Rappel de cours et exercices résolus d'analyse numérique 1

Enseignant : Mohamed ACHACHE [1]

1. **Laboratoire de Mathématiques Fondamentales et Numériques. Faculté des Sciences. Département de Mathématiques. Université Ferhat Abbas, Sétif1. Sétif 19000, Algérie. e-mail : achache_m@univ-setif.dz**

Table des matières

Chapitre 1

Erreurs, Auteur : M. Achache

1.1 Résumé du cours

<u>Utilité de l'erreur</u>. Evaluer les méthodes numériques utilisées pour résoudre différents problèmes mathématiques en reconnaissant l'exactitude des résultats.
<u>Source de l'erreur</u>. La source de l'erreur, est les opérations arithmétiques (Arrondissement des nombres et les erreurs de données) ainsi que des méthodes théoriques qui remplacent les relations mathématiques par une autre simple (par exemple la formule de Taylor).

1.1.1 Erreurs absolues et relatives

Définition 1. *Soit* $\mathbf{a}$ *une valeur approchée d'un nombre* $\mathbf{A}$ *(généralement inconnu). Alors, l'erreur absolue en* $\mathbf{a}$ *est définie par :*

$$\boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{a}} = \left|\mathbf{A} - \mathbf{a}\right|.$$

Tout nombre $\boldsymbol{\Delta} > \mathbf{0}$, *qui vérifie :*

$$\boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{a}} \leq \boldsymbol{\Delta}$$

s'appelle un majorant de l'erreur absolue $\boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{a}}$ *et on écrit :*

$$\mathbf{A} \simeq \mathbf{a} \pm \boldsymbol{\Delta}.$$

Définition 2. *L'erreur relative de* $\mathbf{a}$ *est définie par :*

$$\delta_{\mathbf{a}} = \frac{|A - \mathbf{a}|}{|A|} = \frac{\boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{a}}}{|A|}.$$

Si $\delta > 0$, *est tel que :*

$$\delta_{\mathbf{a}} \leq \delta,$$

alors δ *s'appelle un majorant de* $\delta_{\mathbf{a}}$ *et on prend comme majorant de l'erreur relative exacte, la valeur :*

$$\delta \simeq \frac{\boldsymbol{\Delta}}{|\mathbf{a}|}.$$

Les chiffres significatifs et exacts d'un nombre a.
Chaque nombre $\mathbf{a} > 0$, admet une écriture décimale de la forme :

$$\mathbf{a} = \alpha_m 10^m + \alpha_{m-1} 10^{m-1} + \ldots + \alpha_{m-n+1} 10^{m-n+1} + \ldots$$

tels que :

$$\alpha_m \neq 0,\ \alpha_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}.$$

Définition 3. *Les chiffres significatifs d'un nombre* $\mathbf{a} > 0$*, sont tous ces chiffres qui sont différents de zéro et aussi le zéro s'il se trouve entre deux chiffres significatifs ou bien s'il présente un chiffre conservé.*

1.1.2 Erreur absolue et chiffres exacts.

Les chiffres exacts d'un nombre a > 0.

Définition 4. *Si l'inégalité suivante :*

$$\mathbf{\Delta_a} \leq \frac{1}{2} 10^{m-n+1}$$

est vérifiée, alors les n *chiffres significatifs premiers s'appelle les chiffres exacts de* $\mathbf{a}$.

1.1.3 Erreur relative et chiffres exacts.

Définition 5. *Le nombre* $\mathbf{a}$ *possède* n *chiffres exacts* $\Rightarrow$

$$\delta_{\mathbf{a}} \leq \frac{1}{\alpha_m} 10^{1-n}.$$

1.1.4 Arrondissement d'un nombre a

Règle d'arrondissement. Pour arrondir un nombre $\mathbf{a}$ jusqu'à n chiffres significatifs, il faut éliminer les chiffres à droite du $n^{ème}$ chiffre significatif conservé.
• Si le $(n+1)^{ème}$ chiffre significatif est $> \mathbf{5}$, on **augmente** le $n^{ème}$ chiffre de $\mathbf{1}$.
• Si le $(n+1)^{ème}$ chiffre significatif est $< \mathbf{5}$, les chiffres retenus restent **inchangés**.
• Si le $(n+1)^{ème}$ chiffre significatif est $\mathbf{5}$, alors deux cas sont possibles :
a) Tous les chiffres rejetés, situés après le $(n+1)^{ème}$ chiffre significatif, sont des zéros. On applique la règle du chiffre pair c'est à dire : le $n^{ème}$ chiffre significatif reste inchangé s'il est pair sinon on lui ajoute 1 s'il est impair.
b) Parmi les chiffres rejetés, situés après le $(n+1)^{ème}$ chiffre significatif, il existe au moins un qui soit non nul : on ajoute $\mathbf{1}$ au $n^{ème}$ chiffre significatif.

1.1.5 Loi générale de l'erreur

Soit

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

telle que f est une fonction différentiable aux points x_i. La formule suivante :

$$\mathbf{\Delta y} = \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| \mathbf{\Delta x}_1 + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| \mathbf{\Delta x}_2 + \ldots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right| \mathbf{\Delta x}_n,$$

où

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\ (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

sont les dérivées partielles de f en x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, s'appelle **la loi générale de l'erreur**.
Problème directe. Si les erreurs $\mathbf{\Delta x}_i$ sont **connues** et $\mathbf{\Delta y}$ est inconnue. Dans ce cas on remplace les $\mathbf{\Delta x}_i$ par leurs valeurs dans la formule de la loi générale, et on détermine $\mathbf{\Delta y}$.
Problème inverse. L'erreur $\mathbf{\Delta y}$ est **connue** et on veut déterminer les erreurs $\mathbf{\Delta x}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Dans ce cas, on applique le principe **d'égalité d'effet** qui est mathématiquement équivalent à l'égalité des quantités

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| \mathbf{\Delta x}_1 = \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| \mathbf{\Delta x}_2 = \cdots = \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right| \mathbf{\Delta x}_n.$$

D'où, on obtient :

$$\mathbf{\Delta x}_i = \frac{\mathbf{\Delta y}}{n\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|}, i = 1, 2, \ldots, n.$$

1.2 Exercices résolus

Exercice 1.
• Quel est le nombre nécessaire de chiffres exacts pour que l'erreur relative commise dans le calcul de $x = \sqrt{28}$ ne dépasse pas l'erreur relative 1%.
• Même question pour le nombre $x = \sqrt{31}$ avec l'erreur relative ne dépasse pas 0.1%.
Solution.
• On a :

$$x = \sqrt{28} \simeq 5.291502622 = 5 \times 10^0 + 2 \times 10^{-1} + ...$$

donc

$$\alpha_m = 5, \, m = 0,$$

et

$$\delta_x \leq \frac{1}{\alpha_m} 10^{1-n} = \frac{1}{5} 10^{1-n}.$$

Soit n le nombre exact dans x, alors d'après la question

$$\delta_x \leq \frac{1}{5} 10^{1-n} \leq 1\% = 0.01.$$

Ceci est équivalent à déterminer n tel que :

$$10^{1-n} \leq 0.05.$$

L'inégalité $10^{1-n} \leq 0.05$, est vérifiée si et seulement si $n \geq 3$. Donc, il faut prendre au moins 3 chiffres exacts dans le nombre x et dans ce cas l'erreur absolue est donnée par :

$$\Delta_x \leq \frac{1}{2} 10^{m-n+1} = \frac{1}{2} 10^{0-3+1} = \frac{1}{2} 10^{-2} = 0.005$$

et par conséquent, on peut prendre comme valeur approchée de $\sqrt{28}$ toutes les valeurs suivantes :

$$\sqrt{28} \simeq 5.29 \pm 0.005.$$

Remarque. On peut aussi déduire n de la manière suivante :

$$\begin{array}{rcll}
\ln(10^{1-n}) & \leq & \ln(0.05) & (\ln \text{ désigne le logarithme népérien}) \\
& \Updownarrow & & \\
(1-n)\ln 10 & \leq & \ln(0.05) & \\
& \Updownarrow & & \\
(1-n)2.3 & \leq & -2.995 & \\
& \Updownarrow & & \\
n & \geq & 2.3 & \\
& \Updownarrow & & \\
n & \geq & 3. &
\end{array}$$

• Pour $x = \sqrt{31}$, on a :

$$x = \sqrt{31} \simeq 5.5677643628 = 5 \times 10^0 + 5 \times 10^{-1} + ...$$

donc

$$\alpha_m = 5, \ m = 0,$$

et

$$\delta_x \leq \frac{1}{\alpha_m} 10^{1-n} = \frac{1}{5} 10^{1-n}.$$

Soit n le nombre de chiffres exacts dans x, alors d'après la question

$$\delta_x \leq \frac{1}{5} 10^{1-n} \leq 0.1\% = 0.001.$$

Ceci est équivalent à déterminer n tel que :

$$10^{1-n} \leq 0.005.$$

L'inégalité $10^{1-n} \leq 0.005$, est vérifiée si et seulement si $n \geq 4$. Donc, il faut prendre au moins 4 chiffres exacts dans le nombre x et dans ce cas l'erreur absolue est donnée par :

$$\Delta_x \leq \frac{1}{2} 10^{m-n+1} = \frac{1}{2} 10^{0-4+1} = \frac{1}{2} 10^{-3} = 0.0005$$

et par conséquent, on peut prendre comme valeur approchée de $\sqrt{31}$ toutes les valeurs suivantes :

$$\sqrt{31} \simeq 5.567 \pm 0.0005.$$

<u>**Exercice 2.**</u>
a. Notons par $\mathbf{\Delta}_a$, l'erreur absolue d'un nombre **a**. Montrer que si :

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

alors,

$$\mathbf{\Delta_a} \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbf{\Delta_{a_i}}.$$

b. Notons par δ_a l'erreur relative d'un nombre a. Montrer que si :

$$\mathbf{a} = \prod_{i=1}^{n} a_i, \quad a_i > 0$$

alors

$$\delta_a \leq \sum_{i=1}^{n} \delta_{a_i}.$$

c. Soient les nombres suivants :

$$a_1 = 3.124, \ a_2 = 2.01, \ a_3 = 38.1.$$

Supposons que tous les chiffres de $a_i, i = 1, 2, 3$ sont exacts, alors combien de chiffres exacts possède le nombre

$$a = a_1 + a_2 + a_3.$$

Solution.

a. Soit $a = \sum_{i=1}^{n} a_i$ la valeur approchée de la valeur exacte $A = \sum_{i=1}^{n} A_i$ telle que a_i, est la valeur approchée de $A_i, i = 1, 2, \ldots, n$. Notons par :

$$\boldsymbol{\Delta}_a = |\mathbf{A} - \mathbf{a}|,$$

l'erreur absolue commise en a et par :

$$\boldsymbol{\Delta}_{a_i} = |A_i - a_i|, \; i = 1, 2, \ldots, n$$

l'erreur absolue commise dans chaque a_i. Alors, on a :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Delta}_a &= |\mathbf{A} - \mathbf{a}| = \left| \sum_{i=1}^{n} A_i - \sum_{i=1}^{n} a_i \right| \\
&= |A_1 + A_2 + \ldots + A_n - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)| \\
&= |A_1 - a_1 + A_2 - a_2 + \ldots + A_n - a_n| \\
&\leq |A_1 - a_1| + |A_2 - a_2| + \ldots + |A_n - a_n| = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\Delta}_{a_i}.
\end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\Delta_a \leq \sum_{i=1}^{n} \Delta_{a_i}.$$

b. On a :

$$a = \prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 a_2 \ldots a_n.$$

Alors

$$\ln a = \ln \prod_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} \ln a_i.$$

