CHAPITRE 1 :

Espaces vectoriels normés .
Espace $\mathbb{R}^n$. Espaces métriques.

Espaces vectoriels normés :

Définition :

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ des nombres réels ou complexes, E est dit normé si est définie une application :

$$\begin{array}{ccc} N & : & E \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x & \longrightarrow & N(x) \end{array}$$

vérifiant les propriétés suivantes :

$(n_1)\quad N(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$

$(n_2)\ \forall\ x \in E,\ \forall\ y \in E,\ N(x+y) \preceq N(x) + p(y).$

$(n_3)\ \ \forall \in \mathbb{K},\ \forall\ x \in E,\ N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x).$

L'application ainsi définie est appelée norme sur E et $N(x)$ est notée $\|x\|$.

Conséquence :

On peut déduire de la définition de la norme l'inégalité :

$$\boxed{|\|x\| - \|y\|| \preceq \|x-y\|}$$

Exemple :

Le corps $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel normé sur lui même l'application qui à x lui fait correspondre$|x|$ définit une norme.

Espace $\mathbb{R}^n$

L'ensemble $\mathbb{R}^n$ peut être muni d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Il suffit de définir une opération interne .

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^n x \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (x,y) & \longrightarrow & x+y \end{array}$$

et une opération externe :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} x \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (\lambda,x) & \longrightarrow & \lambda.x \end{array}$$

Avec ces deux opérations, $\mathbb{R}^n$est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, il a une dimension égale à n,avec comme base canonique :

$$\begin{array}{rcl} e_1 & = & (1,0,0,.....,0) \\ e_2 & = & (0,1,0,.....,0) \\ & & .... \\ e_n & = & (0,0,........,1) \end{array}$$

et tout élément x de $\mathbb{R}^n$ s'écrit: $x = (x_1, x_2, ..., x_n) = x_1e_1 + ... + x_ne_n$.

Inégalité de Schwarz

Soit $(x_1, x_2, ..., x_n,\ y_1, y_2, ..., y_n)$ 2n nombres réels, $\forall\lambda \in IR$, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + \lambda y_i)^2 \succeq 0$$

En faisant le développement, on a :

$$\boxed{\lambda^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2 + 2\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \succeq 0}$$

Le.trinôme en λ est positif quel que soit λ, donc son discriminant est négatif ou nul d'où l'inégalité de **Schwarz :**

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \preceq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 . \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

Norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$:

Pour $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose :

$$\|x\|_2 = N_2(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i^2|}$$

Montrons que l'application : $x \longrightarrow \|x\|_2$ est une norme .

(n_1) $\|x\|_2 = 0 \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i^2| = 0 \Longleftrightarrow$ pour tout i, $x_i = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$

(n_2) $\|\lambda x\|_2 = \sqrt{\lambda^2 x_1^2 + \lambda^2 x_2^2 + ... + \lambda^2 x_n^2} = |\lambda| \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2} = |\lambda| \|x\|_2 .$

(n_3) Soit $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ *et* $x = (y_1, y_2, ..., y_n)$, on a :

$$\|x + y\|_2 = \sqrt{(x_1 + y_1)^2 + ... + (x_n + y_n)^2}$$

On doit montrer que $\|x + y\|_2 \preceq \|x\|_2 + \|y\|_2$, c'est à dire :

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2} \preceq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

Sachant qu'on a des nombres non négatifs, il suffit de prouver que :

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2 \preceq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

ou bien :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \preceq \sqrt{\boxed{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}}\sqrt{\boxed{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}}}$$

Si $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \preceq 0$, l'inégalité est vérifiée, sinon il suffit de prouver que :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \preceq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 . \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

et cette inégalité est **l'inégalité de Schwarz.**

Deuxième norme sur $\mathbb{R}^n$.

Pour $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose :

$$\boxed{\|x\|_1 = N_1(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|}$$

Troisième norme sur $\mathbb{R}^n$.

Pour $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose :

$$\boxed{\boxed{\|x\|_\infty = N_\infty(x) = \sup |x_i|}}$$

Normes équivalentes

Définition : Deux normes N_1 et N_2 sur E sont dites équivalentes s'ils existent deux nombres réels λ et μ positifs tels que :

$$\lambda N_1(x) \preceq N_2(x) \preceq \mu N_1(x), \quad \forall x \in E$$

Espaces métriques

Définition :

Un ensemble E est dit espace métrique si on a une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}^+$:

$$(x, y) \longrightarrow d(x, y)$$

appelée distance et vérifiant les conditions suivantes :

1) $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$.

2) $\forall\ x \in E,\ \forall\ y \in E,\ d(x, y) = d(y, x).$

3) $\forall\ x \in E,\ \forall\ y \in E, \forall\ z \in E,\quad d(x, y) \preceq d(x, z) + d(z, y).$

EXERCICES

Exercice 1 :

On considère les trois normes définies sur $\mathbb{R}^2$:

$$\boxed{\|\|_1 = |x| + |y|\,,\quad \|\|_2 = \sqrt{x^2+y^2},\quad \|\|_\infty = \max\{|x|\,,|y|\}}$$

- Représenter dans un repère orthonormé, les boules unités de chacune d'elles.
- Montrer que les trois normes son équivalentes.
- Donner les expressions des distances d_1, d_2 et d_∞ associées aux trois normes.

