Préparation de l'examen
Module : Calcul Matriciel. Master I.
Optimisation et contrôle.

Questions supplémentaires sur le module de calcul matriciel.
Répondre à ses questions. (Préparer votre examen).

1. $A,\ B\ \in C^{n\times n},\ AB = I$ implique $AB = BA$.
2. $\lambda \in C$ valeur propre de $A \in C^{n\times n}$ implique λ^k valeur propre de A^k.
3. $\det(\lambda A) = \lambda \det A$ (donner un contre-exemple).
4. $\mathrm{Tr}(A^{-1}) = \dfrac{1}{\mathrm{Tr}(A)}$ (donner un contre-exemple).
5. $A,\ B\ \in C^{n\times n}$ et B diagonale, implique $AB = BA$ (donner un contre-exemple).
6. P et Q deux matrices de projections. Montrer que $(P - Q)$ n'est pas une matrice de projection.
7. Pour $A\ \in R^{n\times n}$, A est orthogonale. Montrer que A diagonalisable.
8. A une matrice antisymétrique ($A = -A^T$). On pose

$$B_- = I - A$$

et

$$B_+ = I + A.$$

B_- inversible implique B_+ inversible et la matrice

$$C = B_+ B_-^{-1}$$

est orthogonale (utiliser le fait que si $(B_+)^T$ est inversible alors B_+ est inversible.

9. Si $A^* = -A^2$. Montrer que A est normale mais non hermitienne. Déduire qu'elle est diagonalisable et donner ses valeurs propres et son $\det A$. Déduire que A est inversible.

10. A est définie positive si et seulement si $\dfrac{A+A^T}{2}$ (la partie symétrique de A), est définie positive. (R^n est muni d'un produit scalaire usuel $x^Ty = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$).

11. Sot $A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$. A est à diagonale dominante implique A inversible (fausse. Donner un contre-exemple).

12. $A,\ B \in R^{n\times n}$ deux matrices symétriques définies positives. Montrer que :

$$AB = A^{1/2}A^{1/2}BA^{1/2}A^{-1/2},$$

diagonalisable et $\mathrm{Sp}(AB) \subset]0, +\infty[$ (utiliser le fait que toute matrice symétrique définie positive admet une racine carrée notée $A^{1/2}$ et puis déduire que AB est similaire à la matrice symétrique définie positive $A^{1/2}BA^{1/2}A^{-1/2}$.

13. Si A est une matrice réelle définie positive. Montrer que A^{-1}est définie positive.

14. Etant donné une norme vectorielle $\|.\|$, on pose :

$$\|A\| = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

1- Montrer que

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

2- Déduire que $\|A\| < +\infty$ (Indication : montrer que le nombre $\|A\|$ existe).
3- Montrer que $\|A\| = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$, est une norme subordonnée.

15. Soit $\|.\|$ une norme matricielle subordonnée ou non. Montrer que :

$$\frac{1}{2}\left\|A + A^T\right\| \leq \|A\|.$$

16. Soient A et B deux matrices normales. La matrice AB est -elle normale ?

17. Montrer que la matrice de Hilbert

$$H = (h_{ij}) = \left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{1\leq i,j\leq n}.$$

1- Symétrique.

2- $h_{ij} = \int_0^1 t^{i+j-2}dt.$

3- $x^T Hx = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_{ij}x_i x_j = \int_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j t^{i+j-2} dt = \int_{i=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i t^{i-1} \right)^2 dt \geq$ $0 \; \forall x \in R^n$.
4- Déduire que H est définie positive si $x \neq 0$.

18. Soit A une matrice carrée d'ordre n. On pose $M = A^T A$. Montrer que :
1- M est symétrique semidéfinie positive.
2- Réciproquement, si M est une matrice symétrique définie positive, il existe une matrice A carrée réelle d'ordre n telle que :

$$M = A^T A.$$

3- Montrer que M est définie positive si et seulement si A est inversible.
4- Montrer que $rg(A) = rg(M)$.

19. Montrer que si A est une matrice symétrique définie positive alors ses valeurs propres $\lambda_i(A) > 0 \; \forall i$.

20. Soit A une matrice symétrique réelle, telle que :

$$a_{ii} \; > 0, \; \forall i = 1, \dots, n.$$

Montrer que si A est à diagonale strictement dominante, alors elle est définie positive.

21. Soit la matrice

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1- Pour quelles valeurs de α la matrice A_α est-elle irréductible ?
2- Pour quelles valeurs de α la matrice A_α est-elle définie positive (utiliser 19)?
3- Donner les disques de Guershgorin de la matrice A_2 avec la représentation géométrique.

22. Donner le théorème de Ghershgorin-Hadamard et donner son démonstration.

23. **1-** Une matrice A est dite monotone et on dit $M-$matrice si A^{-1}existe et si $A^{-1} \geq 0$ ($a_{ij}^{-1} \geq 0 \; \forall i, j$).Soient les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Les matrices A et B sont -elles monotones?
2- Montrer que si M est monotone si et seulement si $\{x \in R^n : \; Ax \geq 0 \Rightarrow x \geq 0\}$.

24. On considère le système linéaire perturbé suivant :

$$(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b$$

lié au système d'origine $Ax = b$ où A est une matrice inversible.
1- Vérifier que :

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x + \Delta x\|} \leq cond(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \tag{1}$$

avec $cond(A) = \|A\| \left\|A^{-1}\right\|$, est le conditionnement de la matrice A lié aux normes subordonnées.
2- On considère le système linéaire suivant :

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix} \tag{2}$$

1- Montrer que le système (2) admet une solution unique :

$$x = (1, 1, 1, 1)^T.$$

Maintenant on considère le système perturbé :

$$(A+\Delta A)(x+\Delta x) = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7.08 & 5.04 & 6 & 5 \\ 8 & 5.98 & 9.89 & 9 \\ 6.99 & 4.99 & 9 & 9.98 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix} \tag{3}$$

2- Montrer que la solution du système perturbé est :

$$x + \Delta x = (-81, 137, -34, 22)^T.$$

3- Comparer $\dfrac{\|\Delta x\|}{\|x + \Delta x\|}$ avec $\dfrac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$, en utilisant l'inégalité (1).