On dérive, on obtient :

$$\frac{\partial a}{a} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_i}{a_i}.$$

En tenant compte que :

$$\frac{\partial a}{a} \simeq \frac{\Delta a}{a} \text{ et } \frac{\partial a_i}{a_i} \simeq \frac{\Delta a_i}{a_i}$$

il découle que :

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta a}{a} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta a_i}{a_i} \\
&\Downarrow \\
\left|\frac{\Delta a}{a}\right| &= \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta a_i}{a_i}\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\Delta a_i}{a_i}\right| = \sum_{i=1}^{n} \frac{|\Delta a_i|}{|a_i|} \\
&\Downarrow \\
\delta_a &\leq \sum_{i=1}^{n} \delta_{a_i}.
\end{aligned}$$

c. Soit

$$a = a_1 + a_2 + a_3$$

tels que :

$$a_1 = 3.124,\ a_2 = 2.01,\ a_3 = 38.1.$$

La question est de calculer le nombre des chiffres exacts n dans $a > 0$, sachant que tous les chiffres de a_i sont exacts. Pour calculer n, on doit calculer l'erreur absolue dans a. On a :

$$\boldsymbol{\Delta}_a = \Delta_{a_1} + \Delta_{a_2} + \Delta_{a_3}.$$

Calculons maintenant les erreurs absolues $\boldsymbol{\Delta} a_i$ dans chaque nombre a_i. On a :

$$\begin{aligned}
a_1 &= 3.124 = 3.10^0 + 1.10^{-1} + 2.\ 10^{-2} + 4 \times 10^{-3} \\
&\Downarrow \\
m &= 0 \,\text{et}\, n = 4. \\
a_2 &= 2.01 = 2.10^0 + 0.\ 10^{-1} + 1.\ 10^{-2} \\
&\Downarrow \\
m &= 0 \,\text{et}\, n = 3. \\
a_3 &= 38.1 = 3.10^1 + 8.10^0 + 1.10^{-1} \\
&\Downarrow \\
m &= 1 \,\text{et}\, n = 3.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\Delta_{a_1} &= \frac{1}{2}10^{m-n+1} = \frac{1}{2}10^{-4+1} = \frac{1}{2}10^{-3} = 0.0005 \\
\Delta_{a_2} &= \frac{1}{2}10^{m-n+1} = \frac{1}{2}10^{-3+1} = \frac{1}{2}10^{-2} = 0.005 \\
\Delta_{a_3} &= \frac{1}{2}10^{m-n+1} = \frac{1}{2}10^{1-3+1} = \frac{1}{2}10^{-1} = 0.05.
\end{aligned}$$

d'où

$$\boldsymbol{\Delta}_a = \Delta_{a_1} + \Delta a_2 + \Delta a_3 = 0.0005 + 0.005 + 0.05 = 0.0555.$$

Donc n est le nombre de chiffres exacts dans a si :

$$\mathbf{\Delta}_a \leq \frac{1}{2}10^{m-n+1}.$$

On a :

$$\begin{array}{rcl} a &=& 3.124 + 2.01 + 38.1 = 43.234. \\ &\Downarrow& \\ m &=& 1. \end{array}$$

Alors, on cherche n qui vérifie l'inégalité suivante :

$$\begin{array}{rcl} 0.0555 &\leq& \frac{1}{2}10^{2-n}. \\ &\Updownarrow& \\ n &\leq& 2. \end{array}$$

Alors a admet au plus 2 chiffres exacts. Vérifions que le chiffre dans l'ordre 2 est exact. En effet, pour $n = 2$, le chiffre 3 dans le nombre 43.234 est exact car $0.0555 < 0.5$. Alors a admet exactement deux chiffres exacts. Donc on peut prendre :

$$a = 43 \pm 0.0555.$$

Exercice 3. Arrondir les nombres suivants à **n=4** chiffres exacts et déterminer l'erreur absolue à chaque fois .

$$x_1 = 32.3462,\ x_2 = 12.12143,\quad x_3 = 173.7500,\ x_4 = 173.0500,$$
$$x_5 = 972.2534,\quad x_6 = 0.012051,\quad x_7 = 0.00123650.$$

Solution. On a :

$$\begin{array}{rcccc} x_1 &=& 32.34\mathbf{6}2 &\simeq& 32.35 \pm 0.004 \\ x_2 &=& 12.12\mathbf{1}43 &\simeq& 12.12 \pm 0.001 \\ x_3 &=& 173.7\mathbf{5}00 &\simeq& 173.8 \pm 0.05 \\ x_4 &=& 173.0\mathbf{5}00 &\simeq& 173.0 \pm 0.05 \,\text{ou bien}\, 173.1 \pm 0.05 \\ x_5 &=& 972.2\mathbf{5}34 &\simeq& 972.3 \pm 0.05 \\ x_6 &=& 0.01205\mathbf{1} &\simeq& 0.01205 \pm 0.000001 \\ x_7 &=& 0.001236\mathbf{5}0 &\simeq& 0.01236 \pm 0.0000005 \end{array}$$

Exercice 4. Soit $R = 2\,cm$, le rayon de la base d'un cylindre et $h = 2\,cm$ son hauteur. Quelles sont les erreurs absolues ΔR et Δh dans R et h pour que le volume

$$V = \pi h R^2$$

soit calculé d'une erreur absolue $\Delta V = 0.1\,cm^3$. On donne $\pi = 3.14$ comme valeur exacte.
Solution. D'après la loi générale de l'erreur, on a :

$$\Delta V = \left|\frac{\partial V}{\partial R}\right| \Delta R + \left|\frac{\partial V}{\partial h}\right| \Delta h$$

où les dérivées partielles de V en R et h, sont données par :

$$\frac{\partial V}{\partial R} = 2\pi Rh, \quad \frac{\partial V}{\partial h} = \pi R^2.$$

Par le principe d'égalité d'effet, on déduit que :

$$\begin{aligned} \Delta R &= \frac{\Delta V}{2\left|\frac{\partial V}{\partial R}\right|} = \frac{\Delta V}{4\pi Rh} = \frac{0.1}{4\times 3.14\times 2\times 2} \\ &\Downarrow \\ \Delta R &= \frac{0.1}{50.24} \simeq 0.0002. \end{aligned}$$

De même pour Δh,

$$\Delta h = \frac{\Delta V}{2\left|\frac{\partial V}{\partial h}\right|} = \frac{\Delta V}{2\pi R^2} = \frac{0.1}{2\times 3.14\times 4} \simeq 0.0004.$$

<u>Exercice 5.</u> La période d'un pendule de longueur l est donnée par :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Déterminer l'erreur relative δ_l, sachant que l'erreur relative $\delta_T = 0.5\%$.
<u>Solution.</u> D'après la loi générale de l'erreur, on a :

$$\Delta T = \left|\frac{\partial T}{\partial \pi}\right|\Delta\pi + \left|\frac{\partial T}{\partial l}\right|\Delta l + \left|\frac{\partial T}{\partial g}\right|\Delta g,$$

où les dérivées partielles en π, l et g sont données par :

$$\frac{\partial T}{\partial \pi} = 2\sqrt{\frac{l}{g}}, \quad \frac{\partial T}{\partial l} = \frac{\pi}{\sqrt{lg}}, \ \frac{\partial T}{\partial g} = -\pi\sqrt{\frac{l}{g^3}}\ .$$

Par le principe d'égalité d'effet, on déduit que :

$$\Delta T = 3\left|\frac{\partial T}{\partial l}\right|\Delta l,$$

d'où

$$\delta_T = \frac{\Delta T}{T} = \frac{3\left|\frac{\partial T}{\partial l}\right|\Delta l}{T}.$$

En remplaçant T et $\left|\frac{\partial T}{\partial l}\right|$ par leurs valeurs, on obtient :

$$\delta_T = \frac{3}{2}\delta_l$$

et par conséquent :

$$\delta_l = \frac{2}{3}\delta_T = 0.3\%.$$

<u>Exercice 6.</u> Soit

$$U = 6x^2(\ln x - \sin 2y)$$

avec

$$x = 15.2 \,\text{et}\, y = 22.73°.$$

Supposons que tous les chiffres dans x et y sont exacts, alors combien de chiffres exacts possède le nombre U.

Solution. Calculons U pour les valeurs $x = 15.2$ et $y = 22.73$, alors on obtient :

$$U = 6(15.2)^2(\ln 15.2 - \sin 45.46) = 2784.310837.$$

Calculons ΔU (erreur absolue de U). Posons

$$U = f(x, y) = 6x^2(\ln x - \sin 2y).$$

Appliquons la loi générale de l'erreur, on a :

$$\Delta U = \left|\frac{\delta f}{\delta x}\right| \Delta x + \left|\frac{\delta f}{\delta y}\right| \Delta y.$$

Calculons les dérivées partielles, $\frac{\delta f}{\delta x}$ et $\frac{\delta f}{\delta y}$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{\delta f}{\delta x}(x, y) &= 12x \ln x + 6x - 12x \sin 2y \\ \frac{\delta f}{\delta y}(x, y) &= -12x^2 \cos 2y. \end{aligned}$$

Comme tous les chiffres dans $x = 15.2$ ($m = 1$ et $n = 3$) et $y = 22.73$ ($m = 1$ et $n = 4$), sont exacts, alors les erreurs absolues dans x et y sont :

$$\begin{aligned} \Delta x &= \frac{1}{2}10^{m-n+1} = \frac{1}{2}10^{1-3+1} = 0.05, \\ \Delta y &= \frac{1}{2}10^{m-n+1} = \frac{1}{2}10^{1-4+1} = 0.005. \end{aligned}$$

De plus on a :

$$\begin{aligned} \frac{\delta f}{\delta x}(15.2, 22.73) &= 12(15.2)\ln(15.2) + 6(15.2) - 12(15.2)\sin 2(22.73) = 457.5566891. \\ \frac{\delta f}{\delta y}(15.2, 22.73) &= -12(15.2)^2 \cos 2(22.73) = -1944.63698 \Rightarrow \left|\frac{\delta f}{\delta y}(15.2, 22.73)\right| = 1944.63698. \end{aligned}$$

Alors

$$\Delta U = \left|\frac{\delta f}{\delta x}\right| \Delta x + \left|\frac{\delta f}{\delta y}\right| \Delta y = 457.5566891 \times 0.05 + 1944.63698 \times 0.005 = 32.601.$$

Donc U possède n chiffres exacts si :

$$\Delta U \leq \frac{1}{2}10^{m-n+1}.$$

On a :

$$\begin{aligned} \Delta U &= 32.601 < 50 = \frac{1}{2}10^2 = \frac{1}{2}10^{4-n} \\ &\Downarrow \\ n &= 2. \end{aligned}$$

Donc U possède 2 chiffres exacts.
Exercice 7. Soient $x = 2.5 \pm 0.01,\ y = 1.2 \pm 0.02,\ z = 3.2 \pm 0.03,\ t = 5.1 \pm 0.01$.
1- Calculer $U = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$.
2- Déterminer le nombre de chiffres exacts dans U.
Solution. Calcul de U :

$$U = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = (2.5)^2 + (1.2)^2 + (3.2)^2 + (5.1)^2 = \mathbf{43.94}.$$