Exercice 2 :

Démontrer l'inégalité triangulaire renversée :

$$|\|x\| - \|y\|| \preceq \|x-y\|\,.$$

Exercice 3 :

Soit **E** un ensemble quelconque, on pose pour tout $x \in$ **E** : $d(x,x) = 0$ et $\forall\, x \in$ **E**, $\forall\, y \in$ **E** avec $x \neq y \Longrightarrow d(x,y) = 1$.

- Montrer que l'on définit une distance sur **E**.
- Quelles sont les boules pour cette distance.

Exercice 4 :

Soit $(\mathbf{E}, \|\|.)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

- Montrer que pour tous $x, y \in E$ on a : $\|x\|+\|y\| \leq 2\max\{\|x+y\|\,,\|x-y\|\}$.
- Montrer que l'on peut avoir l'égalité avec $x \neq 0$ et $y \neq 0$.
- Si l'on a la norme euclidienne$\|\| = \|\|_2$, montrer que :

$$\|x\| + \|y\| \leq \sqrt{2}\max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}$$

Exercice 5 :

On définit sur $\mathbb{R}^2$ l'application :

$$\mathbf{N} : \ (x,y) \longrightarrow \mathbf{N}(x,y) = \ \max \ \{|x|, \ |2x+y|\}$$

- Montrer que $\mathbf{N}$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
- Montrer que $\mathbf{N}$ est équivalent à la norme $\|\|_1$ ie trouver deux constantes positives $\boldsymbol{\lambda}$ et $\boldsymbol{\mu}$ telles que :

$$\boxed{\lambda \|\|_1 \preceq \mathbf{N} \preceq \mu \|\|_1}$$

Exercice 6 :

Soit l'application définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \longrightarrow f(x) = \frac{x}{1+|x|}$$

- Montrer que l'application f définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $I =]-1, 1[$.
- On pose : $\delta(x,y) = |f(x) - f(y)|$. Vérifier que δ est une distance sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7 :

Soit $a, b > 0$. On pose, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{N}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sqrt{a^2x^2 + b^2y^2}$$

- Montrer que $\mathbf{N}$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
- Dessiner la boule unité.
- Montrer que $\mathbf{N}$ et $\mathbf{N}_2$ sont des normes équivalentes.

Exercice 8 :

Soit $\mathbf{N}$ une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\mathbf{N}(x,y) = \sup_{t\ \in\ \mathbb{R}} \frac{|tx+y|}{\sqrt{1+t^2}}$$

- Montrer que $\mathbf{N}$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
- En utilisant l'inégalité de **Schwarz**, montrer que :

$$\boxed{\mathbf{N} \leq \mathbf{N}_2}$$

- Soit $\boldsymbol{\Delta}$ la droite d'équation : $tx + y = 0$ et $M_0(x_0, y_0)$ un point de $\mathbb{R}^2$.Donner la valeur de $d(M_0,\ \Delta)$, en déduire que : $\mathbf{N} \approx \mathbf{N}_2$.
- **Autre méthode :** En étudiant la fonction :

$$f(t) = \frac{(tx+y)^2}{1+t^2}$$

- Montrer l'équivalence des deux normes $\mathbf{N}$ et $\mathbf{N}_2$.

Exercice 9 :

Soit E l'espace vectoriel des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, définies et continues sur $[-1,1]$.

Montrer que les trois applications suivantes sont des normes sur E .

$$\boxed{\|f\|_1 = \int_{-1}^{1} |f(x)|\, dx, \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_{-1}^{1} f^{\ 2}(x)dx}, \quad \|f\|_\infty = \sup_{x\in[-1,1]} |f(x)|.}$$

- Soit la suite de fonctions :

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & x \in \left[-1, -\frac{1}{n}\right] \\ nx, & x \in \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] \\ 1, & x \in \left]\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$$

- La suite (f_n) est-elle de Cauchy dans $(E,\ \|\|_1)$, $(E,\ \|\|_2)$ et $(E,\ \|\|_\infty)$?

CHAPITRE 2

Fonctions différentiables

Soit f une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie au voisinage $\mathcal{V}(x)$ $x = (x_1,\ x_2, ..., x_n)$ et soit $h = (h_1,\ h_2, ..., h_n)$ un autre élément de $\mathbb{R}^n$
tel que $x + h \in \mathcal{V}(x)$. $\mathbb{R}^n$ est muni d'une struture d'espace vectoriel normé sur le corps des réels $\mathbb{R}$ et $\|x\|$ désigne la norme d'un vecteur x de $\mathbb{R}^n$.

Définition : La fonction f est dite différentiable au point $x \in \mathbb{R}^n$, si on peut écrire :

$$f(x+h) - f(x) = df_x(h) + \varepsilon_x(h)\|h\| \qquad (1)$$

où pour x fixé, l'application :

$$l \longrightarrow d_x f(l)\ ,$$

est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et l'application $l \longrightarrow \varepsilon_x(l)$ est une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie :

$$\lim_{l \longrightarrow 0} \varepsilon_x(l) = 0$$

Conséquences :

a) S'il existe une application linéaire vérifiant (1), elle est unique.

b) Soit $(e_1, e_2, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on peut écrire : $h = (h_1,\ h_2, ..., h_n) = \sum_{i=1}^{n} h_i e_i$, d'où :

$$df_x(h) = df_x\left(\sum_{i=1}^{n} h_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} h_i df_x(e_i) = \sum_{i=1}^{n} A_i(x) h_i.$$

Ainsi si la fonction f est différentiable au point $x \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$f(x+h)-f(x)=\sum_{i=1}^{n}A_i(x)h_i+\varepsilon_x(h)\|h\|$$

Définition :

Si f est une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, différentiable au point $x\in\mathbb{R}^n$, l'application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$:

$$h\longrightarrow df_x(h)=\sum_{i=1}^{n}A_i(x)h_i$$

est dite **différentielle** au point x de la fonction f.

