sont des forces dont le travail sur un trajet  $AB$  ne dépend que de l'état initial en  $A$  et de l'état final en  $B$  (indépendant du chemin suivi). Exemples : travail du poids, travail de la tension du ressort, travail d'une force constante.
- *Les forces non conservatives* sont des forces dont le travail dépend du chemin suivi, comme par exemple les forces de frottement (ces forces exercent un travail résistant qui s'oppose au mouvement).

### 4.8.2. Définition de l'énergie potentielle

On peut écrire le travail  $W_{A \rightarrow B}$  d'une force conservative entre deux points  $A$  et  $B$  comme la différence  $E_p(A) - E_p(B)$  où  $E_p$  est une fonction de la variable de position. Le travail de ces forces peut donc s'exprimer à partir d'une *fonction d'état* appelée *énergie potentielle*  $E_p$ . Nous

admettons que la variation d'énergie potentielle est représentée par l'opposé du travail des forces conservatives soit :

$$E_p(B) - E_p(A) = -W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_C) \quad (4.44)$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$\Delta E_p = -W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_C) \quad (4.45)$$

En explicitant le travail, cette relation conduit à la *définition intégrale* de l'énergie potentielle :

$$E_p(B) - E_p(A) = -\int_A^B \vec{F}_C \cdot d\vec{l} \quad (4.46)$$

Il est possible de déduire la *définition différentielle* de l'énergie potentielle en faisant apparaître le travail élémentaire de la force conservative soit :

$$dE_p = -\vec{F}_C \cdot d\vec{l} = -dW(\vec{F}_C) \quad (4.47)$$

Finalement la différentielle de l'énergie potentielle peut s'exprimer en fonction du gradient de  $E_p$  :

$$dE_p = \overrightarrow{\text{grad}E_p} \cdot d\vec{l} \quad (4.48)$$

On aboutit à la *définition locale* de l'énergie potentielle :

$$\vec{F}_C = -\overrightarrow{\text{grad}E_p} = -\vec{\nabla}E_p \quad (4.49)$$

Il y a deux façons d'obtenir l'énergie potentielle associée à une force  $\vec{F}$  :

1) Soit on cherche la fonction scalaire  $E_p(x,y,z)$  qui vérifie  $\vec{F} = -\vec{\nabla}E_p(x,y,z)$  en résolvant trois équations aux dérivées partielles ;

2) Soit on cherche la fonction scalaire  $E_p(x,y,z)$  à partir de la relation :

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{l} = -dE_p \quad (4.50)$$

### 4.8.3. Exemples d'énergie potentielle

#### 4.8.3.1. Energie potentielle de pesanteur

Cherchons l'énergie potentielle associée à la pesanteur  $\vec{P} = m\vec{g}$

**1<sup>ère</sup> méthode** : L'espace étant muni d'un repère cartésien d'axe Oz vertical ascendant, on obtient

$$\vec{P} = -mg \vec{u}_z \Rightarrow \begin{cases} 0 = -\partial E_{pp} / \partial x \\ 0 = -\partial E_{pp} / \partial y \\ -mg = -\partial E_{pp} / \partial z \end{cases} \quad (4.51)$$

Les deux premières relations traduisent le fait que l'énergie potentielle de pesanteur,  $E_{pp}$ , ne dépend que de  $z$ . L'intégration de la dernière relation donne  $E_{pp}(z) = mgz + C^{te}$ .

**2<sup>e</sup> méthode :** Le travail élémentaire s'écrit  $\delta W = \vec{P} \cdot d\vec{l} = -mg dz = -dE_p$  ce qui donne immédiatement  $E_{pp}(z) = mgz + C^{te}$ .

En général, l'énergie potentielle de pesanteur est prise nulle en  $z = 0$  ce qui impose  $C = 0$ . Ce choix entraîne que

$$E_{pp}(z) = mgz \quad (4.52)$$

L'énergie potentielle de la masse à l'altitude  $z$  correspond donc à l'énergie qu'un opérateur (l'extérieur du système) a fourni pour l'amener à cette altitude. La masse a emmagasiné cette énergie qu'elle pourra restituer en retombant.

