Exercice 1 *UFA Sétif 1, Département de Mathématiques, Faculté des Sciences. Master I : Optimisation et contrôle. Module d'Analyse Matricielle. Enseignant : M. ACHACHE. Jeudi: 12/1/2017.*

Examen

Exercice 2 (7 points) *Soit* $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, *une matrice de projection. Montrer que :*

1- (2 pts) La matrice $(I-P)$ *est une matrice de projection et que* $\mathbb{R}^n = \operatorname{Im} P \oplus \operatorname{Im}(I-P)$.

2- (5 pts) Soit la matrice

$$P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Montrer que P *est une matrice de projection non orthogonale diagonalisable et à diagonale fortement dominante et réductible.*

Exercice 3 (7 points) *Soit* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *une matrice hermitienne et définie positive et considérons l'application* $\mathcal{R}_A$ *définie par :*

$$x \mapsto \mathcal{R}_A(x) = \frac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|_2^2},\ x \in \mathbb{C}^n - \{0\}.$$

1- (3 pts) Montrer que $\mathcal{R}_A(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{C}^n - \{0\}$ *et que* $\mathcal{R}_A(x) = \langle A(\frac{x}{\|x\|_2}), \frac{x}{\|x\|_2}\rangle$.

2- (4 pts) Déduire que $\mathcal{R}_A$ *atteint ses bornes sur* $\mathbb{C}^n - \{0\}$ *et puis montrer que :*

$$\min_x \mathcal{R}_A(x) = \lambda_{\min}(A) > 0, \qquad \max_x \mathcal{R}_A(x) = \lambda_{\max}(A) > 0,$$

où $\lambda_{\max}(A)$ *et* $\lambda_{\min}(A)$, *sont respectivement, la plus grande et la plus petite valeur propre de* A.

Exercice 4 (6 points) *(Conditionnement)*

1- (3 pts) Soit A *une matrice symétrique réelle d'ordre* n *et inversible. Montrer que :*

$$cond_2(A^2) = (cond_2(A))^2.$$

2- (3 pts) Considérons la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & a \\ a & a-1 \end{pmatrix} \quad / \ a \in \mathbb{R}.$$

Calculer $cond_2(A)$ *si* $a > 0$ *et puis déduire la valeur de* $cond_2(A^2)$.

N.B. Le produit scalaire hermitien dans $\mathbb{C}^n$ et la norme associée sont notés, respectivement, par $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x\bar{y}_i$ et $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Les valeurs propres de la matrice A hermitienne et définie positive sont ordonnées comme suit : $0 < \lambda_{\min}(A) = \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_n = \lambda_{\max}(A)$. $\mathcal{R}_A$ s'appelle le quotient de Rayleigh.

Correction partielle de l'examen

Exercice 1:

1- Si P est une matrice de projection ($P^2 = P$), alors $(I-P)$ est aussi une matrice de projection car :

$$(I-P)^2 = I - 2P + P^2 = I - 2P + P = I - P.$$

Pour $\mathbb{R}^n = \operatorname{Im} P \oplus \operatorname{Im}(I-P)$, on a :

$$\mathbb{R}^n = \operatorname{Im} P \oplus \operatorname{Im}(I-P) \Leftrightarrow \mathbb{R}^n = \operatorname{Im} P + \operatorname{Im}(I-P) \text{ et } \operatorname{Im} P \cap \operatorname{Im}(I-P) = \{0\}.$$

En effet, pour $x \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$x = \underbrace{p(x)}_{\in \operatorname{Im} P} + \underbrace{x - p(x)}_{\in \operatorname{Im}(I-P)}$$

D'autre part, soit $y \in \operatorname{Im} P \cap \operatorname{Im}(I-P)$, alors

$$\begin{aligned} y &= x - P(x) = P(x) \Rightarrow P(y) = P^2(x) - P(x) = P^2(x) = P(x) = 0, \\ &\Downarrow \\ y &= 0. \end{aligned}$$

2- Soit

$$P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$P^2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = P.$$

Alors P est une matrice de projection.
Comme P est une matrice de projection symétrique alors $P^2 = P \neq I$. Donc P n'est pas orthogonale. P est une matrice symétrique réelle donc elle hermitinene et donc normale. D'après le Théorème de Schur est diagonalisable. P est à diagonale fortement dominante car P est à diagonale dominante et de plus il existe un $i = 2$,tel que $a_{22} = 2 > 0$. La matrice P est réductible car son graphe n'est pas fortement connexe.