Calculons maintenant l'erreur absolue ΔU. D'après la loi générale de l'erreur, on a :

$$\Delta U = \left|\frac{\delta U}{\delta x}\right| \Delta x + \left|\frac{\delta U}{\delta y}\right| \Delta y + \left|\frac{\delta U}{\delta z}\right| \Delta z + \left|\frac{\delta U}{\delta t}\right| \Delta t$$

avec

$$\frac{\delta U}{\delta x} = 2x,\ \frac{\delta U}{\delta y} = 2y,\ \frac{\delta U}{\delta z} = 2z,\ \ \frac{\delta U}{\delta t} = 2t.$$

D'où

$$\begin{aligned} \Delta U &= 2x\Delta x + 2y\Delta y + 2z\Delta z + 2t\Delta t \\ &= 5 \times 0.01 + 1.4 \times 0.02 + 6.4 \times 0.03 + 10.2 \times 0.01 \\ &\Downarrow \\ \Delta U &= 0.372. \end{aligned}$$

Alors n, est le nombre des chiffres exacts dans U si et seulement si :

$$\begin{aligned} \Delta U &= 0.372 \leq \frac{1}{2}10^{1-n+1} \\ &\Updownarrow \\ 0.744 &\leq 10^{2-n} \\ &\Downarrow \\ n &\leq 2. \end{aligned}$$

Par conséquent, U possède au plus 2 chiffres exacts. Testons maintenant si le chiffre 3 est exact. En effet, le chiffre 3 est exact car

$$\Delta U = 0.372 \leq \frac{1}{2}10^{2-2} = 0.5.$$

Par conséquent U admet 2 chiffres exacts.
Exercice 8. Donner les résultats finaux dans les cas suivants :

$$\begin{aligned} S &= 30124 + 2.0 + 38.1 \\ D &= 29.72 - 11.25 \\ P &= 93.87 \times 9.236 \\ R &= 12.114 \div 43.1673 \\ E &= \ln(10.3 + \sqrt{4.4}) \text{ avec } \sqrt{4.4} = 2.0976 \end{aligned}$$

sachant que tous les chiffres dans ces nombres sont exacts.

Solution.

1- On a :

$$\begin{aligned} S &= x_1 + x_2 + x_3 = 3.124 + 2.0 + 38.1 \\ x_1 &= 3.124 \pm 0.0005 \\ x_2 &= 2.0 \pm 0.05 \\ x_3 &= 38.1 \pm 0.05 \end{aligned}$$

ce qui implique que :

$$\begin{aligned} S &= 43.22 \,\text{et}\, \Delta S = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 = 0.1005 \simeq 0.1 \\ &\Downarrow \\ \Delta S &\leq 0.5 = \frac{1}{2}10^{-1} = \frac{1}{2}10^{2-n} \\ &\Downarrow \\ n &= 3. \end{aligned}$$

Alors S admet 3 chiffres exacts et donc le résultat final est :

$$S = 43.2 \pm 0.1.$$

2- Pour D, on a :

$$\begin{aligned} D &= x_1 - x_2 = 29.72 - 11.25 = 18.47. \\ x_1 &= 29.72 \pm 0.005,\ \ x_2 = 11.25 \pm 0.005 \\ \Delta D &= \Delta x_1 + \Delta x_2 = 0.005 + 0.005 = 0.01. \\ &\Downarrow \\ \Delta D &\leq 0.05 = \frac{1}{2}10^{-1} = \frac{1}{2}10^{1-n+1} = \frac{1}{2}10^{2-n} \\ &\Downarrow \\ n &= 3. \end{aligned}$$

Alors D admet 3 chiffres exacts et donc le résultat final est :

$$D = 18.5 \pm 0.01.$$

3- Pour P, on a :

$$\begin{aligned} P &= x_1 \times x_2 = 93.87 \times 9.236 \\ x_1 &= 93.87 \pm 0.005,\ \ x_2 = 9.236 \pm 0.0005 \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} P &= 866.98332 \\ &\ \text{et} \\ \Delta P &= |x_2|\,\Delta x_1 + |x_1|\,\Delta x_2 = 9.236 \times 0.005 + 93.87 \times 0.0005 \\ &= 9.311\,5 \times 10^{-2} \\ &\Downarrow \\ \Delta P &= 0.093115. \end{aligned}$$

On a :

$$\Delta P \leq 0.5 = \frac{1}{2}10^0 = \frac{1}{2}10^{2-n+1} = \frac{1}{2}10^{3-n}$$

alors le nombre P admet 3 chiffres exacts et par conséquent :

$$P \simeq 987 \pm 0.093.$$

4- Pour R, on a :

$$\begin{aligned} R &= f(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_2} = \frac{12.114}{43.1673} = 0.28063 \\ & \text{et} \\ \Delta x_1 &= \frac{1}{2}10^{1-5+1} = \frac{1}{2}10^{-3} = 0.0005 \\ & \Downarrow \\ x_1 &= 12.114 \pm 0.0005 \\ \Delta x_2 &= \frac{1}{2}10^{1-6+1} = \frac{1}{2}10^{-4} = 0.00005 \\ & \Downarrow \\ x_2 &= 43.1673 \pm 0.000005. \end{aligned}$$

En appliquant la loi générale de l'erreur, on obtient :

$$\begin{aligned} \Delta R &= \left|\frac{\delta f}{\delta x_1}\right| \Delta x_1 + \left|\frac{\delta f}{\delta x_2}\right| \Delta x_2 \\ &= \frac{\Delta x_1}{x_2} + \frac{x_1 \Delta x_2}{x_2^2} \\ &= \frac{0.0005}{12.114} + \frac{0.000005}{43.1673} \\ & \Downarrow \\ \Delta R &= 0.000004139. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \Delta R &\leq 0.000005 = \frac{1}{2}10^{-4} = \frac{1}{2}10^{-1-n+1} = \frac{1}{2}10^{-n} \\ & \Downarrow \\ n &= 4. \end{aligned}$$

Donc R possède 4 chiffres exacts et le résultat final est :

$$R = 0.2806 \pm 0.000004.$$

Pour E, on a :

$$E = \ln(10.3 + \sqrt{4.4}) = 2.5175 \ \Rightarrow m = 0.$$

Calculons ΔE. Posons

$$E = \ln(a + \sqrt{b}).$$

Appliquons la loi générale de l'erreur à E, on obtient :

$$\Delta E = \left|\frac{\delta E}{\delta a}\right| \Delta a + \left|\frac{\delta E}{\delta b}\right| \Delta b$$

avec

$$\frac{\delta E}{\delta a} = \frac{1}{a+\sqrt{b}}, \ \frac{\delta E}{\delta b} = \frac{1}{2\sqrt{b}(a+\sqrt{b})}.$$

Alors

$$\Delta E = \frac{1}{a+\sqrt{b}}\Delta a + \frac{1}{2\sqrt{b}(a+\sqrt{b})}\Delta b = \frac{\Delta a}{12.398} + \frac{\Delta b}{52.011}.$$

Calculons Δa et Δb sachant que tous les chiffres dans a et b sont exacts. On a :

$$\begin{array}{rcl} \Delta a & = & \frac{1}{2}10^{-1} = 0.05 \\ & \text{et} & \\ \Delta b & = & \frac{1}{2}10^{-1} = 0.05, \end{array}$$

donc

$$\Delta E = \frac{0.05}{12.398} + \frac{0.05}{52.011} = 0.00499 \leq 0.005.$$

Par conséquent, E admet 4 chiffres exacts car :

$$\Delta E \leq 0.005 = \frac{1}{2}10^{-3} = \frac{1}{2}10^{1-4}.$$

Le résultat final dans E est donc :

$$E = 2.518 \ \pm 0.005.$$

Chapitre 2

Résolution numérique d'équations non linéaires Auteur : M. Achache

2.1 Résumé du cours

Utilité de résoudre numériquement l'équation non linéaire $f(x) = 0$. La non capapilité de trouver facilement une solution exacte de l'équation non linéaire $f(x) = 0$ c'est à dire difficile de calculer ces racines exactement.
Source de ces équations. Ces équations apparaissent dans beaucoup de problèmes mathématiques et pratique.
Le but de ce chapitre est d'étudier quelques méthodes numériques pour trouver les zéros (racines) de $f(x) = 0$. On se contente uniquement sur quatres méthodes de résolution à savoir : la méthode de bissection (Dichotomie), de Lagrange, de Newton et de point fixe.
Pour traiter ce problème on a besoin de quelques notions fondamentales de l'analyse.

2.1.1 Rappel de quelques notions de l'analyse

Définition 6. *Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$ $(a < b)$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Le réel ξ est dit racine (zéro) de $f(x)$ si $f(\xi) = 0$.*

Définition 7. *Soit m un entier et f une fonction m dérivable.*

1. *On dit que ξ est une racine d'ordre m si :*

$$f(\xi) = f'(\xi) = \ldots = f^{(m-1)}(\xi) = 0,\ f^{(m)}(\xi) \neq 0.$$

2. *Si $m = 1$, alors ξ est dite racine simple.*
3. *Si $m = 2$, alors ξ est dite racine double.*

Remarque 1. *En générale si ξ est une racine de multiplicité m alors $f(x) = (x - \xi)^m h(x)$ avec $h(\xi) \neq 0$.*

Définition 8. *Un point ξ est dit point fixe d'une fonction φ si :*

$$\varphi(\xi) = \xi.$$

Théorème 1 (des valeurs intermèdiares)**.** *Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a,b]$ et vérifiant $f(a)f(b)<0$, alors il existe un réel $\xi \in [a,b]$ tel que $f(\xi)=0$. Si de plus f est strictement monotone alors ξ est unique.*

Remarque 2. *Si f est dérivable et que $f'(x) \neq 0$ sur $]a,b[$, alors f est strictement monotone.*

Théorème 2 (des accroissements finis)**.** *Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, alors il existe un réel $c \in]a,b[$, tel que :*

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c).$$

Définition 9 (fonction contractante)**.** *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. f est dite contractante sur $[a,b]$, s'il existe un réel $q \in]0,1[$, tel que pour tous x,y dans $[a,b]$,*

$$|f(x)-f(y)| \leq q\,|x-y|\,.$$

Lemme 1. *Soit f une fonction continûment dérivable sur $[a,b]$. S'il existe un réel $q \in]0,1[$, tel que $|f'(x)| \leq q$, $\forall x \in [a,b]$. Alors f est contractante. On peut prendre comme valeur de q, la valeur :*

$$q=\max_{[a,b]}|f'(x)|\,.$$

Définition 10. *Soit (x_n) une suite admet le réel ξ comme limite. L'erreur absolue à l'itération n est donnée par :*

$$\Delta_n=|x_n-\xi|\,.$$

Définition 11. *On dit que la convergence de la suite (x_n) vers ξ est d'ordre p si :*

$$\frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n^p}=c, c>0, p>0.$$

Si $p=1$, avec $c<1$, la convergence de (x_n) vers ξ est dite linéaire.
Si $p=2$, alors la convergence est dite quadratique.
Si $1<p<2$, la convergence est dite superlinéaire.

Définition 12. *On dit que le terme x_k de la suite (x_n) est une valeur approchée de la valeur exacte ξ avec une précision ϵ si :*

$$\Delta_k=|x_k-\xi| \leq \epsilon.$$

2.1.2 Recherche des racines

La recherche d'une racine approchée de l'équation $f(x)=0$ se déroule en deux étapes :

1. La séparation de la racine ξ, c'est à dire localiser ξ dans un intervalle $[a,b]$ telle que soit la seule racine de cette équation dans $[a,b]$.
2. Calcul de cette racine avec une méthode numérique et avec une précision demandée ϵ.