#### 4.8.3.2. Energie potentielle élastique

L'énergie potentielle associée à la force  $\vec{T} = k\vec{x}$

**1<sup>ère</sup> méthode :** L'espace étant muni d'un repère cartésien d'axe  $Ox$  vertical descendant, on obtient

$$\vec{T} = -kx \vec{u}_x \Rightarrow \begin{cases} -kx = -\partial E_{pe} / \partial x \\ 0 = -\partial E_{pe} / \partial y \\ 0 = -\partial E_{pe} / \partial z \end{cases} \quad (4.53)$$

L'intégration de la dernière relation donne

$$E_{pe}(z) = \frac{1}{2} kx^2 + C^{te} \quad (4.54)$$

**2<sup>ème</sup> méthode :** Le travail élémentaire de la force  $\vec{T}$  s'écrit

$$dW_{x \rightarrow x+dx}(\vec{T}) = \vec{T} \cdot d\vec{l} = -kx \cdot dx = -d(E_{pe}) \quad (4.55)$$

ou encore :

$$W_{x_1 \rightarrow x_2}(\vec{T}) = -k \int_{x_1}^{x_2} x dx = \frac{1}{2} k(x_1^2 - x_2^2) \quad (4.56)$$

L'énergie potentielle élastique  $E_{pe}$  correspond donc à :

$$E_{pe} = \frac{1}{2} kx^2 + C^{te} \quad (4.57)$$

Il est logique de choisir l'énergie potentielle nulle pour une déformation nulle. La constante  $C^te$  est alors nulle et nous obtenons finalement

$$E_{pe} = \frac{1}{2}kx^2 \quad (4.58)$$

L'énergie potentielle du ressort déformé correspond donc à l'énergie qu'un opérateur (l'extérieur du système) a fournie pour l'amener dans cet état. Le ressort a emmagasiné cette énergie qu'il pourra restituer en retournant vers son état à vide, ni étiré, ni allongé.

### 4.5. Energie mécanique

#### 4.5.1. Définition de l'énergie mécanique

On considère un point  $M$  mobile dans un référentiel galiléen et soumis à l'action d'une force résultante conservative  $\vec{F}$ . Alors le théorème de l'énergie cinétique implique :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = E_c(B) - E_c(A) \quad (4.59)$$

Or pour une force conservative, on peut écrire le travail comme suit :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = -(E_p(B) - E_p(A)) \quad (4.60)$$

On peut donc écrire

$$E_c(B) - E_c(A) = -(E_p(B) - E_p(A)) \quad (4.61)$$

On arrive alors à la relation suivante :

$$E_c(A) + E_p(A) = E_c(B) + E_p(B) \quad (4.62)$$

On peut définir alors une nouvelle grandeur correspondant à la somme des énergies cinétique et potentielle : cette grandeur a la dimension d'une énergie, elle est appelée *énergie mécanique* et se note  $E_m$ .

On appelle énergie mécanique du point  $M$ , la somme de son énergie cinétique et des énergies potentielles des forces conservatives qui lui sont appliquées.

La relation établie plus haut peut donc s'écrire simplement en introduisant la notion d'énergie mécanique :

$$E_m(A) = E_m(B) \rightarrow \Delta E_m = 0 \quad (4.63)$$

#### **Théorème**

*Dans un référentiel galiléen, l'énergie mécanique d'un point soumis à des forces conservatives se conserve. L'énergie mécanique est donc dans ce cas une constante du mouvement.*

#### **Remarques**

- L'énergie mécanique d'un point matériel soumis uniquement à des forces conservatives (des forces qui ne travaillent pas) est une constante du mouvement. On voit ici l'origine de l'expression « force conservative », qui vient du fait que l'énergie mécanique associée se conserve.
- La loi de conservation de l'énergie mécanique est aussi appelée intégrale première du mouvement car elle ne fait intervenir que des dérivées premières. En effet, est appelée intégrale première du mouvement toute quantité qui se conserve au cours du mouvement et qui n'est fonction que de la position et de ses dérivées premières par rapport au temps.

