`UFA Sétif 1, Département de Mathématiques, Faculté des Sciences.`
`Analyse numérique 1. Enseignant : M. ACHACHE. 2018/2019.`

Interrogation écrite
Groupe $\mathbf{B_3}$

Exercice 1 *Soient* $x = 25 \pm 0.01,\ y = 1.2 \pm 0.02,\quad z = 3.2 \pm 0.03.$
1- Calculer $U = xyz$.
2- Déterminer le nombre de chiffres exacts dans U.

Exercice 2 *Soit la matrice*

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & e^\alpha \\ 1 & 1 \end{pmatrix} : \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

1- *Calculer* $\det A_\alpha$.
2- *On pose :*

$$f(\alpha) = \det A_\alpha,$$

montrer que $f(\alpha) \neq 0,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$ *et déduire que* A *est inversible . (Indication : étudier les variations de la fonction* $f(\alpha)$ *sur son domaine).*
3- *Pour quelles valeurs de* α, *la matrice* A *est symétrique ?*
4- *Donner la matrice de Jacobi* H_J, *pour* $\alpha = 3$, *associée à* A *et puis étudier son convergence.*

Solution.

Exercice 1 :
1- On a :

$$U = xyz = 96.$$

Pour avoir le nombre des chiffres exacts n dans U, on calcule son erreur absolue ΔU :

$$\begin{aligned}
\Delta U &= \left|\frac{\delta U}{\delta x}\right| \Delta x + \left|\frac{\delta U}{\delta y}\right| \Delta y + \left|\frac{\delta U}{\delta z}\right| \Delta z = |yz|\,\Delta x + |xz|\,\Delta y + |xy|\,\Delta z \\
&= 3.84\Delta x + 80\Delta y + 30\Delta z \\
&= (3.84 \times 0.01) + (80 \times 0.02) + (3.2 \times 0.03) = 1.7344.
\end{aligned}$$

Donc n, est le nombre des chiffres exacts dans U si :

$$\Delta U = 1.7344 \leq \frac{1}{2} 10^{2-n}$$

car $m=1$. Avec un simple calcul on déduit que cette inégalité est vraie que si $n=1$. Alors U admet uniquement un chiffre exact. On constate que dans ce cas l'erreur absolue n'est pas fiable de donner une précision sur le nombre des chiffres exacts de U. Donc on utilise l'erreur relative. Par définition et en utilisant le logarithme népérien, on obtient :

$$\begin{aligned}\delta U &= \frac{\Delta U}{U} = \delta_x + \delta_y + \delta_z = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta z}{z} \\ \delta U &= \frac{0.01}{25} + \frac{0.02}{1.2} + \frac{0.03}{3.2} = 0.026442.\end{aligned}$$

Alors si $n=2$, on obtient :

$$\delta U = 0.026442 \leq \frac{1}{9}10^{1-2} = 0.01111.$$

Par conséquent U admet exactement 2 chiffres exacts.

Exercice 2.

1. $\det A_\alpha = \alpha - e^\alpha : \ \alpha \in \mathbb{R}$.
2. On pose :

$$f(\alpha) = \alpha - e^\alpha.$$

La fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\lim_{x \mapsto -\infty} f(x) = -\infty$$

et

$$\lim_{x \mapsto +\infty} f(x) = \infty - \infty \quad \text{(FI)}.$$

On a :

$$\begin{aligned}\lim_{x \mapsto +\infty} f(x) &= \lim_{x \mapsto +\infty} (\alpha - e^\alpha) = \lim_{x \mapsto +\infty} e^\alpha(\alpha e^{-\alpha} - 1) \\ &= \lim_{x \mapsto +\infty} -e^\alpha = -\infty.\end{aligned}$$

Par conséquent comme $(\lim_{x \mapsto -\infty} f(x) = -\infty)(\lim_{x \mapsto +\infty} f(x) = -\infty) = +\infty > 0$, alors $f(\alpha) = 0$,admet un nombre pair sur $\mathbb{R}$ ou bien elle n'admet aucune racines dans $\mathbb{R}$. Pour s'assurer on étudie ses variations sur $\mathbb{R}$. La fonction f est de classe $C^\infty(\mathbb{R})$ et on a :

$$\begin{aligned}f'(x) &= 1 - e^\alpha = 0 \\ &\Updownarrow \\ \alpha &= 0.\end{aligned}$$

Le tableau de variations de f est donné par :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
signe de f'		$-$	0	$+$	
variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$

On constate donc d'après le tableau de variations, que $f(\alpha) < 0,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$, ceci implique que $f(\alpha) \neq 0$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. Ceci signifie aussi que :

$$\det A_\alpha \neq 0$$

et donc la matrice A_α est inversible $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

3- La matrice $A_\alpha$est symétrique si et seulement si $A_\alpha = (A_\alpha)^T$. Il est claire donc que :

$$A_\alpha = (A_\alpha)^T \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & e^\alpha \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ e^\alpha & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow e^\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = 0.$$

4- La matrice de Jacobi H_J est donnée par :

$$H_J = D^{-1}(L+U),$$

avec

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} 0 & e^\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D^{-1} existe si $\alpha \neq 0$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et par conséquent :

$$\begin{aligned} H_J &= D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & e^\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \\ H_J &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\alpha}e^\alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La méthode de Jacobi est convergent si et seulement la rayon spectrale de $\rho(H_J) < 1$. Calculons les valeurs propres de H_J. On a :

$$\begin{aligned} P_{H_J}(\lambda) &= \det(H_J - \lambda I) = \lambda^2 - \frac{1}{\alpha}e^\alpha = 0, \\ &\Updownarrow \\ \lambda_1 &= -\frac{1}{\sqrt{\alpha}}e^{\frac{1}{2}\alpha},\ \lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}e^{\frac{1}{2}\alpha} \end{aligned}$$

Ce qui implique :

$$\rho(H_J) = \max_{\lambda} \left\{ \left| -\frac{1}{\sqrt{\alpha}} e^{\frac{1}{2}\alpha} \right|, \left| \frac{1}{\sqrt{\alpha}} e^{\frac{1}{2}\alpha} \right| \right\} = \left| \frac{1}{\sqrt{\alpha}} e^{\frac{1}{2}\alpha} \right|.$$

Pour $\alpha = 3$, la matrice H_J devient :

$$H_J = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3}e^3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\rho(H_J) = \left| \frac{1}{\sqrt{3}} e^{\frac{1}{2}3} \right| = 2.5875 > 1.$$

Finalement, on déduit que la méthode de Jacobi associée à A_3, est divergente car dans ce cas $\rho(H_J) > 1$.
On peut aussi calculer H_J par la formule :

$$H_J = I - D^{-1}A.$$