Exemple :

Les fonctions projections de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ sont différentiables. En effet comme $p_i(x)=x_i$ et $p_i(x+h)=x_i+h_i$, d'où $p_i(x+h)-p_i(x)=h_i$, ce qui montre bien que p_i est différentiable avec $A_j=0$ *pour* $i\neq j$, $A_i=1$ *et* $\varepsilon=0$.Ce qui donne : $dp_{i(x)}(h)=h_i$.On utilisera alors la notation suivante : $\mathbf{dp}_{ix}=\mathbf{dx}_i$.Avec cette notation la différentielle au point x s'écrira :

$$\mathbf{df}_x=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{A}_i(\mathbf{x})\mathbf{dx}_i$$

Définition :

Soit f une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, on dira que f est différentiable si on peut écrire :

$$f(x+h)-f(x)=df_x(h)+\varepsilon_x(h)\|h\| \qquad (2)$$

où pour x fixé, l'application : $l\longrightarrow d_xf(l)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ et l'application $l\longrightarrow\varepsilon_x(l)$ est une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ qui vérifie $\lim\limits_{l\longrightarrow 0}\varepsilon_x(l)=0$.

L'égalité (2) est une égalité entre vecteurs de $\mathbb{R}^p$, en passant aux composantes de ces vecteurs, on a alors p égalités .

$$(f(x+h))_i-(f(x))_i=(df_x(h))_i+(\varepsilon_x(h))_i\|h\| \qquad (3)$$

où $(f(x+h))_i$, $(f(x))_i$, $(df_x(h))_i$, $(\varepsilon_x(h))_i$ désignent les i^{èmes} composantes des vecteurs .

$$f(x+h), \quad f(x), \quad df_x(h), \quad \varepsilon_x(h)$$

En conclusion :

Une application f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$est différentiable au point $x \Longleftrightarrow$ les fonctions composantes $f_i = p_i o f$ sont différentiables en ce point . Ce qui nous permet d'écrire, en utilisant les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$:

$$df_x(h) = A(x)h$$

où $A(x)$ est la matrice $(A_{ij}(x))$ à p lignes et n colonnes.

Propriétés des fonctions différentiables :

a) Continuité :

Soit f une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, différentiable au point $x \in \mathbb{R}^n$, de la définition de la différentiabilité :

$$f(x+h) - f(x) = df_x(h) + \varepsilon_x(h) \|h\| \ , \lim_{h \longrightarrow 0} \varepsilon_x(h) = 0$$

on peut déduire que : $\lim\limits_{h \longrightarrow 0} f(x+h) - f(x) = 0$.Ce qui montre que toute fonction différentiable au point x est continue en ce point.

b) Existences des dérivées partielles :

Soit f une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, différentiable au point $x \in \mathbb{R}^n$. On a :

$$f(x+h) - f(x) = \sum_{i=1}^{n} A_i(x)h_i + \varepsilon_x(h) \|h\| \ , \lim_{h \longrightarrow 0} \varepsilon_x(h) = 0$$

Soit : $h = (0, 0, ..., h_p, ..., 0, 0) \Longrightarrow \|h\| = |h_p| \Longrightarrow$

$$\frac{f(x_1,...,x_p+h_p,....,x_n)-f(x_1,....,x_n)}{h_p}=A_p\left(x\right)\pm\varepsilon_x\left(h_p\right)$$

Ainsi, si nous considérons la fonction d'une seule variable :

$$t\longrightarrow f(x_1,.....,x_{p-1},t,x_{p+1},......x_n)$$

Cette fonction admet pour la valeur x_p une dérivée égale à $A_p(x)$ que l'on note :

$$D_pf(x)=\frac{\partial f(x)}{\partial x_p}$$

On dit alors que que la fonction f admet une dérivée partielle relative à la variable x_p.D'où l'écriture de la différentielle :

$$Df_x=\sum_{i=1}^{n}D_if(x)dx_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}dx_i$$

Si l'on a une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, différentiable au point $x\ \in\mathbb{R}^n$,la différentielle est représentée par une matrice appelée

Matrice jacobienne :

$$Jf(x)=D_jf(_i(x)=\left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}\right)$$

($i=1,....p$ indice des lignes; $j=1,.....,n$ indice des colonnes). $Jf(x)$ est une matrice à p lignes et n colonnes.Si l'on a $n=p$, la valeur absolue du déterminant de la matrice $Jf(x)$ est appelé : **Jacobien.**

Remarque :

On vient de voir que si l'on a une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ différentiable au point $x\ \in\mathbb{R}^n$, alors les dérivées partielles par rapport à chaque coordonnées variables x_i existent , mais l'existence des dérivées partielles en un point n'assurent pas la différentiabilité en ce mème point.