### 4.5.2. Cas général : non conservation de l'énergie mécanique

Lorsqu'il existe une force  $\vec{F}_{NC}$  non conservative, en plus des forces conservatives de résultante  $\vec{F}_C$ , le théorème de l'énergie cinétique s'écrit :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_C) + W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{NC}) = E_c(B) - E_c(A) \quad (4.64)$$

or, le travail des forces conservatives peut s'écrire comme la variation d'énergie potentielle  $W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_C) = -\Delta E_p$ ; on obtient donc la relation suivante :

$$-(E_p(B) - E_p(A)) + W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{NC}) = E_c(B) - E_c(A) \quad (4.65)$$

On peut donc écrire

$$(E_c(B) + E_p(B)) - (E_c(A) + E_p(A)) = E_m(B) - E_m(A) = W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{NC}) \quad (4.66)$$

ce qui permet d'en déduire :

$$\Delta E_m = E_m(B) - E_m(A) = W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{NC}) \quad (4.67)$$

La variation de l'énergie mécanique d'un système entre deux points  $A$  et  $B$  est égale au travail des forces non conservatives  $\vec{F}_{NC}$  appliquées au système entre ces deux points. Ce résultat est appelé « théorème de l'énergie mécanique » que l'on peut formuler de la manière suivante :

#### **Théorème**

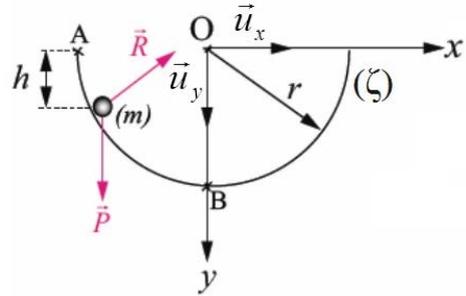
*Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie mécanique d'un point matériel au cours du mouvement est égale au travail des forces non conservatives exercées sur ce point.*

### 4.5.3. Applications : Utilisation de l'énergie mécanique pour résoudre un problème physique

**Exemple 1 : Calcul de l'énergie mécanique dans le cas des force conservatives**

## CHAPITRE 4 : TRAVAIL ET ENERGIE

Soit un point matériel  $M$  de masse  $m$  astreint à se déplacer sans frottement le long d'une courbe plane ( $\zeta$ ) assimilable à un demi-cercle de rayon  $r$  et de centre  $O$  (voir figure ci-dessous). Le point  $M$  est lâché de  $A$  sans vitesse initiale et les forces agissant sur lui sont des forces conservatives (pas de frottement).



- 1) Calculer l'énergie mécanique  $E_m$  du point  $M$  en un point  $P$  quelconque le long de la courbe ( $\zeta$ ).
- 2) Tracer la variation de l'énergie mécanique en fonction de la position du point  $M$  le long de ( $\zeta$ ).
- 3) Calculer la vitesse de la bille en point  $B$ .
- 4) Calculer la vitesse de  $M$  en un point  $P$  quelconque le long de la courbe ( $\zeta$ ).

### Solution

Le système étudié est le point matériel  $M$  de masse  $m$  et son mouvement est étudié par rapport au référentiel fixe ( $R_0$ ) d'origine  $O$ , muni du repère cartésien orthonormé direct ( $O ; x, y$ ) de base  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ , supposé galiléen. L'axe ( $oy$ ) est la verticale descendante. L'altitude du point  $M$  est repérée par  $h$ .

- 1) L'énergie mécanique du point  $M$

Les forces agissant sur le point  $M$  sont des forces conservatives (pas de frottement) donc l'énergie mécanique de  $M$  le long de ( $\zeta$ ) est constante.

