UFAS Sétif 1. Département de Mathématiques. Faculté des Sciences. 23 Janvier 2018. Durée : 1h 30 mn. Examen du module : Analyse Matricielle.

Exercice 1 (4 pts) *Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, une matrice inversible. Notons par $A^* = (\bar{A})^T$ la matrice adjointe de A. Montrer que :*
1- $KerA^* = (ImA)^{\perp}$.
2- $KerA = KerA^*A$ *(utiliser 1).*

Exercice 2 (6 pts) *Soit A une matrice hermitienne ($A = A^*$). Montrer que :*
1- *A est diagonalisable et son* $\boldsymbol{Sp}(A) \subseteq \mathbb{R}$.
2- *Déduire que la matrice $(A - iI)$ est inversible.*
3- *On pose : $U = (A + iI)(A - iI)^{-1}$ montrer que $\mu = \frac{\lambda+i}{\lambda-i}$ est une valeur propre de U avec $\lambda \in \boldsymbol{Sp}(A)$.*
4- *Montrer que U est une matrice unitaire.*

Exercice 3 (6 pts) *Soit la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 100 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1- *Calculer $Cond_1(A)$.*
2- *Considérons les deux systèmes linéaires $Ax = b$, et $A(x + \Delta x) = b + \Delta b$. Montrer l'inégalité suivante : $\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq cond(A)\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$.*
3- *Soient $b = (100, 1)^T$ et $\Delta b = (0, -1)^T$. Déterminer l'erreur relative exacte $\frac{\|\Delta x\|_1}{\|x\|_1}$ puis comparer le avec $cond_1(A)\frac{\|\Delta b\|_1}{\|b\|_1}$. Conclure.*

Exercice 4 (4 pts) *Soient A et B deux matrices carrées réelles inversibles. Montrer que :*

$$\max\left(\frac{cond(A)}{cond(B)}, \frac{cond(B)}{cond(A)}\right) \leq cond(AB) \leq cond(A)cond(B).$$

`Note :` `Sp`(A) `désigne le spectre de la matrice` A `et`$cond(A) = \|A\|\,\|A^{-1}\|$ `avec` $\|.\|$ `, est une norme matricielle subordonnée. Le symbole` $\perp$ `désigne l'orthogonalité.`

Corrigé partiel de l'examen

Exercice 1.

1- On a :

$$\begin{aligned}(ImA)^\perp &= \{x\in\mathbb{C}^n : \langle x, Ay\rangle = 0, \forall y\in ImA\}\\ &= \{x\in\mathbb{C}^n : \langle A^*x, y\rangle = 0, \forall y\in Im(A)\}\\ &= \{x\in\mathbb{C}^n : A^*x = 0\}\\ &= \ker A^*.\end{aligned}$$

2- On a d'une part que :

$$KerA \subset KerA^*A$$

car si

$$x\in Ker(A) \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow A^*Ax = 0 \Rightarrow x\in KerA^*A.$$

D'autre part, on a :

$$KerA^*A \subset KerA$$

car si

$$\begin{aligned} x &\in KerA^*A \Rightarrow A^*Ax = 0 \Rightarrow Ax\in KerA^*) = (Im(A))^\perp.\\ &\Downarrow\\ \langle Ax, y\rangle &= 0,\ \forall y\in Im(A).\\ &\Downarrow\\ Ax &= 0 \Rightarrow x\in Ker(A).\end{aligned}$$

Exercice 2.

1- On a : A est une matrice hermitienne ($A = A^*$), alors elle est normale car :

$$AA^* = A^*A.$$

Donc d'après le Théorème de Schur A est diagonalisable et par conséquent il existe une matrice unitaire $U(UU^* = I)$ telle que :

$$A = UDU^* \text{ avec } D = \mathrm{Diag}(\lambda(A))\ \ :\lambda\in\mathrm{Sp}(A).$$

De plus A^* est aussi diagonalisable c-à-d $A^* = UD^*U$ avec D^* =Diag($\bar{\lambda}$ (A)):λ $\in$sp(A).et par conséquent :

$$A = A^* \Leftrightarrow D = D^* \Leftrightarrow \lambda = \bar{\lambda}.$$

Ce qui prouve que les valeurs propres de A sont réelles c.à.d **Sp**(A)$\subseteq \mathbb{R}$.
2- La matrice $A - iI$ est inversible car le spectre de A, est réel et donc impossible que $\lambda = i \Rightarrow \lambda - i \neq 0$.
3- Montrons que $\mu = \frac{\lambda - i}{\lambda + i} \in \mathbf{Sp}(U)$. Soit $\lambda \in$sp(A) alors $(\lambda - i)$ et $(\lambda + i)$ sont des valeurs propres de $(A - iI)$ et $(A + iI)$ car

