`UFA Sétif 1, Département de Mathématiques, Faculté des Sciences.`
`Analyse numérique 1. Enseignant : M. ACHACHE. 2018/2019.`

Interrogation écrite

Groupe $\mathbf{B_4}$

Exercice 1 *Soient*

$$x = 2.5 \pm 0.01, \; y = 1.2 \pm 0.02, \quad z = 3.2 \pm 0.03.$$

1- *Calculer* $\mathbf{U} = xyz^2$.
2- *Déterminer le nombre de chiffres exacts dans* $\mathbf{U}$.

Exercice 2 *Soit la matrice*

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & e^\alpha \\ e^\alpha & 1 \end{pmatrix} : \; \alpha \in \mathbb{R}.$$

1- *Calculer* $\det A_\alpha$.
2- *On pose :*

$$f(\alpha) = \det A_\alpha,$$

montrer que $f(\alpha) \neq 0, \; \forall \alpha \in \mathbb{R}$ *et déduire que* A *est inversible . (Indication : étudier les variations de la fonction* $f(\alpha)$ *sur son domaine).*
3- *Pour quelles valeurs de* α*, la matrice* A *est symétrique définie positive?*
4- *Donner la matrice de Gauss-Seidel* H_{GS}*, pour* $\alpha = 3$*, associée à* A *et puis étudier son convergence.*

Solution.

Exercice 1 :

1- On a :

$$U = xyz^2 = 30.72.$$

Pour avoir le nombre des chiffres exacts n dans U, on calcule son erreur absolue ΔU. D'après la loi gén'erale de l'erreur, on a :

$$\begin{aligned} \Delta U &= \left|\frac{\delta U}{\delta x}\right| \Delta x + \left|\frac{\delta U}{\delta y}\right| \Delta y + \left|\frac{\delta U}{\delta z}\right| \Delta z = \left|yz^2\right| \Delta x + \left|xz^2\right| \Delta y + 2\left|xyz\right| \Delta z \\ &= 12.288\Delta x + 25.6\Delta y + 19.2\Delta z \\ &= (12.288 \times 0.01) + (25.6 \times 0.02) + (19.2 \times 0.03) = 1.21088. \end{aligned}$$

Donc n, est le nombre des chiffres exacts dans U si :

$$\Delta U = 1.21088 \leq \frac{1}{2}10^{2-n}$$

car $m = 1$. Avec un simple calcul on déduit que cette inégalité est vraie que si $n = 1$. Alors U admet uniquement un chiffre exact.

Exercice 2.

1. $\det A_\alpha = \alpha - e^{2\alpha}$: $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. On pose :

$$f(\alpha) = \alpha - e^{2\alpha}.$$

La fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\lim_{x \mapsto -\infty} f(x) = -\infty$$

et

$$\lim_{x \mapsto +\infty} f(x) = \infty - \infty \quad \text{(FI)}.$$

On a :

$$\begin{aligned} \lim_{x \mapsto +\infty} f(x) &= \lim_{x \mapsto +\infty} (\alpha - e^{2\alpha}) = \lim_{x \mapsto +\infty} e^{2\alpha}(\alpha e^{-2\alpha} - 1) \\ &= \lim_{x \mapsto +\infty} -e^{2\alpha} = -\infty. \end{aligned}$$

Par conséquent comme $(\lim_{x \mapsto -\infty} f(x) = -\infty)(\lim_{x \mapsto +\infty} f(x) = -\infty) = +\infty > 0$, alors $f(\alpha) = 0$,admet un nombre pair sur $\mathbb{R}$ ou bien elle n'admet aucune racines dans $\mathbb{R}$. Pour s'assurer on étudie ses variations sur $\mathbb{R}$. La fonction f est de classe $C^\infty(\mathbb{R})$ et on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - 2e^{2\alpha} = 0 \\ &\Updownarrow \\ \alpha &= -\frac{\ln 2}{2}. \end{aligned}$$

Le tableau de variations de f est donné par :

x	$-\infty$		$-\frac{\ln 2}{2}$		$+\infty$
signe de f'		$-$	0	$+$	
variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{\ln 2}{2} - e^{-\ln 2} < 0$	$\searrow$	$-\infty$

On constate donc d'après le tableau de variations, que $f(\alpha) < 0, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$, ceci implique que $f(\alpha) \neq 0$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. Ce qui signifie aussi que :

$$\det A_\alpha \neq 0$$

et donc la matrice A_α est inversible $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
3- La matrice A_α est symétrique car $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, on a :

$$A_\alpha = (A_\alpha)^T \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & e^\alpha \\ e^\alpha & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & e^\alpha \\ e^\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice A_α est définie positive si et seulement si les mineurs principaux de A_α sont positifs. Mais comme $\det A_\alpha < 0 \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$ (question 2), la matrice A_α n'est pas définie positive.
4- La matrice de Gauss-Seidel H_{GS} est donnée par :

$$H_{GS} = (D - L)^{-1} U,$$

avec

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e^\alpha & 0 \end{pmatrix}, \ U = \begin{pmatrix} 0 & e^\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$D - L = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ -e^\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible car $\det A_\alpha \neq 0$ si $\alpha \neq 0$, et par un simple calcul, on obtient :

$$(D - L)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 \\ \frac{1}{\alpha} e^\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

et par conséquent :

$$\begin{aligned} H_{GS} &= (D - L)^{-1} U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 \\ \frac{1}{\alpha} e^\alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & e^\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ H_{GS} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\alpha} e^\alpha \\ 0 & \frac{1}{\alpha} e^{2\alpha} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La méthode de Gauss-Seidel est convergente si et seulement le rayon spectrale $\rho(H_{GS}) < 1$. Calculons les valeurs propres de H_{GS}. On a :

$$\begin{aligned} P_{H_{GS}}(\lambda) &= \det(H_{GS} - \lambda I) = \lambda^2 - \frac{1}{\alpha} e^{2\alpha} \lambda = 0, \\ &\Updownarrow \\ \lambda_1 &= 0, \ \lambda_2 = \frac{1}{\alpha} e^{2\alpha} \end{aligned}$$

Alors le rayon spectrale $\rho(H_{GS}) = \max(0, \frac{1}{\alpha}e^{2\alpha}) = \frac{1}{\alpha}e^{2\alpha}$. Finalement, pour $\alpha = 3$, on déduit que $\rho(H_{GS}) = \frac{1}{3}e^6 = 129.14 > 1$, et donc la méthode de Gauss-Seidel associée à A_3, est divergente.