- L'énergie cinétique du point  $M$  en un point  $P$  quelconque le long de la courbe ( $\zeta$ ) :

$$E_c(P) = \frac{1}{2} m v_{M/R_0}^2 \quad (4.68)$$

- L'énergie potentielle du point  $M$  en un point  $P$  quelconque le long de la courbe ( $\zeta$ ) :

$$E_p(P) = mg(r - h) \quad (4.69)$$

L'énergie mécanique du point  $M$  en un point  $P$  quelconque le long de la courbe ( $\zeta$ ) :

$$E_m(P) = E_c(P) + E_p(P) \quad (4.70)$$

$$\Rightarrow E_m(P) = \frac{1}{2} m v_{M/R_0}^2 + mg(r - h) = \text{Cste} \quad (4.71)$$

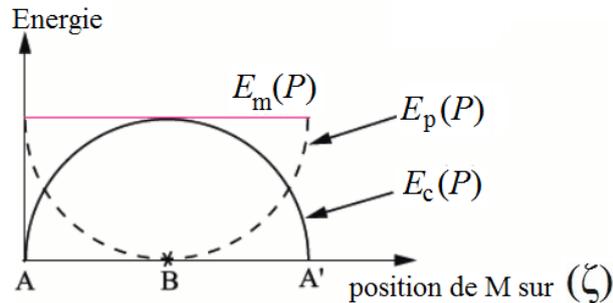
- 2) Traçons l'énergie mécanique en fonction de la position du point  $M$  le long de la courbe ( $\zeta$ ) :

- $E_c(A) = 0$  car le point  $M$  est lâché de  $A$  sans vitesse initiale et l'énergie potentielle en  $A$  est maximum :

$$E_p(A) = mgr \quad (4.72)$$

- $E_p(B) = 0$  car pour  $h = r$  l'énergie cinétique en  $B$  est maximum :

$$E_c(B) = \frac{1}{2} m v_{M/R_0}^2(B) \quad (4.73)$$



3) La vitesse de la bille en point B ?

Exprimons l'énergie mécanique de la bille en deux points A et B :

- Au point A :

$$E_m(A) = E_c(A) + E_{pp}(A) = \frac{1}{2} m v_A^2 + mgz_A = mgr \quad (4.74)$$

- Au point B :

$$E_m(B) = E_c(B) + E_{pp}(B) = \frac{1}{2} m v_B^2 + mgz_B = \frac{1}{2} m v_B^2 \quad (4.75)$$

La loi de conservation de l'énergie mécanique s'écrit :

$$E(A) = E(M) = E(B) \Rightarrow mgr = \frac{1}{2} m v_B^2 \quad (4.76)$$

On en déduit :

$$mgr = \frac{1}{2} m v_B^2 \Rightarrow v_B = \sqrt{2gr} \quad (4.77)$$

4) La vitesse de M en un point P quelconque le long de la courbe (ζ) :

L'énergie mécanique de M en point P est :

$$E_m(P) = \frac{1}{2} m v_{M/R_0}^2 + mg(r-h) \quad (4.78)$$

L'application du théorème de l'énergie mécanique entre les deux points A et P conduit à :

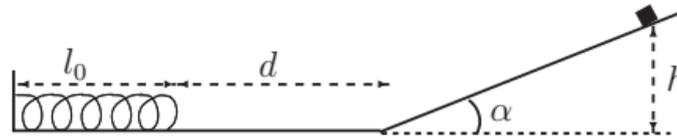
$$\Delta E_m = 0 \Rightarrow E_m(P) - E_m(A) = 0 \Rightarrow \left( \frac{1}{2} m v_P^2 + mg(r-h) \right) - (0 + mgr) = 0 \quad (4.79)$$

On obtient l'expression suivante pour la vitesse en fonction de la hauteur :

$$v = \sqrt{2gh} \quad (4.80)$$

**Exemple 2 : Calcul de l'énergie mécanique en présence de force non conservative**

Un palet de masse  $m$  est placé sur un plan incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale, prolongé par un plan horizontal (figure ci-dessous). Sur ce plan horizontal est placé un ressort de masse négligeable, de constante de raideur  $k$  et de longueur au repos  $l_0$ .



- 1) En l'absence de tout frottement trouver l'expression de la vitesse  $v_1$  du palet au bas du plan incliné, puis de la longueur  $l$  du ressort lorsque le palet s'immobilise.
- 2) Reprendre la question précédente en présence d'un coefficient de frottement dynamique  $\mu_d$  entre le palet et le plan. Quelle est la quantité d'énergie mécanique transformée en chaleur ?

