Module : Modélisation et Simulation

TD N °1

Exo 1 : Comportement de l'étudiant

Un étudiant a l'habitude de travailler de la manière suivante. S'il étudie toute une nuit, il est sûr à 70% de ne pas étudie toute la nuit suivante. Par contre, s'il n'étudie pas une certaine nuit, il est sûr à 60% qu'il ne travaillera pas également la nuit suivante. Avec quelle fréquence étudie-t-il en fin de compte?

Exo 2 : Point fixe

Montrer que le vecteur u = (b, a) est un point fixe de la matrice stochastique générale 2*2

$$P = \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix}$$

Exo 3 : Application de point fixe

A l'aide du résultat d'exercice 2, calculer l'unique vecteur de probabilité constant de chacune des matrices suivantes:

$$A= \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B= \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix} \qquad C= \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix}$$

Exo 4 : Matrice de transition

Soit la matrice de transition $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ et $P = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$ et la distribution initiale de vecteur de probabilité.

Définir et calculer les vecteurs : $M_{21}^{(0)}$ $M^{(3)}$ $P_2^{(3)}$

Module : Modélisation et Simulation

TD N °2

Exo 1 : Comportement de souris

Un psychologue fait les hypothèses suivantes sur le comportement de souris soumises à un régime alimentaire particulier. Lors d'une expérience particulière, 80% des souris qui allaient vers la droite, lors de l'expérience précédente, iront également vers la droite, et 60% des souris qui allaient vers la gauche lors de l'expérience précédente, iront vers la droite cette fois ci. En supposons que 50% allaient à droite, que va prédire le psychologue pour

1. La seconde expérience,
2. La troisième expérience,
3. La millième expérience.

Exo 2 : Comportement de l'étudiant

Un étudiant a l'habitude de travailler de la manière suivante. S'il étudie toute une nuit, il est sûr à 70% de ne pas étudie toute la nuit suivante. Par contre, s'il n'étudie pas une certaine nuit, il est sûr à 60% qu'il ne travaillera pas également la nuit suivante. Avec quelle fréquence étudie-t-il en fin de compte?

Exo 3 : Urne des billes

Une urne A contient 2 billes blanches, et une urne B contient 3 billes rouge. A chaque étape du processus, on prend une bille dans chaque urne et on permute ces deux urnes. L'état a_i du système est le nombre "i" de billes rouges présentes dans l'urne A.

1. Quel est la probabilité pour l'urne A renferme 2 billets rouges après 3 tirages ?
2. Quel est, à la limite la probabilité pour l'urne A renferme 2 billets rouges?
3. Calculer la matrice de transition M ?

Module : Modélisation et Simulation

TD N °3

Exo 1 : Matrice de transition

Soit la matrice de transition M = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ et P = $\begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$ et la distribution initiale de vecteur de probabilité.

Définir et calculer les vecteurs : $M_{21}{}^{(0)}$ $M^{(3)}$ $P_2{}^{(3)}$

Exo 1 : Vecteur de probabilité limite

Soit la matrice de transition M = $\begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ et la distribution initiale de vecteur de probabilité et P^0 = $\begin{bmatrix} 2/3 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$

Calculer $M_{32}{}^{(2)}$ $M_{13}{}^{(2)}$ $M^{(4)}$ $P_3{}^{(4)}$

Module : Modélisation et Simulation

<u>TD N °4</u>

Exo 1 : Chaine de Markov

Soit une chaine de Markov a deux états la matrice de probabilité de transition

$$M = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

1. Calculer M^2, M^4, M^8, M^{16}
2. Que semble-t-il raisonnable de conclure ?
3. Vérifier que cette conclusion et bien correcte ?
4. Calculer M^n après avoir tracer le graphe ?
5. Calculer les f_{ij}^n *et* μ
6. Classer les états en utilisant les résultats précédents ?
7. Trouver la limite de P^n?
8. S'agit-il d'une distribution stationnaire ?