2.1.3 Séparation des racines

Il n'existe pas une méthode générale pour séparer les racines de $f(x)=0$. Mais on peut distinguer deux méthodes pour les séparer sur le domaine de définition de la fonction $f(x)$ à savoir les méthodes analytiques et les méthodes graphiques.

Méthodes analytiques

Cette méthode est basée sur l'application du théorème des valeurs intermédiares (**T.V.I**), qui assure au moins l'existence d'une racine dans l'intervalle $[a, b]$. Si de plus f est strictement monotone, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une seule racine isolée dans l'intervalle $[a, b]$. De plus on prend en considération les remarques suivantes :

- Les racines de la dérivée $f'(x)$ devisent le domaine de définition de f en des intervalles dont chacun contient au plus une racine unique.
- Si $f'(x)$ existe et s'il est possible de calculer ces racines facilement, donc la séparation des racines f doit être ordonnée, tout en prenant les bornes de $[a, b]$ et puis les racines de $f'(x)$.

Méthodes graphiques

Dans cette méthode soit on trace le graphe de la fonction f toute entier, tout en étudiant ses variations et puis on cherche son intersection avec l'axe Ox. Soit on décompose f en deux fonctions f_1 et f_2 telles que $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, et on cherche les points d'intersection des graphes f_1 et f_2, dont les abscisses sont exactement les racines de l'équation $f(x) = 0$.

Remarque 3. *On cherche toujours à décomposer la fonction f en deux fonctions de façons que leurs courbes soient faciles à tracer ou bien sont connues.*

2.2 Méthodes Numériques

2.2.1 Méthode de Dichotomie

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle $[a, b]$, et de plus $f(a)f(b) < 0$. Alors d'après le **T.V.I**, l'équation $f(x) = 0$ admet une seule racine ξ dans $[a, b]$.
Le principe de la méthode de Dichotomie (bissection) est d'approcher la racine ξ par encadrement, en réduisant à chaque étape la longueur de moitié selon la procédure (algorithme) suivante :
Soit ξ la seule racine de $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[a, b]$.
<u>**Etape 1 :**</u> on pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$ et $x_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$ et puis on teste si $x_0 = \xi$, on s'arrète. Sinon.
Si $f(a_0)f(x_0) < 0$, alors $\xi \in [a_0, x_0]$, on pose alors $a_1 = a_0$ et $b_1 = x_0$ sinon
Si $f(a_0)f(x_0) > 0$, alors $\xi \in [x_0, b_0]$, on pose alors $a_1 = x_0$ et $b_1 = b_0$.
<u>**Etape 2 :**</u>
On répète la procédure du **Pas 1** pour l'intervalle $[a_1, b_1]$ c'est à dire on fait le même travail sur le nouveau intervalle $[a_1, b_1]$ avec $x_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$.
Remarquons que :

$$|a_1 - b_1| = \frac{|a_0 - b_0|}{2}.$$

<u>**Etape (n+1) :**</u>
Après un $(n + 1)$ pas de procédé, on trouve ou bien la solution $\xi = x_{n+1}$, sinon on trouve une

suite des intervalles emboités

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq \ldots \subseteq [a_0, b_0]$$

tels que $f(a_{n+1})f(b_{n+1}) < 0,\ \forall n$, et de plus :

$$|a_{n+1} - b_{n+1}| = \frac{|a_0 - b_0|}{2^{n+1}}.$$

Par conséquent, la suite (x_n) obtenue par l'algorithme de dichotomie est donnée par :

$$x_n = \frac{a_n + b_n}{2},\ n = 0, 1, \ldots,$$

converge vers la racine ξ avec une erreur :

$$\Delta_n = |x_n - \xi| = \frac{|b - a|}{2^{n+1}}.$$

Remarque 4. *Si ϵ est une précision donnée, alors on peut estimer à l'avance le nombre d'itérations n produit par l'algorithme de dichotomie comme suit :*
si

$$\frac{|b - a|}{2^{n+1}} \leq \epsilon$$

alors

$$n \geq \frac{\ln(b - a) - \ln \epsilon}{\ln 2} - 1.$$

ou bien, on prend

$$n = \mathbb{E}\left(\frac{\ln(b - a) - \ln \epsilon}{\ln 2}\right) + 1$$

avec $\mathbb{E}$ désigne la partie entière de l'expression en considération.

Code Scilab

```
%Etude de la fonction :
%f(x) = x^3 + 4x^2 - 10, dans [1,2]
a = input("donner la valeur de a");
b = input("donner la valeur de b");
function [y] = f(x)
y = x^3 + 4*x^2 - 10;
endfunction
x = (a + b)/2;
eps = 10^-4;
k = 0;
tic;
While abs(b - a) > eps
if f(a)*f(x) < 0
b = x;
else
a = x;
```

end
$x = (a+b)/2$;
$k = k+1$;
end
t=toc ;
disp(”$x =$ ”) ;
disp(x) ;

2.2.2 Méthode de Lagrange

Soit f une fonction continue et au moins deux fois dérivables sur l'intervalle $[a,b]$. Supposons que :

1. $f(a)f(b) < 0$.
2. $f'(x) \neq 0$ sur $[a,b]$ et $f''(x) \neq 0$ garde le même signe sur cet intervalle.

Alors l'algorithme de Lagrange pour calculer une valeur approchée de la racine ξ est donné par :

$$\begin{cases} x_0 = a & \text{si } f(a)f''(a) < 0 \\ x_{n+1} & = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b)-f(x_n)}(b - x_n),\ n = 0,1,... \end{cases}$$

ou bien par

$$\begin{cases} x_0 = b & \text{si } f(a)f''(a) > 0 \\ x_{n+1} & = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n)-f(a)}(x_n - a),\ n = 0,1,... \end{cases}$$

Suivant les hypothèses (1) et (2), la suite (x_n) produite par l'algorithme de Lagrange dans les deux alternatives converge vers la seule racine ξ dans $[a,b]$. De plus l'erreur absolue commise dans chaque itération x_n est donnée par :

$$\Delta_n = |x_n - \xi| = \frac{M_1 - m_1}{2m_1} |x_n - x_{n-1}|$$

avec

$$M_1 = \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|, \quad m_1 = \min_{x\in[a,b]} |f'(x)|.$$

Code Scilab

%Etude de la fonction :
%$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$, dans $[1,2]$
$eps = 10\hat{}-4$;
function $[y] = f(x)$
$y = x^3 + 4 * x^2 - 10$;
endfunction
function $[y] = df(x)$
$y = 3 * x^2 + 8 * x$;
endfunction
if $f(a) * df(a) < 0$
$x = a$;

else
$x = b$;
end
$k = 0$;
$err = norm(f(x))$;
tic ;
while $(err > eps)$
if $x == a$
$x = x - f(x) * ((b - x)/(f(b) - f(x)))$;
else
$x = x - f(x) * ((x - a)/(f(x) - f(a)))$;
end
$err = norm(f(x))$;
$k = k + 1$;
end
t=toc ;
disp("$x =$ ") ;
disp(x) ;

2.2.3 Méthode de Newton

Soit f une fonction continue et au moins deux fois dérivables sur l'intervalle $[a, b]$. Supposons que :

1. $f(a)f(b) < 0$.
2. $f'(x) \neq 0$ sur $[a, b]$ et $f''(x) \neq 0$ garde le même signe sur cet intervalle.

Alors la procédure de la méthode de Newton pour approcher la racine ξ est donnée par :

$$\begin{cases} x_0 \in [a,b] & \text{tel que} \qquad\qquad f(x_0)f''(x_0) > 0 \\ x_{n+1} & = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ n = 0, 1, ... \end{cases}$$

Si les conditions (1) et (2) sont satisfaites alors la suite générée par l'algorithme de Newton est convergente et dans ce cas l'erreur commise est donnée par :

$$\Delta_n = |x_n - \xi| = \frac{M}{2m_1}(x_n - x_{n-1})^2$$

avec

$$M = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|, \quad m_1 = \min_{x\in[a,b]} |f'(x)|.$$

Code Scilab

%Etude de la fonction :
%$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$, dans $[1, 2]$
function $[y] = f(x)$
$y = x^3 + 4 * x^2 - 10$;
endfunction

function $[y] = df(x)$
$y = 3 * x^2 + 8 * x$;
endfunction
$eps = 10\hat{} - 4$;
$x = 1$;
$err = norm(f(x))$;
$nb = 0$;
tic ;
while $(err > eps)$
$nb = nb + 1$;
$x = x - (f(x)/df(x))$;
$err = norm(f(x))$;
end
t=toc ;
disp("$x =$") ;
disp(x) ;

2.2.4 Méthode de point fixe

Le principe de cette méthode, est de transformer l'équation $f(x) = 0$ en $x = \varphi(x)$, c'est à dire trouver une fonction $\varphi(x)$ définie et continue sur $[a, b]$ telle que :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \varphi(x),$$

et puis elle construit une suite (x_n) par la procédure suivante :

$$\begin{cases} x_0 \in [a, b] \\ x_{n+1} = \varphi(x_n),\ n = 0, 1, ... \end{cases}$$

Si les conditions suivantes sont satisfaites :
1- $\varphi([a, b]) \subseteq [a, b]$ c'est à dire $\forall x \in [a, b]$, $\varphi(x) \in [a, b]$.
2- φ est une application contractante sur $[a, b]$ c'est à dire s'il existe une constante q, $0 < q < 1$ telle que :

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq q\,|x - y|\,,\ \forall x, y \in [a, b]\,.$$

Alors la suite (x_n) donnée par l'algorithme de point fixe est convergente vers l'unique solution ξ de l'équation $f(x) = 0$ pour tout point initiale x_0 de $[a, b]$. De plus l'erreur commise est donnée par la formule suivante :

$$\Delta_n = |x_n - \xi| = \frac{q^n}{1 - q}\,|x_1 - x_0|\,.$$

Code Silab

%Etude de la fonction :
%$f(x) = x - \cos(x)$, dans $[-\frac{1}{2}, 3]$
$k = 0$;
$eps = 10\hat{} - 4$;
function $[y] = g(x)$

```
y = cos(x);
endfunction
function [y] = f(x)
y = x - cos(x);
endfunction
x = 1/2;
err = norm(f(x));
tic;
while (err > eps)
x = g(x);
err = norm(f(x));
k = k + 1;
end
t=toc;
disp("x = ");
disp(x);
```

2.3 Exercices résolus

Exercice 1. Séparer les racines des équations suivantes :

$$x^4 - 4x - 1 = 0, \quad x^5 - 5x^4 + 1 = 0, \quad 2x - \ln x - 4 = 0,$$
$$x^2 - e^x + 2 = 0, \quad \sqrt{x} + \sin x - 2 = 0, \quad x^3 + 12x^2 - 60x + 46 = 0 = 0.$$

Solution.