**Solution :**

- 1) En l'absence de frottement, l'énergie mécanique reste constante tout au long du mouvement car les forces agissant sur le palet sont conservatives.

- a) La vitesse du palet au bas du plan incliné

Calculons l'énergie mécanique du palet en deux points différentes, A (le palet est au repos, pas de mouvement) et B (le palet est en bas du plan incliné) :

En point A :  $E_c(A) = 0$  (le système est supposé laissé sans vitesse initiale) et  $E_p(A) = mgh$ , d'où l'énergie mécanique  $E_m(A) = E_c(A) + E_p(A) = mgh$ .

En point B :  $E_c(B) = \frac{1}{2}mv_1^2$  et  $E_p(B) = 0$ , d'où l'énergie mécanique  $E_m(B) = \frac{1}{2}mv_1^2$ .

L'énergie mécanique est conservée  $\rightarrow E_m(A) = E_m(B)$ , soit

$$mgh = \frac{1}{2}mv_1^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gh} \tag{4.81}$$

- b) La longueur  $l$  du ressort lorsque le palet s'immobilise

Calculons l'énergie mécanique en un troisième point C (lorsque le palet s'immobilise) :

L'énergie cinétique  $E_c(C) = 0$  et l'énergie potentielle  $E_p(C) = E_p^{el} = \frac{1}{2}k(l_0 - l)^2$ , d'où

L'énergie mécanique en point C,  $E_m(C) = \frac{1}{2}k(l_0 - l)^2$

$$E_m(A) = E_m(C) \Rightarrow mgh = \frac{1}{2}k(l_0 - l)^2. \tag{4.82}$$

d'où l'on tire sans difficulté

$$l = l_0 - (2mgh/k)^{1/2} \quad (4.83)$$

2) En présence de frottement, l'énergie mécanique ne reste plus constante au cours du temps.

a) Vitesse du palet au bas du plan incliné

Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie mécanique d'un point matériel au cours du mouvement est égale au travail des forces non conservatives exercées sur ce point.

$$\Delta E_m = E_m(B) - E_m(A) = W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{NC}) = W_{A \rightarrow B}(\vec{f}) \quad (4.84)$$

Sur le plan incliné, la réaction normale a pour module  $N = mg \cos \alpha$  ; le module de la force de frottement est donc  $f = \mu_d \cdot N = \mu_d mg \cos \alpha$ . Par conséquent :

L'énergie mécanique en point A ;

$$E_m(A) = E_c(A) + E_p(A) = 0 + mgh \quad (4.85)$$

L'énergie mécanique en point B ;

$$E_m(B) = E_c(B) + E_p(B) = \frac{1}{2}mv_1^2 + 0 \quad (4.86)$$

Le travail de la force de frottement ;

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{f}) = -\int \vec{f} \cdot d\vec{x} = f \cdot x \quad (4.87)$$

$$\text{Or : } \sin \alpha = \frac{h}{x} \Rightarrow x = \frac{h}{\sin \alpha} \quad (4.88)$$

Appliquons le théorème de l'énergie mécanique :

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - mgh = -(\mu_d mg \cos \alpha)(h/\sin \alpha), \quad (4.89)$$

ce qui définit

$$v_1 = \sqrt{2gh(1 - \mu_d/\tan \alpha)} \quad (4.90)$$

b) la longueur  $l$  du ressort lorsque le palet s'immobilise

Sur le plan horizontal :

$$E_m(C) - E_m(B) = W_{B \rightarrow C}(\vec{f}) \quad (4.91)$$

$$\left(\frac{1}{2}mv_1^2 - 0\right) - \left(0 + \frac{1}{2}k(l - l_0)^2\right) = -(\mu_d mg)(d + l_0 - l), \quad (4.92)$$

Soit ;

$$\frac{1}{2}k(l_0 - l)^2 - mgh = -mg \mu_d [(h/\tan \alpha) + d + l_0 - l] \quad (4.93)$$

Pour trouver la longueur exacte du ressort, il faut résoudre ce trinôme du second degré.