$$(A - iI)x = Ax - ix = (\lambda - i)x$$

de même pour la matrice $(A + iI)$. Du cours, on sait que si $(\lambda - i)$ est une valeur propre de $(A - iI)$, alors $\frac{1}{\lambda - i}$ est une valeur propre de $(A - iI)^{-1}$. Finalement, on déduit que $\mu = \frac{\lambda + i}{\lambda - i}$ est une valeur propre de $U = (A + iI)(A - iI)^{-1}$.
4- La matrice U est unitaire si et seulement si $UU^* = U^*U = I$. On a :

$$\begin{array}{rcl} UU^* & = & (A+iI)(A-iI)^{-1}\left((A+iI)(A-iI)^{-1}\right)^* \\ & = & (A+iI)(A-iI)^{-1}(A-iI)^{*-1}(A+iI)^* \\ & = & (A+iI)(A-iI)^{-1}(A^*+iI)^{-1}(A^*-iI) \\ & = & (A+iI)(A-iI)^{-1}(A+iI)^{-1}(A-iI) \\ & = & (A+iI)((\mathbf{A}+\mathbf{iI})(\mathbf{A}-\mathbf{iI}))^{-1}(A-iI) \\ & = & (A+iI)((\mathbf{A}-\mathbf{iI})(\mathbf{A}+\mathbf{iI}))^{-1}(A-iI) \\ & = & (A+iI)(A+iI)^{-1}(A-iI)^{-1}(A-iI) \\ & = & I. \end{array}$$

L'égalité découle du fait que les deux matrices $(A - iI)$ et $(A + iI)$ commutent car :

$$(A + iI)(A - iI) = (A - iI)(A + iI)$$

Donc U est une matrice unitaire.
Exercice 3.
1- Calcul de $cond_1(A)$. On a :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 100 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice A est inversible car $\det A = 1 \neq 0$. A est triangulaire supérieure alors son inverse l'est aussi avec

$$a_{ii}^{-1} = \frac{1}{a_{ii}} = 1, \forall i = 1, 2.$$

Donc A^{-1} est de la forme :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Par un simple calcul on obtient :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -100 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$cond_1(A) = \|A\|_1 \left\|A^{-1}\right\|_1 = (101)^2 = 10201.$$

2-Voir le cours.
3. Calcul de l'erreur relative exacte. On résout le système d'origine et le système perturbé. La solution exacte est donnée par :

$$x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & -100 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

la solution perturbée est :

$$x + \Delta x = \begin{pmatrix} 1 & -100 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

L'erreur relative est donc

$$\delta_x = \frac{\|\Delta x\|_1}{\|x\|_1} = 101.$$

Calculons la borne théorique de cette erreur. On a :

$$cond_1(A)\frac{\|\Delta b\|_1}{\|b\|_1} = 10201 \times \frac{1}{101} = 101.$$

Conclusion :
i) la borne de l'erreur est égale à l'erreur relative exacte.
ii) la matrice est mal conditionnée car :

$$cond_1(A) = 10201 >> 1,$$

et donc une petite perturbation sur les données de b, conduit à des résultats catastrophes.

Exercice 4.
Les deux matrices A et B étant inversibles alors leurs produit AB est aussi inversible car $\det(AB) = \det A \det B \neq 0$. On a d'une part que :

$$\begin{aligned} cond(AB) &= \|AB\| \left\|(AB)^{-1}\right\| \qquad (1) \\ &= \|AB\| \left\|B^{-1}A^{-1}\right\| \\ &\leq \|A\| \left\|A^{-1}\right\| \|B\| \left\|B^{-1}\right\| \\ &= cond(A)cond(B). \end{aligned}$$

D'autre part, remarquons que :

$$A = ABB^{-1} \,\text{et}\, B = BAA^{-1}.$$

Appliquons (1) sur ses deux inégalitées on obtient :

$$\begin{aligned} Cond(A) &= cond(ABB^{-1}) \leq cond(AB)cond(B^{-1}) = cond(AB)cond(B) \\ &\Downarrow \\ cond(AB) &\geq \frac{cond(A)}{cond(B)}. \end{aligned}$$

de même pour B, on déduit que :

$$cond(AB) \geq \frac{cond(B)}{cond(A)}.$$

Finalement, il découle que :

$$cond(AB) \geq \max\left(\frac{cond(A)}{cond(B)}, \frac{cond(B)}{cond(A)}\right).$$