1. $x^4 - 4x - 1 = 0$. On pose $f(x) = x^4 - 4x - 1$, alors f est une fonction définie et dérivable sur son domaine de définition $\mathbb{R}$ car elle est un polynôme. De plus comme $\lim_{x \mapsto -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \mapsto +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow (\lim_{x \mapsto -\infty} f(x))\ (\lim_{x \mapsto +\infty} f(x)) = +\infty > 0$, alors d'après le **T.V.I,** l'équation $f(x) = 0$, admet un nombre pair de racines sur $\mathbb{R}$ ou bien elle n'admet pas de racines sur $\mathbb{R}$. Pour s'assurer, on étudie ses variations sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - 4 = 0 \\ &\Updownarrow \\ x &= 1. \end{aligned}$$

Le tableau de variations de f est donné par :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
signe de f'		$-$	0	$+$	
variations de f	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Alors d'après son tableau de variations $f(x) = 0$, admet exactement deux racines séparées dans $\mathbb{R}$ comme suit :

$$\xi_1 \in \,]-\infty, 1[$$

et

$$\xi_2 \in \left]1, +\infty\right[.$$

Localisation de ces deux racines dans des intervalles finis de la forme $[a, b]$. Comme $f(-1)f(0) < 0$, alors $\xi_1 \in [-1, 0]$ et comme $f(1)f(2) < 0$, alors $\xi_2 \in [0, 1]$.

2. $x^5 - 5x^4 + 1 = 0$, on fait le même travail que (1). On pose $f(x) = x^5 - 5x^4 + 1$ alors f est un polynôme donc continue et indéfinement dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, comme $\lim_{x-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x+\infty} f(x) = +\infty \;\Rightarrow (\lim_{x-\infty} f(x))\,(\lim_{x+\infty} f(x)) = +\infty\; < 0$, alors d'après le **T.V.I,** l'équation $f(x) = 0$, admet un nombre impair de racines sur $\mathbb{R}$ ou bien elle admet au moins une racine sur $\mathbb{R}$. Pour s'assurer, on étudie aussi ses variations sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5x^4 - 20x^3 = 0 \\ &\Updownarrow \\ x &= 0 \vee x = 4, \end{aligned}$$

et donc son tableau de variations est donné par :

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
signe de f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	$+1$	$\searrow$	-256	$\nearrow$	$+\infty$

Alors suivant le tableau de variations $f(x) = 0$, possède exactement trois racines séparées dans $\mathbb{R}$ comme suit :

$$\xi_1 \in \left]-\infty, 0\right[, \xi_2 \in \left]0, 4\right[,$$

et

$$\xi_3 \in \left]4, +\infty\right[.$$

Localisation de ces deux racines dans des intervalles compacts (fermés et bornés dans R) $[a, b]$. On vérifie facilement que :

$$\xi_1 \in [-3, -2]\,,\ \xi_2 \in [0, 4]\,,\ \xi_3 \in [5, 6]\,.$$

3. $2x - \ln x - 4 = 0$. Alors $f(x) = 2x - \ln x - 4$, est une fonction définie et continue sur son domaine $]0, +\infty[$, de plus on a :$\lim_{x\mapsto 0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\mapsto+\infty} f(x) = +\infty \;\Rightarrow$ $(\lim_{x\mapsto-\infty} f(x))\,(\lim_{x\mapsto+\infty} f(x)) = +\infty > 0$, alors d'aprés le **T.V.I**, $f(x) = 0$ admet une nombre pair de racines sur son domaine ou bien elle n'admet pas de racines. D'autre part :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 - \frac{1}{x} = 0 \\ &\Updownarrow \\ x &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

D'où le tableau de variations de f, est donné par :

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
signe de f'		$-$	0	$+$	
variations de f	$+\infty$	$\searrow$	$\ln 2 - 3 < 0$	$\nearrow$	$+\infty$

Alors $f(x) = 0$, admet exactement deux racines dans $]0, +\infty[$ séparées comme suit :

$$\xi_1 \in \left]0, \frac{1}{2}\right[, \; \xi_2 \in \left]\frac{1}{2}, \infty\right[.$$

De plus on peut les localiser dans des intervalles compacts, comme suit :

$$\xi_1 \in [0.01, 0.1], \; \xi_2 \in [2, 3].$$

4. $x^2 - e^x + 2 = 0$. La fonction $f(x) = x^2 - e^x + 2$ est une fonction continue sur tout $\mathbb{R}$. De plus comme $\lim_{x \mapsto -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \mapsto +\infty} f(x) = -\infty \Rightarrow (\lim_{x \mapsto -\infty} f(x)) (\lim_{x \mapsto +\infty} f(x)) = -\infty > 0$, alors d'après le **T.V.I,** l'équation $f(x) = 0$, admet un nombre impair de racines sur $\mathbb{R}$ ou bien elle admet au moins une racine sur $\mathbb{R}$. Pour s'assurer on étudie ses variations sur $\mathbb{R}$. On a $f'(x) = 2x - e^x$ et $f''(x) = 2 - e^x = 0 \Leftrightarrow x = \ln 2$. Donc le tableau de variations de la fonction f est donné par :

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
signe de f''		$+$	0	$-$	
$f'(x)$			$2\ln 2 - 2 < 0$		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	$-\infty$				$-\infty$
$f(x)$	$+\infty$				
		$\searrow$			
			$(\ln 2)^2$		
				$\searrow$	
					$-\infty$

Donc $f(x) = 0$ admet une racine unique $\xi \in [\ln 2, +\infty[$ et plus précisement $\xi \in [0, 1]$ car $f(0) = 1 > 0$ et $f(1) = 6 - e^2 < 0$.

Remarque 5. *On peut utiliser la méthode graphique pour séparer ces racines. Pour cela, on décompose $f(x)$ par exemple comme suit :*

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x)$$

où

$$f_1(x) = x^2 + 2$$

et

$$f_2(x) = e^x,$$

et puis on trace leurs graphes et on cherche les points de leurs intersections.

5. $f(x) = \sqrt{x} + \sin x - 2 = 0$. La fonction f est définie et continue sur $[0, +\infty[$ et comme $(\lim_{x \mapsto 0} f(x)) (\lim_{x \mapsto +\infty} f(x)) = -\infty < 0$ donc l'équation admet un nombre impair de racines sur son domaine. Remarquons aussi que $\sqrt{x} - 3 \leq f(x) \leq \sqrt{x} - 1$ car $-1 \leq \sin x \leq 1$. Par conséquent $f(x) < 0$ pour tout $x < 1$ et $f(x) > 0$ pour tout $x > 9$, ceci signifie que $f(x) \neq 0$, $\forall x \notin [1, 9]$. Alors on restreinte notre étude de l'existence des racines de $f(x) = 0$ uniquement sur l'intervalle $[1, 9]$. Aussi on vérifie facilement que $f(1) f(9) < 0$, alors $f(x) = 0$ admet un nombre impair de racines sur cette intervalle. Pour s'assurer on

utilise la méthode graphique, on a : $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 2 - \sqrt{x},\ x \in [1, 9]$. On trace donc les graphes des fonctions $f_1(x) = \sin x$ et $f_2(x) = 2 - \sqrt{x}$ sur $[1, 9]$, alors l'intersection de leurs courbes, montre que $f(x) = 0$ admet trois racines réelles distrubiées comme suit :

$$\xi 1 \in \left[1, \frac{\pi}{2}\right], \ \xi_2 \in [3, 4]\,, \ \xi_3 \in [5, 6]\,.$$

Il reste donc à vérifier ces calculs et en traçant ces courbes par vous mêmes.

Exercice 2. En utilisant la méthode de Dichotomie, déterminer la plus petite racine positive de l'équation :

$$x^3 + 4x^2 - 10 = 0$$

avec une précision $\epsilon = 10^{-2}$. Quelle est le nombre des chiffres exacts dans le résultat ?

Solution

$f(x) = x^3+4x^2-10$, est un polynôme donc elle est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, comme $\lim_{\mapsto -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{+\infty} f(x) = +\infty \ \Rightarrow (\lim_{x \mapsto -\infty} f(x)) (\lim_{x \mapsto +\infty} f(x)) = -\infty \ < 0$, alors d'après le **T.V.I,** l'équation $f(x) = 0$, admet un nombre impair de racines sur $\mathbb{R}$ ou bien elle admet au moins une racine sur $\mathbb{R}$. Pour s'assurer, on étudie ses variations sur $\mathbb{R}$. La fonction f est dérivable, alors on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 8x = 0 \\ &\Updownarrow \\ x &= 0 \vee x = -\frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Alors son tableau de variations f est donné :

x	$-\infty$		$-\frac{8}{3}$		0		$+\infty$
signe de f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	-0.5	$\searrow$	-10	$\nearrow$	$+\infty$

D'après le tableau de variations $f(x) = 0$, admet une seule racine positive ξ dans l'intervalle $[0, +\infty]$. De plus comme $f(1)f(2) < 0$, alors $\xi \in [1, 2]$.

Calculons cette racine par la méthode de Dichotomie. Pour cela, on construit le tableau de Dichotomie comme suit :

n	a_n	b_n	$x_n = \frac{a_n+b_n}{2}$	$f(x_n)f(a_n)$	$\Delta_n = \frac{1}{2^{n+1}}$
0	1^-	2^+	1.5^+	< 0	$0.5 > \epsilon$
1	1^-	1.5^+	1.25^-	> 0	$0.25 > \epsilon$
2	1.25^-	1.5^+	1.375^+	< 0	$0.125 > \epsilon$
3	1.25^-	1.375^+	1.3125^-	> 0	$0.0625 > \epsilon$
4	1.3125^-	1.375^+	1.34375^-	> 0	$0.03125 > \epsilon$
5	1.34375^-	1.375^+	1.359375^-	> 0	$0.015625 > \epsilon$
6	1.359375^-	1.375^+	1.3671875	...	$0.0078 < \epsilon = 0.01.$

On prend donc comme valeur approchée de ξ, les valeurs :

$$\xi = x_7 \pm \Delta_7 = 1.3671875 \pm 0.0078.$$

n est le nombre des chiffres exacts dans x_7 si :

$$\Delta_7 = 0.0078 \leq \frac{1}{2}10^{m-n+1}.$$

Comme $m = 0$, alors on calcule n tel que :

$$0.0078 \leq \frac{1}{2}10^{-n+1}.$$

Cette inégalité est vérifiée si $n \geq 4$. Donc ξ possède au moins 4 chiffres exacts.

Remarque 6. *La notation r^- (resp. r^+) dans le tableau signifie que l'image de r, $f(r) < 0$ (resp. $f(r) > 0$).*

Exercice 3.

1. Séparer dans un intervalle de la forme $[k, k+1]$: $k \in \mathbb{Z}$, la plus petite racine positive de l'équation $x^3 + 12x^2 - 60x + 45 = 0$.
2. En utilisant la méthode de Lagrange puis celle de Newton, calculer cette racine avec 2 chiffres exacts.
3. Est-il préférable d'utiliser la méthode de Dichotomie ?

Solution.

1. $f(x) = x^3 + 12x^2 - 60x + 45$, est un polynome donc continue sur $\mathbb{R}$. De plus il est facile d'avoir $\lim_{x\mapsto-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\mapsto+\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow (\lim_{x\mapsto-\infty} f(x)) (\lim_{x\mapsto+\infty} f(x)) = -\infty < 0$, alors d'après le **T.V.I,** l'équation $f(x) = 0$, admet un nombre impair de racines sur $\mathbb{R}$ ou bien elle admet au moins une racine sur $\mathbb{R}$. Pour s'assurer, on étudie ses variations sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & 3x^2 + 12x^2 - 60 = 0 \\ & \Updownarrow & \\ x & = & -10 \vee x = 2. \end{array}$$

Alors son tableau de variations est comme suit :

x	$-\infty$		-10		2		$+\infty$
signedef'		$+$	0	$-$	0	$+$	
variationsde$f$	$-\infty$	$\nearrow$	$+846$	$\searrow$	-18	$\nearrow$	$+\infty$

D'après ses variations, $f(x) = 0$ admet exactement deux racines positives et une seule racine négative situées dans $\mathbb{R}$ comme suit :

$$\xi_1 \in [-16, -15], \xi_2 \in [0, 1], \ \xi_3 \in [2, 3].$$

Calculons maintenant la plus petite racine positive dans $[0, 1]$ par la méthode de Lagrange et puis par la méthode de Newton.