Toutefois en négligeant  $(l_0 - l)$  devant  $(h/\tan \alpha) + d$ , on obtient :

$$(l_0 - l)^2 = (2mg/k)[h - \mu_d(h/\tan \alpha + d)] \quad (4.94)$$

$$\rightarrow l = l_0 + \sqrt{(2mg/k)[h - \mu_d(h/\tan \alpha + d)]} \quad (4.95)$$

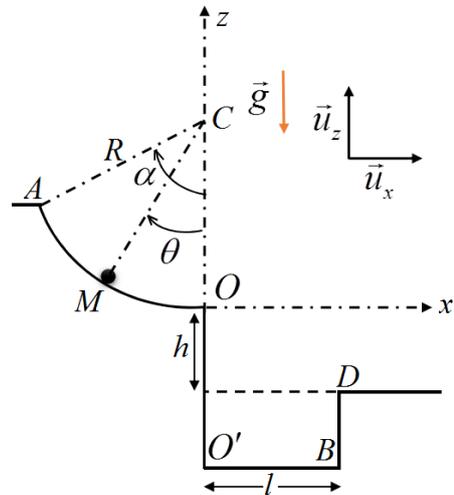
(Pour  $\mu_d = 0$  on retrouve bien les résultats de la question précédente).

c) La quantité d'énergie mécanique transformée en chaleur est :

$$E_m^i - E_m^f = \mu_d mg[(h/\tan \alpha) + d] \quad (4.96)$$

**Exemple 3 :** Un skieur décide de faire du hors-piste (*figure ci-dessous*). Il se retrouve sur un passage en forme d'arc de cercle  $AO$  de rayon  $CA = CO = R$  et aboutissant sur un fossé de largeur  $l$ . Le point  $O$  se trouve à une hauteur  $h$  par rapport à l'autre bord  $D$  du fossé. Le skieur estimant qu'il aura assez d'élan en  $O$  pour passer le fossé,

part du point  $A$  sans vitesse initial ( $v_A = 0$ ). Le référentiel d'étude est le référentiel terrestre considéré galiléen et le skieur est assimilé à un point matériel  $M$  de masse  $m$ . L'origine du repère choisi est en  $O$ , (*voir figure ci-contre*)



Données :  $m = 60 \text{ kg}$  ;  $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$  ;  $R = 40 \text{ m}$  ;  $h = 3,2 \text{ m}$  ;  $l = 7 \text{ m}$  ;  $\theta = \pi/3$  ;

**I. Descente sur l'arc AO**

1) On suppose que les frottements sont négligeables. Faire un bilan des forces appliquées à  $M$ . Le système est-il conservatif ? Que peut-on dire alors de l'énergie mécanique ?

2) Exprimer l'altitude  $z$  du point  $M$  en fonction de  $R$  et de l'angle  $OCM = \theta$  (*voir figure*). On choisit le point  $O$  comme origine des énergies potentielles de pesanteur  $E_p(O) = 0$ . Exprimer l'énergie potentielle de pesanteur  $E_p(A)$  au point  $A$  (en  $A$ ,  $\theta(A) = \alpha$ ).

3) Exprimer l'énergie mécanique  $E_m(A)$  en  $A$  et  $E_m(O)$  en  $O$  et en déduire l'expression de la vitesse  $v(O) = v_o$ . Faire l'application numérique.

4) En fait il existe des frottements solides et la vitesse  $v_o$  en  $O$  est plus faible que prévue. On appelle  $f$  la valeur de la force de frottement constante sur  $AO$  qui s'oppose au mouvement.

- a) Exprimer le travail  $W_{A \rightarrow O}$  de cette force  $f$  entre  $A$  et  $O$ .
- b) Que peut-on dire de la variation d'énergie mécanique  $\Delta E_m = E_m(O) - E_m(A)$  ?
- c) En déduire une expression de  $f$  en fonction de  $m$ ,  $g$ ,  $R$ ,  $v_o$  et  $\alpha$ .
- d) *Application numérique* : On trouve  $v_o = 10 \text{ m.s}^{-1}$ , calculer  $f$ .