Exo 1 : Classification des états

On se donne la matrice de probabilte de transition suivante :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

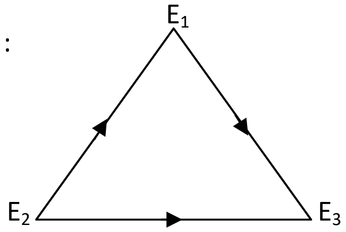
1. Tracer le graphe associe à la matrice de transition ?
2. Calculer M^2 ?
3. Classer les états ?
4. Calculer le vecteur de limite $P\infty$?

Module : Modélisation et Simulation

TD N °5

Exo 1 : Vecteur de probabilité limite

Soit le graphe :



1. Etablir la matrice de transition

Notez que $M = \begin{bmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n+1} \\ a_{n+1} & a_n & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_{n+1} & a_n \end{bmatrix}$ $\quad a_n = \frac{1}{3}\left(1 + 2\cos\frac{2\pi n}{3}\right)$

Soit $P^0 = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$ Calculer $P(\infty)$

Exo 2 : Processus de naissance et de mort

Soit un processus de naissance et de mort homogène avec des taux de naissance et de mort constants indépendante des populations.

1- Etudier le régime permanant des équations qui se gouvernent en établissant
   - **a.** Le calcul de P_0^*
   - **b.** Le calcul de P_n^*
   - **c.** La condition de convergence

2- La limite supérieure de la population est N, Ecrire les équations différentielles du processus. On établira une équation différentielle additionnelle à N.

Exo 3 : Processus de Poisson

Soit un processus de poisson de taux λ

1- Quelle est la probabilité pour que n évènements se produisissent entre 0 et t ? entre 1 et 2 ? entre n et n+1, commenter ?

2- Quelle est la probabilité pour qu'un évènement se produise entre t et $\Delta t +$ t ? zéro évènement ? au moins un événement ?

3- Calculer le nombre moyen d'évènements se produisant entre 0 et t ainsi que sa variance ?

Module : Modélisation et Simulation

TD N °6

Exo 1 : File d'attente générale

Modèle général, une file, un serveur avec régime permanant. On se connait pas le processus des arrives ni celui de serveur, mais en sait que :

- Qu'il y a un régime permanant
- Le nombre moyen $\overline{n}$ d'unités dans le système
- Le taux d'entrée λ
- Le taux de service μ
- $\lambda / \mu \leq 1$
- que la file illimite

➥ Calculer en fonction de $\overline{n}$, λ, μ, P_0^* les éléments suivants :

1- Longueur moyen de la file $\bar{\nu}$

2- Temps moyen de service

3- Tqux moyen $\bar{\rho}$ d'inoccupation du service

4- $\overline{t}_s$ temps moyen passe dans le système

5- $\overline{t}_f$ temps moyen passe dans la file

Exo 2 : Etude de la file M/M/S

On considère un système ou le taux moyen des arrives est λ et le taux de service μ_n est proportionnel au nombre d'unités dans le système.

1- Etablir la probabilité P_n^* d'un nombre d'unités *n* dans le système ?

2- En déduire P_n^* dans le cas où le nombre de serveurs est très grand ?

3- Quelle est la probabilité d'attente nulle dans le cas où le nombre de serveur est limité ?

4- Quelle doivent cette dernière probabilité lorsque le nombre de serveurs devient très grand ?

5- Montrer que le nombre $\bar{\nu}$ d'unités dans la file est donné par la formule suivante :

Application Numérique

- Taux moyen des arrives est λ = 8
- Taux de service $\mu = 1min$
- Quelle est la probabilité d'attente nulle dans le cas où le nombre de serveur S = 5, 6 et 7.
- Quelle doivent cette dernière probabilité lorsque le nombre de serveurs devient très grand ?
- Calculer $\bar{\nu}$ et le temps moyen d'attente dans la file $\overline{t}_f$ pour S = 5, 6 et 7.