1. **Méthode de Lagrange.** En effet, comme $f'(x) = 3x^2 + 24x - 60 \neq 0$ (d'après le tableau de variations) et $f''(x) = 6x + 24 > 0$ sur $[0,1]$. Alors la méthode de Lagrange est applicable.
   Choix de x_0.
   $f''(x) > 0,\ f(0) > 0$, alors $f''(0)f(0) > 0 \Rightarrow x_0 = 1$.
   $M_1 = \max_{x\in[0,1]} |f'(x)| = 60, m_1 = \min_{x\in[0,1]} |f'(x)| = 33$.
   On calcule une valeur approchée de ξ avec 2 chiffres exacts c'est à dire avec une précision $\epsilon = \frac{1}{2}10^{-1} = 0.05$ car $m = 0$ et $n = 2$. Alors en partant de $x_0 = 1$, l'algorithme de Lagrange génère une suite donnée par :
   $$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(0)} x_n,\ n = 0, 1, \ldots.$$
   Itération x_1.
   $$x_1 = 1 - \frac{f(1)}{f(1) - f(0)} = 1 - \frac{1}{47} = 0.9787.$$
   L'erreur commise dans x_1 est :
   $$\Delta_1 = \frac{27}{66} |x_1 - x_0| = \Delta_1 = \frac{27}{66} |0.9787 - 1| = 0.0087 \approx 0.009.$$
   Comme $\Delta_1 < 0.05$, on s'arrète et on prend comme valeur approchée de la racine ξ la valeur $\xi = 0.9787 \pm 0.009$.

2. **Méthode de Newton.** Les conditions de cette méthode sont les mêmes que celles de Lagrange et donc la méthode de Newton est applicable pour approximer cette racine.
   Choix de x_0. $f''(x) > 0, f(0) > 0$, alors $f''(0)f(0) > 0 \Rightarrow x_0 = 0$. Alors l'algorithme de Newton pour approcher la racine ξ est donnée par :
   $$\begin{cases} x_0 = 0, \\ x_{n+1} \quad = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ n = 0, 1, ... \end{cases}$$
   avec
   $$M = \max_{x\in[0,1]} |f''(x)| = 30,\ m_1 = \min_{x\in[0,1]} |f'(x)| = 33.$$
   et après simplification l'erreur devient :
   $$\Delta_n = \frac{5}{11}(x_n - x_{n-1})^2.$$
   Calcul de l'itération x_1 :
   $$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -\frac{f(0)}{f'(0)} = \frac{23}{30} = 0.76666.$$
   Son erreur :
   $$\Delta_1 = \frac{5}{11}(x_1 - x_0)^2 = \frac{5}{11}(0.76666)^2 = 0.267.$$
   $\Delta_1 > \epsilon = 0.05$, on calcule donc l'itération x_2 par :
   $$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0.953688,$$

et son erreur

$$\Delta_2 = \frac{5}{11}(x_2 - x_1)^2 = \frac{5}{11}(0.76666 - 0.953688)^2 \approx 0.016.$$

Alors $\Delta_2 = 0.016 < \epsilon = 0.05$ et donc on s'arrète et on peut prendre comme valeur approchée de ξ :

$$\xi = x_2 \pm 0.016.$$

3. La méthode de Dichotomie avec la précision $\epsilon = 0.05$, à besoin de 4 itérations pour approximer cette racine car :

$$n \geq \frac{\ln(1-0) - \ln(0.05)}{\ln 2} - 1 \approx 4.$$

Alors il n'est pas préférable d'utiliser la méthode de Dichotomie car les autres méthodes ont besoin au plus deux itérations pour approcher cette racine avec la même précision.

Exercice 4.
On considère l'équation

$$e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1 = 0, \tag{2.1}$$

sur l'intervalle $[-1, 1]$.

1. Montrer que l'équation (2.1), admet un zéro (une racine) ξ dans $[-1, 1]$ et qu'il est unique.
2. Résoudre l'équation (2.1) par la méthode de Newton à $\epsilon = 0.05$ près, utiliser $|f(x)| \leq \epsilon$. Quelle est l'ordre de convergence de cette méthode ? Justifier votre réponse.
3. Proposer une méthode d'ordre 2 pour résoudre l'équation donnée.

Solution.

1. La fonction $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1$ est indéfiniment dérivable sur son domaine $\mathbb{R}$, donc elle est continue de plus comme $f(-1)f(1) = (\frac{2-e}{2e})(\frac{2e+5}{2}) < 0$, alors d'après le **T.V.I** $f(x) = 0$ admet au moins une racine ξ sur $[-1, 1]$. Pour l'unicité de la racine, on étudie ses variations sur l'intervalle $[-1, 1]$. On a $f'(x) = e^x - x - 1$ et comme elle est difficile de connaitre son signe, on calcule donc $f''(x) = e^x - 1$. Alors son tableau de variations est donné par :

x	-1		0		1
signe de f''		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	0.37	$\searrow$	0	$\nearrow$	0.72
$f(x)$	-0.13	$\nearrow$	0	$\nearrow$	0.22

Alors il est claire que $f(x) = 0$ admet une racine unique $\xi \in [-1, 1]$.

Remarque 7. *La racine exacte de cette équation est $\xi = 0$ avec multiplicité $m = 3$ car $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$, $f'''(0) \neq 0$.*

Choix de x_0. $f''(x) \geq 0$ et $f(1) > 0$, alors $f''(1)f(1) > 0 \Rightarrow x_0 = 1$. Alors l'algorithme de Newton pour approcher ξ est donné par :

$$\begin{cases} x_0 = 1, \\ x_{n+1} \quad = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ n = 0, 1, ... \end{cases}$$

Calcul de l'itération x_1 :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = 1 - \frac{0.22}{0.72} = 0.69444$$

et son erreur :

$$|f(0.69444)| = 0.06702.$$

$|f(0.69444)| = 0.06702 > \epsilon = 0.05$, on calcule donc l'itération x_2 par :

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0.69444 - \frac{f(0.69444)}{f'(0.69444)} = 0.476905,$$

et son erreur :

$$|f(0.476905)| = 0.0204.$$

$|f(0.476905)| = 0.0204 < \epsilon = 0.05$. On prend comme valeur approchée de ξ :

$$\xi = 0.476905 \pm 0.02.$$

Remarque :

1. On peut prendre aussi comme choix de x_0, la valeur $x_0 = -1$ car $f(-1)f''(-1) > 0$ et la méthode de Newton converge aussi vers la racine ξ.
2. On remarque dans cet exemple que les conditions de Newton ne sont pas vérifiées, mais la méthode converge. On déduit que les conditions de convergence de cette méthode sont suffisantes mais non nécessaires.
3. On montre dans le cas où la racine ξ d'une équation $f(x) = 0$ est de multiplicité $m \geq 2$, alors l'ordre de la convergence de la méthode de Newton ne reste pas quadratique mais se réduit à l'ordre 1 c'est à dire linéaire. En effet, si ξ est une racine de multiplicité $m \geq 2$, alors

$$f(x) = (x - \xi)^m h(x) \,\text{telle que}\, h(\xi) \neq 0,$$

avec

$$f'(x) = m(x - \xi)^{m-1}h(x) + (x - \xi)^m h'(x).$$

On veut comparer maintenant l'erreur Δ_{n+1} avec l'erreur Δ_n. Avec la formule de Newton, on obtient :

$$\begin{aligned} x_{n+1} - \xi &= x_n - \xi - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ x_{n+1} - \xi &= x_n - \xi - \frac{(x_n - \xi)^m h(x_n)}{m(x_n - \xi)^{m-1}h(x_n) + (x_n - \xi)^m h'(x_n)} \\ x_{n+1} - \xi &= x_n - \xi - \frac{(x_n - \xi)h(x_n)}{mh(x_n) + (x_n - \xi)h'(x_n)}. \end{aligned}$$

Ce qui implique que :

$$\frac{x_{n+1}-\xi}{x_n-\xi} = 1 - \frac{h(x_n)}{mh(x_n)+(x_n-\xi)h'(x_n)}.$$

Par conséquent, il découle que :

$$\lim_{x_n \mapsto \xi} \frac{|x_{n+1}-\xi|}{|x_n-\xi|} = 1 - \frac{1}{m} = c > 0, m \geq 2.$$

Finalement

$$\frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n} = c < 1.$$

Alors cette méthode est d'ordre 1.

4. Proposition d'une méthode d'ordre 2 pour résoudre l'équation donnée. Pour que l'algorithme de Newton dans ce cas avoir un ordre de convergence d'ordre deux, il suffit de considérer le schéma itératif modifié suivant :

$$x_{n+1} = x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

et on peut montrer que son convergence est d'ordre 2.

Exercice 5. Soit l'équation :

$$f(x) = \ln\sqrt{x^2+a^2} : a \in \mathbb{R}^*. \tag{2.2}$$

1. Étudier suivant les valeurs de a, l'existence des racines de l'équation (2.2).
2. Dans ce qui suit, on prend $a = \frac{1}{2}$.
   - Séparer les racines réelles de l'équation (2.2) dans des intervalles de type $[p, p+1]$, $p \in \mathbb{Z}$.
   - Déterminer une valeur approximative de la plus petite racine positive de l'équation (2.2) par la méthode de Dichotomie à 0.2 près.
   - Rappeler les conditions de convergence de la méthode de Newton, sont-elles vérifiées pour cette équation ?

Solution.

1. f est une fonction définie continue sur $\mathbb{R}$, de plus $\lim_{x\mapsto-\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x\mapsto+\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow (\lim_{x\mapsto-\infty} f(x))\,(\lim_{x\mapsto+\infty} f(x)) = +\infty > 0$, alors d'après le **T.V.I,** l'équation $f(x) = 0$, admet un nombre pair de racines sur $\mathbb{R}$ ou bien elle n'admet pas de racines sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & \dfrac{x}{x^2+a^2} = 0 \\ & \Updownarrow & \\ x & = & 0. \end{array}$$

Alors le tableau de variations de la fonction f est donné par :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de f'		$-$	0	$+$	
variations de f	$+\infty$	$\searrow$	$\ln\lvert a\rvert$	$\nearrow$	$+\infty$

On constate que si $|a| < 1$, alors $\ln |a| < 0$, et dans ce cas $f(x) = 0$, admet exactement deux racines dans $\mathbb{R}$. Sinon si $|a| > 1$ alors $\ln |a| > 0$ et par conséquent $f(x) = 0$ n'admet pas de racines.

2. Si $a = \frac{1}{2}$ alors a est dans l'intervalle $[-1, 1]$, et comme $f(0)f(1) < 0$ et $f(-1)f(0) < 0$ donc $\xi_1 \in [0, 1]$ avec $p = 1$ et $\xi_2 \in [-1, 0]$, avec $p = -1$.
3. Détermination d'une valeur approximative de la plus petite racine positive de l'équation par la méthode de Dichotomie à 0.2 près. On construit donc le tableau de Dichotomie. Comme $\epsilon = 0.2$ alors le nombre d'itérations n est :

$$n \geq \frac{\ln \frac{(1-0)}{0.2}}{\ln 2} - 1 = 1.3219$$

donc on prend $n = 2$ et le tableau de Dichotomie est donné par :

n	a_n	b_n	$x_n = \frac{a_n+b_n}{2}$	$f(x_n)f(a_n)$	$\Delta_n = \frac{1}{2^{n+1}}$
0	0^-	1^+	0.5^-	> 0	$0.5 > \epsilon = 0.2$
1	0.5^-	1^+	0.75^-	> 0	$0.25 > \epsilon$
2	0.75^-	1^+	0.875		$0.125 < \epsilon$

Donc $\xi = 0.875 \pm 0.125$.
4. Dans cet exemple les conditions de Newton ne sont pas satisfaites car il existe un $x_0 = 0.5 \in [0, 1]$ tel que :

$$f''(x) = \frac{-x^2 + 0.25}{(x^2 + 0.25)^2} = 0$$

et par conséquent $f''(x)$ ne garde pas le même signe sur $[0, 1]$.