### II. Chute libre

- 1) Donner l'expression du vecteur vitesse  $\vec{v}_0$  au point  $O$  dans la base  $(\vec{u}_x, \vec{u}_z)$ .
- 2) Faire l'étude, dans le repère  $(O, x, z)$ , de la masse  $m$  en chute libre (on néglige tout frottement). En déduire l'équation de la trajectoire  $z=f(x)$  et faire l'application numérique avec  $v_0 = 10 \text{ m.s}^{-1}$ .
- 3) En déduire si le skieur retombe de l'autre côté du fossé ou pas ?

#### Solution :

##### I. Descente sur l'arc $AO$

- 1) Le poids  $\vec{P} = m\vec{g} = mg(-\vec{u}_z)$

La réaction du sol : pas de frottement donc la réaction est normale :  $\vec{N} = N \vec{u}_z$ .

Le système est conservatif (pas de frottement et le poids force conservative). On a alors conservation de l'énergie mécanique :  $E_m = C^{ste}$ .

- 2)  $z = R - R \cos \theta = R(1 - \cos \theta)$

$$E_p(A) - E_p(O) = mg(z_A - z_O). \text{ donc :}$$

$$E_p(A) = mgz_A = mgR(1 - \cos \alpha) = 12000J$$

- 3)  $E_m(A) = E_c(A) + E_p(A) = E_p(A) = mgR(1 - \cos \alpha)$

$$E_m(O) = E_c(O) + E_p(O) = E_c(O) = \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$E_m(A) = E_m(O) \Rightarrow mgR(1 - \cos \alpha) = \frac{1}{2}mv_0^2 \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gR(1 - \cos \alpha)} = 20 \text{ m/s}.$$

- 4) En présence des frottements

- a) Le travail de  $f$  entre A et O :

$$W_{A \rightarrow O}(\vec{f}) = \int_A^O \vec{f} \cdot d\vec{l} = -f \int_A^O dl = f \int_0^\alpha R d\theta = -fR\alpha = -fR \frac{\pi}{3}$$

(la force de frottement s'oppose au mouvement et garde un module constant).

- b) La variation de l'énergie mécanique entre A et O

$$\Delta E_m = W(\vec{F}_{NC}) \Rightarrow \Delta E_m = E_m(O) - E_m(A) = W_{A \rightarrow O}(\vec{f}) = \frac{1}{2}mv_0^2 - mgR(1 - \cos \alpha) = -fR\alpha$$

- c) L'expression de  $f$

$$f = \frac{2mgR(1 - \cos \alpha) - mv_0^2}{2R\alpha}$$

$$d) \quad v_0 = 10 \text{ m/s} \Rightarrow f = \frac{2 \times 60 \times 10 \times 40(1 - \cos 60) - 60 \times (10)^2}{2 \times 40 \times \pi/3} = 214.96 \text{ N}$$

**II. Chute libre**

$$1) \quad \vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$$

2) La masse  $m$  n'est soumise alors qu'à son poids (chute libre). En appliquant le principe fondamental de la dynamique :

$$\vec{P} = mg(-\vec{u}_z) = m\vec{\gamma} \Rightarrow \vec{\gamma} = g(-\vec{u}_z) \Rightarrow \ddot{z} = -g$$

$$\vec{\gamma} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = \begin{cases} v_{ox} = v_0 \\ v_{oy} = 0 \\ v_{oz} = -gt + v_{0z} = -gt \end{cases} \Rightarrow \vec{OM} = \begin{cases} x = v_0 t + x_0 = v_0 t \\ y = 0 \\ z = -\frac{1}{2} g t^2 + z_0 = -\frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

$$\text{On a donc : } \begin{cases} x = v_0 t \\ z = -\frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{x}{v_0} \\ z = -\frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2} \end{cases} \Rightarrow z = -\frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2} = -\frac{x^2}{20}$$

3) Pour  $z = -h$  on a  $h = \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2} = \frac{x^2}{20} \Rightarrow x = \sqrt{20h} = \sqrt{64} = 8 \text{ m} > 7 \text{ m}$ . Le skieur traverse donc le fossé.