Exercice 2:

1- $\mathcal{R}_A(x) = \frac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|^2}$, $x \in \mathbb{C}^n - \{0\}$,est un nombre réel strictement positif car $\langle Ax, x\rangle > 0, \forall\, x \in \mathbb{C}^n - \{0\}$, ceci découle du fait que la matrice A est hermitinne définie positive). De plus il est facile d'écrire

$$\mathcal{R}_A(x) = \langle A\frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|}\rangle.$$

2-Comme $\mathcal{R}_A$ est une forme quadratique donc elle est continue sur $\mathbb{C}^n - \{0\}$. De plus, il est facile de vérifier que :

$$\mathcal{R}_A(x) = \frac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|^2} = \mathcal{R}_A(y) \text{ où } y = \frac{x}{\|x\|}. \text{ D'ou } \|y\|_2 = 1.$$

Alors $\mathcal{R}_A$ se réduit à une application continue sur l'ensemble compacte

$$\mathcal{B}(0,1) = \{y \in \mathbb{C}^n : \|y\|_2 = 1\}$$

et par conséquent d'après le Théorème de Weierstrass $\mathcal{R}_A$ atteint ses bornes c'est à dire $\min_x \mathcal{R}_A$ et $\max_x \mathcal{R}_A$ existent et ils sont finis.
3- Calculons maintenant ses bornes. A étant hermitienne et définie positive, alors elle est diagonalisable de plus ses valeurs propres λ_i sont strictement positives. Supposons maintenant que ses valeurs propres sont ordonnées comme suit :

$$0 < \lambda_{\min}(A) = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n = \lambda_{\max}(A).$$

Comme A est diagonalisable, il existe une matrice unitaire U $(UU^* = I)$ telle que : $A = UDU^*$ avec $D :=$Diag $(\lambda_i : \lambda_i \in$spectre de $(A))$. Alors on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_A(y) &= \langle Ay, y\rangle = \langle UDU^*y, y\rangle \\ &= \langle DU^*y, U^*y\rangle \\ &= \langle Dz, z\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left|z_i\right|^2 \end{aligned}$$

avec $z = U^*y$ et $\|z\|_2 = 1$. Par conséquent, on a :

$$\lambda_{\min}(A) \leq \langle Dz, z\rangle \leq \lambda_{\max}(A) \quad \forall z \in \mathbb{C}^n, \|z\|_2 = 1.$$

Ces bornes sont atteintes et donc il existe $z = x_1,$ où x_1 est le vecteur propre associe à $\lambda_{\min}(A)$ et tel que $\lambda_{\min}(A) = \min_x \mathcal{R}_A$ et $z = x_n$,vecteur propre associe à $\lambda_{\max}(A)$ tel que $\lambda_{\max}(A) = \max_x \mathcal{R}_A$.
Exercice 3 :
1-A étant symétrique réelle et inversible, alors A^2 est aussi symétrique et inversible et par conséquent :

$$cond_2(A^2) = \frac{\left|\lambda_{\max}(A^2)\right|}{\left|\lambda_{\min}(A^2)\right|} = \frac{\left|\lambda_{\max}^2(A)\right|}{\left|\lambda_{\min}^2(A)\right|} = \frac{\left|\lambda_{\max}(A)\right|^2}{\left|\lambda_{\min}(A)\right|^2} = \left(\frac{\left|\lambda_{\max}(A)\right|}{\left|\lambda_{\min}(A)\right|}\right)^2 = (cond_2(A))^2.$$

2- Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & a \\ a & a-1 \end{pmatrix}.$$

A est une matrice symétrique réelle et inversible car $A = A^T$ et $\det A = -1 \neq 0$. La valeur de $cond_2(A)$ est donnée par :

$$cond_2(A) = \frac{|\lambda_{\max}(A)|}{|\lambda_{\min}(A)|}.$$

Calculons donc les valeurs propres de la matrice A. On a :

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - 2a\lambda + \left((a-1)(a+1) - a^2\right) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = a + \sqrt{a^2+1}\ ,\ \ \lambda_2 = a - \sqrt{a^2+1}.$$

Si $a > 0$,

$$cond_2(A) = \frac{a + \sqrt{a^2+1}}{-a + \sqrt{a^2+1}}$$

Comme A est symétrique, il découle de (1) que :

$$cond_2(A^2). = (cond_2(A))^2 = \left(\frac{a + \sqrt{a^2+1}}{-a + \sqrt{a^2+1}}\right)^2.$$