Exercice 6.

On considère l'équation

$$e^x + 3\sqrt{x} - 2 = 0 \tag{2.3}$$

sur l'intervalle $[0, 1]$.

1. Montrer que l'équation (2.3) admet une racine unique sur $[0, 1]$.
2. On veut calculer la racine de cette équation par une méthode de point fixe convenable. En particulier on se donne deux méthodes de point fixe $x = \varphi_i(x), i = 1, 2$, où les fonctions φ_1 et φ_2 sont définies par :

$$\varphi_1(x) = \ln(2 - 3\sqrt{x}),\ \varphi_2(x) = \frac{(2 - e^x)^2}{9}.$$

Solution.

1. Remarquons tout d'abord que $f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = e + 1 > 0$ alors en utilisant le **T.V.I**, on a que $f(x) = 0$ admet au moins une racine ξ sur $[0, 1]$. D'autre part $f'(x) = e^x + \frac{[}{3}2\sqrt{x} > 0$ sur $[0, 1]$, alors la racine ξ est unique sur cet intervalle.
2. On va maintenant étudier la convergence de deux méthodes de point fixe liées à les formes précédentes.

- Pour $\varphi_1(x) = \ln(2 - 3\sqrt{x})$, on constate que cette fonction est définie uniquement sur le domaine $\left[0, \frac{4}{9}\right]$ et on remarqe aussi que $f(0)f(\frac{4}{9}) < 0$ ce qui implique que la racine $\xi \in \left[0, \frac{4}{9}\right]$. Mais on peut facilement montrer que la première condition $\varphi(\left[0, \frac{4}{9}\right]) \subseteq \left[0, \frac{4}{9}\right]$ de cette méthode n'est pas satisfaite. En effet, on a : $\varphi_1'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}\left(3\sqrt{x}-2\right)} < 0, \forall x \in \left[0, \frac{4}{9}\right]$.
  Ce qui montre que $\varphi_1(\left[0, \frac{4}{9}\right]) = \left[\varphi_1(\frac{4}{9}), \varphi_1(0)\right] =]-\infty, 0.69] \subsetneqq \left[0, \frac{4}{9}\right]$. Par conséquent la méthode de point fixe liée à φ_1 diverge.
- Pour $\varphi_2(x) = \frac{(2-e^x)^2}{9}$. La fonction $\varphi_2(x)$ est continue et dérivable sur $[0, 1]$, et $\varphi_2'(x) = \frac{2}{9e^x(e^x-2)}$ est une fonction continue sur $[0, 1]$, $\varphi_2'(x)$ admet donc un maximum sur $[0, 1]$ et comme $\varphi_2'(x)$ est strictement croissante car $\varphi_2''(x) = \frac{4}{9}e^x\left(e^x - 1\right) > 0$ sur $[0, 1]$, alors pour tout x de $[0, 1]$,

  $$-0.22 = \varphi_2'(0) \leq \varphi_2'(x) \leq \varphi_2'(1) = 0.42$$

  donc il existe un $q = 0.42 < 1$ c'est à dire la fonction $\varphi_2(x)$ est contractante sur $[0, 1]$. D'autre part, il est facile de vérifier que

  $$\varphi_2([0, 1]) = [\varphi_2(\ln 2), \varphi_2(0)] = [0, 0.111] \subseteq [0, 1].$$

  Donc la méthode de point fixe associée à la fonction φ_2 est convergente c'est à dire la suite générée par la méthode de point fixe converge vers l'unique point ξ solution de l'équation $\varphi_2(\xi) = \xi$ sur $[0, 1]$ qui est en outre l'unique solution de l'équation $f(\xi) = 0$.

Examen 2017 Analyse numérique 1

Exercice.

Soit l'équation : $f(x) = x^2 - \ln x - \alpha = 0,\ \alpha \in \mathbb{R}_+, x > 0$.

1. Trouver toutes les valeurs de α pour que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule racine ξ dans $[1, e]$.
2. Considérons l'algorithme de point fixe suivant :

   $$\begin{cases} x_0 \in [1, e] \\ x_{n+1} = \varphi(x_n) = \sqrt{\ln(x_n) + \alpha},\ n = 0, 1, ... \end{cases}$$

   Etudier la convergence de cet algorithme vers ξ selon toutes les valeurs de α obtenues de la question (1).
3. Prenons $\alpha = 2$.
   - Quel est le nombre nécessaire d'itérations pour calculer ξ avec trois chiffres exacts par l'algorithme de Dichotomie et puis par l'algorithme de point fixe ? comparer.
   - Donner trois itérations par l'algorithme de point fixe, prendre $x_0 = 1$.

Solution

1. l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution sur $[1, e]$ si $f(1)f(e) < 0$ et $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in [1, e]$. On a d'une part que pour tout $x \in [1, e]$, $f'(x) = \frac{2x^2-1}{x} > 0$. D'autre part : $f(1)f(e) < 0 \Leftrightarrow (1 - \alpha)(e^2 - \alpha - 1) < 0$.
   cas 1 : $(1 - \alpha) > 0$ et $(e^2 - \alpha - 1) < 0$ alors $\alpha < 1$ et $\alpha > e^2 - 1$ (impossible).
   cas 2 : $(1 - \alpha) < 0$ et $(e^2 - \alpha - 1) > 0$ alors $1 < \alpha < e^2 - 1$. Donc cette équation admet une racine unique sur $[1, e]$ si et seulement si $\alpha \in]1, e^2 - 1[$.

2. Convergence de l'algorithme de point fixe vers ξ. Posons $\varphi(x) = \sqrt{\ln(x) + \alpha}$, avec $\alpha \in]1, e^2 - 1[$.
On a : pour tout $x \in [1, e]$,
$$\varphi'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x + \alpha}} > 0$$
et
$$\varphi''(x) = -\frac{2\sqrt{\ln x + \alpha} + \frac{1}{\sqrt{\ln x + \alpha}}}{4x^2(\ln x + \alpha)} < 0.$$
Ce qui implique $\varphi'(x) > 0$, est décroissante et donc
$$\max_{[1,e]} \varphi'(x) = \varphi'(1) = q = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} < 1.$$
Pour $\varphi([1, e]) \subseteq [1, e]$?
On a : $\varphi'(x) > 0$, alors $\varphi(x)$ est croissante et par conséquent on a :
$$\varphi([1, e]) = ([\varphi(1), \varphi(e)]) = \left[\sqrt{\alpha}, \sqrt{1 + \alpha}\right].$$
or $\alpha \in]1, e^2 - 1[$ alors $1 \leq \sqrt{\alpha} < \sqrt{1 + \alpha} \leq \sqrt{1 + e^2 - 1} = e$. Ce qui montre que $\varphi([1, e] \subseteq [1, e]$. Alors la méthode de point fixe est convergente vers ξ dans $[1, e]$.
3. Nombre d'itérations dans la méthode de Dichotomie si on calcule la racine ξ dans $[1, e]$ avec 3 chiffres exacts c'est à dire $n = 3$ donc $\Delta_\xi \leq \frac{1}{2}10^{-2}$ car $m = 0$. On sait que le nombre d'itérations n produit par la l'algorithme de Dichotomie vérifie que :
$$n \geq \frac{\ln(e - 1) - \ln(0.5(10^{-2}))}{\ln 2} - 1 = 7.428,$$
donc on prend $n = 8$ comme le nombre nécessaire d'itérations pour approcher cette racine.
Pour l'algorithme de point fixe on sait aussi que la formule d'erreur est donnée par :
$$\Delta_n = \frac{q^n}{1 - q}|x_1 - x_0|$$
Pour $\alpha = 2$, donc $q = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ et pour $x_0 = 1$ on a : $x_1 = \varphi(1) = \sqrt{2}$. Alors
$$\frac{q^n}{1 - q}|x_1 - x_0| = \frac{(\frac{1}{2\sqrt{2}})^n}{1 - 2\sqrt{2}}|\sqrt{2} - 1| \leq \frac{1}{2}10^{-2}.$$
Après simplification, on déduit que $n \geq 4.66$, donc le nombre nécessaire d'itérations pour approcher cette racine par l'algorithme de point fixe est $n = 5$. Il est claire que l'algorithme de point fixe est plus rapide que celui de Dichotomie.
4. Calcul de trois itérations par l'algorithme de point fixe. On a : $x_0 = 1$, $x_1 = \varphi(1) = \sqrt{\ln 1 + 2} = \sqrt{2}$, $x_2 = \varphi(x_1) = 1.5318$, $x_3 = \varphi(x_2) = 1.5577$.

-

Chapitre 3

Résolution numérique des systèmes linéaires Auteur : M. Achache

Beaucoup de probèmes scientifiques et mathématiques se réduisent à la résolution d'un système linéaire de la forme $Ax = b$ où A est une matrice carrée d'ordre n donnée et $b \in \mathbb{R}^n$.

3.1 Exercices résolus

3.1.1 Méthodes directes

. **Exercice 1** Soit le système linéaire :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

(a) Montrer que le système linéaire (3.1) admet une solution unique $x \in \mathbb{R}^3$.

(b) Déterminer x par la méthode de Gauss.

(c) En utilisant la méthode de Gauss-Jordan, déterminer l'inverse de la matrice A des coefficients. Déduire la valeur de la solution x.

Solution.

(a) Le système (3.1), admet **une solution unique** x car $\det A = 2 \neq 0$.

(b) Résolution de (3.1) par la méthode de Gauss. On transforme le système (3.1) à un système dont la matrice de coefficients est triangulaire supérieure. Pour cela, on écholonne :

$$
\begin{aligned}
(A \mid b) &= \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} \backsim \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 - l_1 \\ l_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\
&\backsim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \left(U \mid \bar{b}\right).
\end{aligned}
$$

Le système (3.1) est donc équivalent à un système $Ux = \bar{b}$:

$$
\left(U \mid \bar{b}\right) : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.
$$

Alors la solution de (3.1), est évidente :

$$
x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.
$$

(c) Calcul de la matrice inverse A^{-1} par la méthode de Gauss-Jordan. La procédure se déroule comme suit :

$$
\begin{aligned}
(A \mid I) &= \begin{array}{l} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{array} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{l} l_1 \\ l_2 - l_1 \\ l_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{array}{l} l_1 \\ l_3 \\ l_2 - l_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{l} l_1 \\ -1 \times l_2 \\ l_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{array}{l} l_1 \\ -2l_2 + l_1 \\ l_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{array}{l} l_1 \\ l_2 \\ 2l_3 - l_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{l} l_1 \\ l_2 \\ -5l_3 + l_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & +7 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Alors la matrice A^{-1} est donnée par :

$$
A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.
$$

<u>**Exercice 2**</u> Soit le système linéaire :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

(a) Montrer que le système linéaire (3.2) admet une solution unique $x \in \mathbb{R}^3$.