Théorème :

Toute application f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, définie sur un voisinage d'un point $x \in \mathbb{R}^n$et admettant des **dérivées partielles continues** sur ce voisinage,est différentiable au point x. Une telle fonction est dite **continuement différentiable** au point x ou de classe $\mathbb{C}^1$.

Définition :

Dérivée dans une direction :

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^n$ ($\|\overrightarrow{u}\| = 1$) et f une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. On appelle dérivée directionnelle de la fonction f , au point x et dans la direction du vecteur $\overrightarrow{u}$ la limite suivante (si elle existe) :

$$\underset{\lambda \longrightarrow 0}{Lim} \frac{f(x+\lambda \overrightarrow{u}) - f(x)}{\lambda} = D_u f(x)$$

Théorème :

Si f est une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, différentiable au point $x \in \mathbb{R}^n$,elle admet des dérivées partielles dans toutes les directions et l'on a :

$$D_{\overrightarrow{u}} f(x) = df_x(\overrightarrow{u})$$

Démonstration :

Si f est différentiable en un point $x \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$f(x+h) - f(x) = df_x(h) + \varepsilon_x(h) \|h\| \ , \lim_{h \longrightarrow 0} \varepsilon_x(h) = 0$$

Soit $h = \lambda \overrightarrow{u} \implies f(x+\lambda \overrightarrow{u}) - f(x) = df_x(\lambda \overrightarrow{u}) + \varepsilon_x(\lambda \overrightarrow{u}) \|\lambda \overrightarrow{u}\| \implies$ $f(x+\lambda \overrightarrow{u}) - f(x) = \lambda df_x(\overrightarrow{u}) + \varepsilon_x(\lambda \overrightarrow{u}) |\lambda|$ .En divisant par λ, on obtient :

$$\frac{f(x+\lambda \overrightarrow{u}) - f(x)}{\lambda} = df_x(\overrightarrow{u}) \pm \varepsilon_x(\lambda \overrightarrow{u})$$

Ce qui donne par passage à la limite :

$$\underset{\lambda \longrightarrow 0}{Lim} \frac{f(x+\lambda \overrightarrow{u}) - f(x)}{\lambda} = df_x(\overrightarrow{u}) = D_u f(x)$$

Remarque 1 :

Comme on a :

$$D_u f(x) = df_x\left(\overrightarrow{u}\right) = \frac{\partial f\,(x)}{\partial x_1}.u_1 + ... + \frac{\partial f\,(x)}{\partial x_n}.u_n$$

En utilisant l'opérateur différentiel (**gradient**) :

$$\overrightarrow{\text{grad}\, f(x)} = \nabla f(x) = \left(\frac{\partial f\,(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f\,(x)}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f\,(x)}{\partial x_n}\right)$$

On a alors :

$$D_u f(x) = df_x\left(\overrightarrow{u}\right) = \nabla f(x).\overrightarrow{u}$$

Remarque 2 :

Avec le gradient, on écrira que la fonction f est différentiable en un point $x \in \mathbb{R}^n$ comme suit :

$$f(x+h) = f(x) + \nabla f(x).h + \varepsilon\,(h)\,\|h\|$$

Théorème :

Composition de fonctions différentiables

Soit f une application d'une partie E de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ différentiable en x, et g une application de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ défine sur $f(E)$ et différentiable en $y = f(x)$.La fonction $F = gof$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^q$ est alors différentiable au point x et l'on a :

$$dF_x = dgof(x) = dg_{f(x)} o df_x$$

$\mathbf{J}(f(x)$ avec p lignes et n colonnes , $\mathbf{J}_g(f(x)$ avec q lignes et p colonnes $\mathbf{J}\left(gof(x)\right)$ q lignes et n colonnes, ceux sont les matrices des applications

linéaires : df_x, $dg_{f(x)}$ et $dgof(x)$.
Comme :

$$dgof(x) = dg_{f(x)} o df_x$$

on en déduit que la matrice $\mathbf{J}\,(gof(x))$ est le produit des deux matrices $\mathbf{J}_g(f(x)$ et $\mathbf{J}(f(x)$:

$$\mathbf{J}\,(gof(x)) = \mathbf{J}_g(f(x).\mathbf{J}(f(x)$$

Exemple 1 : q = 1 :

Soit f une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ différentiable en x, et g une application de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ différentiable en $f(x)$.Soit la fonction f :

$$\begin{array}{ccc} f & : & \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p \\ (x_1, x_2, \; ....., x_n) & \longrightarrow & (f_1(x), \; f_2(x)\,, ..., f_p(x)) \end{array}$$

$\mathbf{J}(f(x)$ est une matrice avec p lignes et n colonnes :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ .... \\ .... \\ \frac{\partial f_p(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f_p(x)}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f_p(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Soit maintenant la fonction g :

$$\begin{array}{ccc} g & : & \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R} \\ (f_1(x), \; f_2(x)\,, ..., f_p(x)) & \longrightarrow & g\,((f_1(x), \; f_2(x)\,, ..., f_p(x))) \end{array}$$

$\mathbf{J}_g(f(x)$ est une matrice à une ligne et p colonnes :

$$\left(\frac{\partial g}{\partial f_1}, \frac{\partial g}{\partial f_2}, \ldots\ldots, \frac{\partial g}{\partial f_p}\right)$$