(b) Déterminer x par la méthode de LU, si c'est possible.

(c) Déterminer x par la méthode de Cholesky, si c'est possible.

<u>**Solution.**</u>

(a) Le système (3.2), admet une solution unique x car $\det A = 4 \neq 0$.

(b) **Méthode de Crout**. La méthode LU est applicable si et seulement si les mineurs principaux de A sont non nuls. En effet, par un calcul simple, on obtient que

$$\det A_1 = 1 \neq 0, \ \det A_2 = 4 \neq 0, \ \det A = 4 \neq 0.$$

Le principe de cette méthode est de factoriser $A = LU$ où L une matrice triangulaire inférieure et U triangualire supérieure données par :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & l_{22} & 0 \\ 0 & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}, \ U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors résoudre $Ax = b$ est équivalent à résoudre deux systèmes linéaires évidents c.à.d :

$$Ax = b \Leftrightarrow LUx = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y. \end{cases}$$

Déterminons maintenant les coefficients des matrices L et U, on a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & l_{22} & 0 \\ 0 & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & l_{22}+1 & l_{22}u_{23} \\ 1 & l_{32} & l_{33}+l_{32}u_{23} \end{pmatrix}.$$

Par identification, on obtient :

$$\begin{cases} 1 + l_{22} = 5 \\ l_{22}u_{23} = 2 \\ l_{32} = 2 \\ l_{33} + l_{32}u_{23} = 2 \end{cases}$$

et par conséquent :

$$\begin{cases} l_{22} = 4 \\ u_{23} = \frac{1}{2} \\ l_{32} = 2 \\ l_{33} = 2 - l_{32}u_{23} \end{cases},$$

et donc :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors la solution de $Ax = b$, est équivalent

$$\begin{aligned} Ax &= b \Leftrightarrow LUx = b \\ &\Updownarrow \\ Ly &= b \,\text{et}\, Ux = y. \\ &\Updownarrow \\ Ly &= b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &\Downarrow \\ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \\ Ux &= y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ x &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc la solution de système est donnée par :

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(c) **Méthode de Cholesky**. Cette méthode est applicable si la matrice A est symétrique définie positive. En effet, on vérifie facilement que la matrice A est symétrique car $A = A^T$ et de plus les mineurs principaux de A, $\det A_1 = 1 > 0$, $\det A_2 = 4 > 0$, et $\det A = 4 > 0$. Alors la matrice A est définie positive et dans ce cas il existe une matrice triangulaire inférieure L telle que A se factorize comme suit : $A = LL^T$. Par conséquent, on a :

$$Ax = b \Leftrightarrow LL^T x = b \Leftrightarrow Ly = b \,\text{et}\, L^T x = y.$$

La matrice L est de la forme :

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{13} & l_{23} & l_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow L^T = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{13} \\ 0 & l_{22} & l_{23} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\begin{aligned} LL^T &= \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{13} & l_{23} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{13} \\ 0 & l_{22} & l_{23} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} l_{11}^2 & l_{11}l_{21} & l_{11}l_{13} \\ l_{11}l_{21} & l_{21}^2 + l_{22}^2 & l_{21}l_{13} + l_{22}l_{23} \\ l_{11}l_{13} & l_{21}l_{13} + l_{22}l_{23} & l_{13}^2 + l_{23}^2 + l_{33}^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et les six coefficients de la matrice L sont donnés par la résolution des ces équations :

$$\begin{cases} l_{11}^2 = 1 \\ l_{11}l_{21} = 1 \\ l_{11}l_{31} = 0 \\ l_{12}^2 + l_{22}^2 = 5 \\ l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} = 2 \\ l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 = 2 \end{cases}$$

d'où on obtient que :

$$\begin{cases} l_{11} = 1 \\ l_{21} = 1 \\ l_{31} = 0 \\ l_{22} = 2 \\ l_{32} = 1 \\ l_{33} = 1 \end{cases}$$

et

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour le système $Ly = b$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

alors

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pour le système $L^T x = y$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

alors la solution du système $Ax = b$, est :

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3.1.2 Méthodes itératives

.

Exercice 3 Soit le système linéaire :

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

(a) Etudier la convergence des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel pour (3.3).

(b) Vérifier que les rayons spectraux des matrices d'itération vérifient : $\rho(H_{GS}) = \rho^2(H_J)$. Que peut-on conclure ?

(c) Vérifier que la factorisation de LU existe et unique, puis résoudre le système $Ax = b$.

(d) Donner les trois premières itérations par la méthode de Gauss-Seidel pour le systéme (3.3).

Solution.

– **Méthode de Jacobi** : Tout d'abord vérifions que ce système admet une solution unique. Comme $\det A = 56 \neq 0$, alors la solution est unique. La matrice de Jacobi associée à A, est donnée par :

$$H_J = I - D^{-1}A.$$

On a :

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad D^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

d'où

$$H_j = I - D^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

La méthode de Jacobi est convergente si et seulement si $\rho(H_J) < 1$.Calculons donc les valeurs propres de la matrice H_J. On a :

$$\begin{aligned} P_{H_{GS}}(\lambda) &= \det(H_{GS} - \lambda I) = \lambda^3 - \frac{1}{8}\lambda = 0 \\ &\Updownarrow \\ \lambda &= \pm\frac{1}{4}\sqrt{2}, \quad \lambda = 0, \end{aligned}$$

et donc

$$\rho(H_J) = \max_{\lambda} |\lambda| = \frac{1}{4}\sqrt{2} = 0.353\,55 < 1.$$

Alors la méthode de Jacobi converge.

– **Méthode de Gauss-Seidel**. La matrice de Gauss-Seidel est donnée par :

$$H_{GS} = (D-E)^{-1}F$$

où

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

alors

$$H_{GS} = (D-E)^{-1}F = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{16} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{64} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$$

car

$$D - E = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

$$(D-E)^{-1}F = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{16} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{64} & -\frac{1}{16} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{16} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{64} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}.$$

La méthode de Gauss-Seidel est convergente si et seulement si $\rho(H_{GS}) < 1$. Calculons le spectre de la matrice H_{GS}. On a :

$$\begin{aligned} P_{H_{GS}}(\lambda) &= \det(H_{GS} - \lambda I) = \lambda^3 - \frac{1}{8}\lambda^2 = 0 \\ &\Updownarrow \\ \lambda &= 0, \ \lambda = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Ce qui implique que le rayon spectral $\rho(H_{GS}) = \frac{1}{8} = 0.125 < 1$. Alors la méthode de Gauss-Seidel est convergente.

– Il est claire que $\frac{1}{8} = (\frac{\sqrt{2}}{4})^2$, ce qui montre que $\rho(H_{GS}) = \rho^2(H_J)$. Cette égalité montre que la convergence de la méthode de Gauss-Seidel est plus rapide que celle de Jacobi.

– **Méthode de Crout**.
La foctorisation de LU existe et unique si les trois matrices principales $A_i, i = 1, 2, 3,$ de A sont inversibles, autrement dit si leurs mineurs principaux $\det A_i \neq 0$ pour tout i. On a :

$$\det A_1 = \det(4) = 4, \det A_2 = 17, \det A = 56.$$

– Calcul de trois premières par la méthode de Gauss-Seidel. On a :

$$x^{(k+1)} = H_{GS}x^{(k)} + c$$

avec :

$$H_{GS} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{16} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{64} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}, \; c = (D-E)^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{16} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{64} & -\frac{1}{16} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{16} \\ \frac{13}{64} \end{pmatrix}.$$

La méthode de Gauss-Seidel converge pour tout point initial $x^{(0)}$. Alors, on a :

$$\begin{array}{rcl} x^{(k+1)} & = & H_{GS}x^{(k)} + c \\ & \Updownarrow & \\ \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{16} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{64} & \frac{1}{16} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{16} \\ \frac{13}{64} \end{pmatrix}, k = 0, 1, 2, \\ & \Updownarrow & \end{array}$$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} & = & -\frac{1}{4}x_2^k + \frac{1}{4} \\ x_2^{(k+1)} & = & \frac{1}{16}x_2^k - \frac{1}{4}x_3^k + \frac{3}{16} \\ x_3^{(k+1)} & = & \frac{1}{16}x_3^k - \frac{1}{64}x_2^k + \frac{13}{64} \end{cases}$$

Dans ce tableau, on résume le calcul de ces trois itérations par la méthode de Gauss-Seidel en partant du point initiale $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$:

k	0	1	2
$x_1^{(k+1)}$	0.25	0.203 13	0.212 89
$x_2^{(k+1)}$	0.187 5	0.148 44	0.143 55
$x_3^{(k+1)}$	0.203 13	0.212 89	0.214 11

Alors d'après le tableau, on déduit que les trois itérations sont :

$$x^{(1)} = (0.25, 0.1875, 0.20313)^T, \; x^{(2)} = (0.20313, 0.14844, 0.21289)^T,$$

et

$$x^{(3)} = (0.21289, 0.14355, 0.21411)^T.$$

Exercice 4.

Soit à résoudre le système linéaire $Ax = b$.

(a) Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3/4 & 3/4 \\ 3/4 & 1 & 3/4 \\ 3/4 & 3/4 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que la matrice A est définie positive et que la méthode de Jacobi appliquée à ce système diverge.

(b) Prendre

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que la méthode de Jacobi appliquée à ce système converge mais celle de Gauss-Seidel diverge.

(c) Prendre

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que la méthode de Jacobi appliquée à ce système diverge mais celle de Gauss-Seidel converge.

Solution.

(a) La matrice A est symétrique car $A = A^T$ et définie positive car les mineurs principaux de A sont positifs puisque $\det A_1 = 1, \det A_2 = \frac{7}{16}$ et $\det A = \frac{5}{32}$.
La matrice itérative H_J de Jacobi associée à A est donnée par :

$$H_J = D^{-1}(E+F) = I - D^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & 0 & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

On calcule le polynôme caractéristique $\det(H_J - \lambda I)$ en λ. On a :

$$\det(H_J - \lambda I) = \lambda^3 - \frac{27}{16}\lambda + \frac{27}{32} = 0$$

à pour racine $\lambda_1 = -\frac{3}{2}$ et $\lambda_2 = \frac{3}{4}$, donc $\rho(H_J) = \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|) = \frac{3}{2} = 1.5 > 1$ et la méthode de Jacobi diverge.

(b) Pour la matrice A, la matrice de jacobi dans cet exemple est donnée par :

$$H_J = I - D^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Avec un simple calcul, on obtient que $\det(H_J - \lambda I) = \lambda^3 = 0$. Alors $\lambda = 0$, est une racine triple de H_J et donc $\rho(H_J) = 0 < 1$. La méthode de Jacobi converge.
Soit maintenant la matrice itérative H_{GS} de Gauss-Seidel :

$$H_{GS} = (D-E)^{-1}F = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Il est aussi facile de calculer les valeurs propres de H_{GS}. On a : $\det(H_{GS} - \lambda I) = -\lambda(2-\lambda)^2 = 0$. Alors les valeurs propres sont $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 2$ (racine double). Donc $\rho(H_{GS}) = 2 > 1$ et la méthode de Gauss-Seidel diverge.

Même travail pour la matrice A dans (3).

Remarque. Dans ces exemples, on a uniquement utiliser les **conditions suffisantes et nécessaires** pour étudier la convergence des méthodes itératives.

Signaler svp s'il ya des erreurs d'orthographe ou bien de calcul dans le polycopie.

————————————-Bon courage————————————-.