En faisant le produit des deux matrices :

$$\left(\begin{array}{c} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2}, \ldots\ldots\ldots, \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial f_p(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f_p(x)}{\partial x_2}, \ldots\ldots\ldots, \frac{\partial f_p(x)}{\partial x_n} \end{array}\right) \times \left(\frac{\partial g}{\partial f_1}, \frac{\partial g}{\partial f_2}, \ldots\ldots, \frac{\partial g}{\partial f_p}\right),$$

on obtient une matrice avec **une** ligne et **n** colonnes dont les éléments sont donnés par la formule :

$$\frac{\partial g(f(x_1, x_2, .., x_n)}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial g\left(f_1(x),\ f_2(x)\,, \ldots., f_p(x)\right)}{\partial f_i} . \frac{\partial f_i(x_1, x_2, .., x_n)}{\partial x_j}$$

Exemple 2 :

Soit $f(x, y) = x^3 + xy^2$**.et** $F(x, y) = f(y, x) \;=\; y^3 + yx^2$.

La fonction F est la composition de deux fonctions :

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \quad \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longrightarrow (y, x) \longrightarrow f'\,(y, x)$$

La matrice jacobienne de la première application est la suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La jacobienne associée à f :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Ce qui donne :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial x}\right)(y,x)$$

Finalement, on obtient :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(y,x) = [2xy]_{(x,y)} = 2xy$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f\,(y,x)}{\partial x} = \left[3x^2+y^2\right]_{(y,x)} = 3y^2+x^2$$

Exercices

Exercice 1 :

a) Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ privé de la première bissectrice ($y = x$):

$$f(x,y) = \frac{\sin x - \sin y}{x - y}$$

Montrer que :

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(a,a)} \frac{\sin x - \sin y}{x - y} = \cos a$$

b) Calculer la limite suivante en utilisant deux méthodes différentes :

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{x + y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

Exercice 2 :

a) Déterminer les courbes de niveau (**isoclines**) de la fonction :

$$\begin{array}{cccc} f & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longrightarrow & xy \end{array}$$

et tracer l'allure de quelques unes sur un même repère.

b) Mèmes questions pour la fonction :(Courbes de niveau pour $k = 0$ et $k \neq 0$) :

$$f(x,y) = \frac{-3y}{x^2 + y^2 + 1}$$

Exercice 3 :

Calculer la limite suivante :

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

Exercice 4 :

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \text{ et } f(0,0) = 0$$

- Calculer les dérivées partielles d'ordre 1.
- Est ce que f est continuement différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5 :

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

$$f(x,y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \text{ et } f(0,0) = 0$$

- Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0,0)$ et les calculer.
- Calculer les dérivées partielles du premier ordre pour $(x,y) \neq (0,0)$.
- Etudier leur continuité en $(0,0)$.
- La fonction f est-elle différentiable en $(0,0)$.

Exercice 6 :

- Justifier que la fonction f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y,z) = xy + yz + zx$$

est différentiable et donner l'expression de sa différentielle.

Exercice 7:

Soit f une fonction à valeurs réelles de classe $\mathbf{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

- Calculer les dérivées partielles d'ordre 1.de la fonction $f(u,v) = u+v$ avec $u(x,y) = e^{x+y}$ et $v(x,y) = x^2 + y^2$.

Exercice 8 :

Soit f une fonction numérique de classe C^1sur $\mathbb{R}^2$.

- Calculer les dérivées (ou les dérivées partielles) des fonctions suivantes :

$$F(x,y) = f(y,x), \qquad g(x) = f(x,x).$$

$$H(x,y) = f(y, f(x,x)), \qquad G(x) = f(x, f(x,x)).$$

- Vérifier vos résultats sur l'exemple suivant : $f(x,y) = x^3 + xy^2$.

Exercice 9 :

Soit donnée la fonction $f(x,y,z) = x + y^2 + z^3$.

- Calculer la dérivée directionnelle au point $(1,1,1)$.

a) dans la direction du vecteur $\overrightarrow{u_1} = (2,1,3)$.

b) dans la direction du vecteur $\overrightarrow{u_2} = (1,-1,1)$.

Exercice 10 :

Soit la fonction définie implicitement $f(x,y) = e^x - e^y + x^2 + xy = 0$.

Calculer $\dfrac{dy}{dx}$.

CHAPITRE 3

Extrémas d'une fonction à plusieurs variables

Définition :

Soit a et b deux points de $\mathbb{R}^n$. On appelle segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}^n$, l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}^n$ de la forme :

$$x = (1 - \lambda)\, a + \lambda b, \quad \lambda \in [0.1]$$

Définition :

Une partie $E \subset \mathbb{R}^n$ est dite convexe, si pour tout couple a , b de E, le segment $[a, b] \subset E$.

Formule des accroissements finis .

Soit f une fonction différentiable d'une partie convexe $E \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.Soient x et $x + h$ deux points de E et g l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ définie

par :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R}^n \\ t & \longmapsto & x + th \end{array}$$

Soit alors l'application $F = fog$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$F(t) = f(g(t)) = f(x_1 + th_1, ..., x_n + th_n)$$

F est dérivable sur $[0, 1]$, on peut lui appliquer la formule des accroissements finis : Il existe $\theta \in [0, 1]$ $\mathbb{R}^n$ tel que : $F(1) - F(0) = F'(\theta)$.

Ce qui donne :

$$f(x+h)-f(x)=\sum_{i=1}^{n}h_iD_if(x+\theta h)$$

Formule de Taylor :

Supposons que la fonction f admet des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre p, il en résulte que la fonction F est dérivable jusqu'à

l'ordre p, on peut alors lui appliquer la **formule de Taylor** : il exite $\theta \in [0,1]$ tel que :

$$F(1)-F(0)=F(0)+\frac{1}{2!}F'(0)+.....+\frac{1}{(p-1)!}F^{(p-1)}(0)+\frac{1}{p!}F^{(n)}(\theta)$$

On en déduit **la formule de Taylor** pour l'application f :

$$\begin{aligned} f(x+h) \quad &= \quad f(x)+\sum_{i=1}^{n}h_iD_if(x)+\frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{n}(h_iD_if(x))^{[2]}+\frac{1}{(p-1)!}\sum_{i=1}^{n}(h_iD_if(x))^{[p-1]} \\ &\quad +\frac{1}{p!}\sum_{i=1}^{n}(h_iD_if(x+\theta h))^{[p]} \end{aligned}$$

Extremum :

Soit f une application d'une partie $E\subset\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

Définition :

On dit que f admet un maximum (resp minimum) au point $a\in E$, $s'il$ existe $\alpha>0$ tel que , $\forall x\in E$ vérifiant :

$$\|x-a\|<\alpha \Longrightarrow f(x)\preceq f(a) \text{ (resp } f(x)\succeq f(a))$$

Définition : On dit que f admet un extremum s'il s'agit indifféremment d'un maximum ou d'un minimum.

Définition : Si f admet un extremum en un point a et si f admet des dérivées partielles d'ordre 1, on a alors : $D_if(a)=\dfrac{\partial f(a)}{\partial x_i}=0$, pour $i=1,....,n$, ou encore $\overrightarrow{\nabla f(a)}=\overrightarrow{\text{grad}\, f(a)}=\overrightarrow{0}$.

Démonstration :

Il suffit de considérer la fonction d'une seule variable :

$$x_i \longrightarrow \varphi\left(a_1, a_2, ..., x_i, ...a_n\right)$$

En effet si f admet un maximum au point $a \Longrightarrow \varphi$ admet un maximum en a$_i$, ce qui implique $\varphi'\left(a_i\right) = 0$, d'où $D_i f(a) = \dfrac{\partial f(a)}{\partial x_i} = 0.$

Remarque :

Les conditions $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0,\ i \in [1, 2, .., n]$ sont donc nécessaires pour l'existence d'un extremum mais pour les fonctions à plusieurs variables

ces conditions ne sont pas suffisantes .

Exemple :

$$f(x, y) = x^2 - y^2,$$

on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y.$$

Au point $(0, 0)$,

$$f(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

Pourtant le point $(0, 0)$ n'est pas un extremum, en effet pour :

$$x \neq 0, y = 0 \implies f(x,y) = x^2 \quad \text{donc} \quad f(x,y) > f(0,0)$$

$$x = 0,\ y \neq 0 \implies f(x,y) = -y^2 \text{ donc } \quad f(x,y) < f(0,0).$$

Fonction à deux variables : $(x, y) \to f(x, y)$.

Utilisons la formule de **Taylor** jusqu'à l'ordre 3 au voisinage de (x_0, y_0) avec :

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$$

On a :

$$\begin{aligned} f(x,y) - f(x_0,y_0) &= \frac{1}{2!}\left[h^2\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y} + k^2\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}\right] + \\ & \frac{1}{3!}\left[h\frac{\partial f(x_0+\theta h, y_0+\theta k)}{\partial x} + k\frac{\partial f(x_0+\theta h, y_0+\theta k)}{\partial y}\right]^{[3]} \end{aligned}$$

Ainsi pour h et k trés proches de 0, le signe de $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ dépend de :

$$h^2\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y} + k^2\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2} = rh^2 + 2hks + k^2 t$$

avec les notations suivantes : $r = \dfrac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}$, $s = \dfrac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y}$ et $t = \dfrac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}$.

Si $\Delta = s^2 - rt < 0$, $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ garde un signe constant $\Longrightarrow$ on a un **extremum.**

Si $r < 0 \Longrightarrow$ on a **un maximum.**

Si $r > 0 \Longrightarrow$ on a **un minimum**.

Si $\Delta = s^2 - rt > 0$, $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ change de signe $\Longrightarrow$ **on n'a pas d'extremum**.

Si $\Delta = s^2 - rt = 0$, il faudrait poursuivre le développement de **Taylo**r.

Exercices

Exercice 1 :

Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$$

a) Montrer que f admet un seul point critique $M = (1,2)$.

b) Donner la nature de ce point.

Exercice 2 :

Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 6x^2 + 6y^2$$

a) Montrer que f admet quatre points critiques .

b) Donner la nature de ces points.

Exercice 3 :

Etudier les extréma de la fonction suivante:

$$f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$$

Exercice 4 :

Soit un **parallélipipède** rectangle de cotés x, y et z.

Sachant que la somme des cotés est constante ($x + y + z = L$) comment choisir x, y et z pour que le volume du parallélipipède soit maximal.

Exercice 5 :

- Montrer que la fonction :

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + (ax + by + c)^2$$

admet un minimum et trouver la valeur de ce minimum.

Exercice 6 :

Soit $\pi)$ le plan défini par **:** $\mathbf{z} = x + y + 1$

Trouver le point du plan $\pi)$ le plus proche de l'origine.

Exercice 7 :

Déterminer les extrémums de $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dans le cas suivant :

$$f(x, y = x^3 + y^3 - 3xy$$

CHAPITRE 4

Formes différentielles.Intégrales curvilignes

Formes différentielles

Définition 1 :

On appelle forme différentielle définie sur l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, une application ω de Ω dans le dual de $\mathbb{R}^n$.

Notation : dual de $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n)^*$.

C'est donc une application qui prend ses valeurs dans un espace de formes linéaires. La différentielle d'une fonction à plusieurs variables

va nous fournir un exemple.

Définition 2 :

Soit :

$$f \quad : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

la fonction est de classe C^1 sur l'ouvert Ω . la différentielle de f notée *df* est définie par :

$$x \in \ \Omega \to df_x = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_i$$

Généralement, on note par $(dx_1, dx_2, ..., dx_n)$ la base duale de la base canonique ($e_1, e_2, ..., e_n$).Ainsi pour tout $x \in \Omega$, la forme

différentielle $\omega(x)$ va s'écrire comme suit :

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i (x_1, x_{2,}..., x_n) dx_i$$

où les coefficients a_i dépendent du point $x = (x_1, x_{2,}..., x_n)$.

Définition 3 :

La forme différentielle ω est de classe C^k sur l'ouvert Ω si les fonctions a_i sont de classe C^k sur l'ouvert Ω.

Formes différentielles exactes

Définition 4 :

La forme différentielle ω de classe C^0 sur l'ouvert Ω est exacte s'il existe une fonction f de classe C^1 sur l'ouvert Ω telle que : $\omega = df$. La fonction f est une primitive de la forme différentielle ω.

Autre formulation :

Soit le champ de vecteurs :

$$\overrightarrow{V(x)} = (a_1(x_1, x_2, ..., x_n), a_2(x_1, x_2, ..., x_n), .., a_n(x_1, x_2, ..., x_n))$$

ω est une forme différentielle exacte si elle dérive d'une fonction potentielle f , autrement dit :

$$\overrightarrow{\text{grad } f\,(x)} = \overrightarrow{\nabla f\,(x)} = \overrightarrow{V(x)}$$

Théorème 1 :

Soit P et Q deux fonctions de classe C^1 sur l'ouvert Ω *simplement connexe* de $\mathbb{R}^2$, alors la forme différentielle définie par :

$$\omega\,(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

est exacte ssi :

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}, \ \forall\,(x, y) \in \nleqslant$$

Remarque :

$\nleqslant$ est simplement connexe, cela veut dire sans trou et constitué d'un seul morçeau.

Théorème 2 :

Soit P , Q et R trois fonctions de classe C^1 sur l'ouvert Ω *simplement connexe* de $\mathbb{R}^3$, alors la forme différentielle définie par :

$$\omega\left(x,y,z\right) = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

est exacte ssi $\forall\left(x,y,z\right) \in \nleq$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R(x,y)}{\partial y} &= \frac{\partial Q(x,y)}{\partial z} \\ \frac{\partial P(x,y)}{\partial z} &= \frac{\partial R(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} &= \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \end{aligned}$$

Autre formulation : La forme différentielle $\omega\left(x,y,z\right)$ définie sur $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ est exacte si :

- Ω est simplement connexe

- le champ de vecteurs $V = (P,Q,R)$ est irrotationnel ie :

$$\overrightarrow{rotV} = \overrightarrow{\nabla \wedge V} = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \left|\begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P(x,y,z) & Q(x,y,z) & R(x,y,z) \end{array}\right| = \overrightarrow{0}$$

Remarque :

Si l'on a seulement :

$$\overrightarrow{rotV} = \overrightarrow{\nabla \wedge V} = \overrightarrow{0},$$

et l'ouvert Ω n'est pas simplement connexe, on dit que ω est une forme différentielle **fermée**.

Facteurs intégrants

Si la forme ω n'est pas exacte mais que la forme :

$$f\left(x_1, x_2, .., x_n\right) \omega$$

l'est, on dit que f est un **facteur intégrant** de ω.

Intégrales curvilignes

Définition 5 :

On considère une forme différentielle ω définie continue sur l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ par :

$$\omega\left(x\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(x_1, x_{2,} ..., x_n\right) dx_i,\;\; x \in \mathbb{R}^n.$$

On considère une courbe paramétrée (Γ) tracée dans Ω avec le paramétrage suivant :

$$\overrightarrow{OM(t)} = \sum_{i=1}^{n} x_i(t) \overrightarrow{e_i}\;,\;\; t \in \left[a, b\right].$$

On appelle intégrale curviligne de la forme différentielle ω l'intégrale définie par :

$$\int_\Gamma \omega = \int_a^b \omega\left(M(t)\right) \left(\frac{dM(t)}{dt}\right) = \int_a^b \sum_{i=1}^{n} a_i \left(x_1\left(t\right), x_2\left(t\right), ..., x_n(t)\right) x_i^{'} dt$$

Remarque :

Dans le cas où $n = 2$ avec $\omega = Pdx + Qdy$, on a :

$$\int_\Gamma \omega = \int_a^b P(x(t), y(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t)) y'(t) dt$$

Propriétés de l,intégrale curviligne

Proposition 1:

L'intégrale curviligne de la forme ω sur la courbe Γ est indépendante du paramétrage choisi sur la courbe Γ, a condition de conser-

ver la même orientation de la courbe.

Proposition 2 :

Si on change l'orientation de la courbe Γ, l'intégrale curviligne de la forme ω change de signe, ce que l'on peut représenter par :

$$\int_{\Gamma^+} \omega = -\int_{\Gamma^-} \omega$$

Proposition 3 :

(Relation de **Chasles**) Si D est un point de la courbe $(\Gamma) = \left(\widehat{AB}\right)$, on a l'égalité :

$$\int_{\widehat{AB}} \omega = \int_{\widehat{AD}} \omega + \int_{\widehat{DB}} \omega$$

Formes différentielles exactes

Proposition 4 :

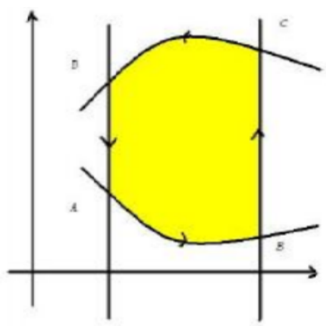
Si ω est une forme différentielle exacte sur l'ouvert Ω et si f est une primitive de ω (ie $\omega = df$), alors pour toute courbe $(\Gamma) = \left(\widehat{AB}\right)$

de classe C^1, d'origine A et d'extrémité B tracée dans Ω, on a :

$$\int_{\widehat{AB}} \omega = f(B) - f(A)$$

Corollaire :

Si ω est une forme différentielle exacte sur l'ouvert Ω, alors pour toute courbe Γ **fermée** de classe C^1 tracée dans Ω ,on a : $\oint \omega = 0$.



Formule de Green-Riemann

Théorème :

On considère une forme différentielle continue définie par :

$$\omega(x,y) = P\,(x,y)\,dx + Q\,(x,y)\,dy,\ \forall\,(x,y) \in \Omega$$

et un compact $K \subset \Omega$ dont la frontière Γ soit de classe C^1 par morceaux orientée dans le sens direct , on a :

$$\int_{\Gamma} P\,(x,y)\,dx + Q\,(x,y)\,dy = \iint\limits_{K} \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right) dxdy$$

Démonstration :

On suppose avoir un compact K schématisé par le dessin ci-dessus.

Donc il existe deux fonctions de classe C^1, φ et ψ définies sur $[a,b]$ telles que :

$$K = \left\{ (x,y) \in R^2 :\ a \preceq x \leq b,\ \varphi\,(x) \leq y \leq \psi\,(x) \right\}$$

La frontière du compact K comprend alors :

- l'arc $\widehat{AB}$ d'équation $y = \varphi\,(x)$.

- la verticale BC.

- l'arc $\widehat{CD}$ d'équation $y = \psi\left(x\right).$

- la verticale DA orientèe vers le bas.

On a ainsi :

$$\int_{\Gamma} P\left(x, y\right) dx = \int_{a}^{b} P(x, \varphi\left(x\right))dx + \int_{b}^{a} P(x, \psi\left(x\right))dx$$

car sur les verticales BC et DA, l'élément différentiel dx est nul.

Avec l'intégrale double $\iint\limits_{K} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dxdy$, on a aussi :

$$\boxed{\iint\limits_{K} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dxdy = \int_{a}^{b} \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dy \right) dx = \int_{a}^{b} \left[P(x,y)\right]_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dx}$$

on a :

$$\int_{\Gamma} P\left(x, y\right) dx = -\iint\limits_{K} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dxdy$$

En procédant avec la même approche, on obtient :

$$\int_{\Gamma} Q\left(x, y\right) dy = \iint\limits_{K} \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} dxdy$$

Ce qui donne la formule de **Green- Riemann**.

Application :

Calcul d'une aire plane .

Soit un compact $K \subset \Omega$ dont la frontière Γ soit de classe C^1 par morceaux orientée dans le sens direct , alors on peut calculer l'aire S de K au

moyen de l'une des intégrales curvilignes suivantes :

$$\boxed{S = \tfrac{1}{2}\oint\limits_{\Gamma} xdy - ydx = \oint\limits_{\Gamma} xdy = -\oint\limits_{\Gamma} ydx}$$

Pour faire la démonstration, il suffit d'appliquer la formule de **Green-Riemann**.

$$S = \frac{1}{2}\oint\limits_{\Gamma} xdy - ydx,$$

on a :

$$P(x, y) = -\frac{y}{2} \text{ et } Q(x, y) = \frac{x}{2}$$

$\Longrightarrow$

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = -\frac{1}{2}, \; \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{2}$$

$\Longrightarrow$

$$S = \frac{1}{2}\oint\limits_{\Gamma} xdy - ydx = \iint \left(\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) dxdy = \iint\limits_{K} dxdy$$

Exercices

Exercice 1:

Soit la forme différentielle de degré 1 définie par :

$$\omega = \frac{2x}{y}dx - \frac{x^2}{y^2}dy$$

sur $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ y > 0\right\}$.

- Montrer que ω est fermée sur Ω.
- Montrer que ω est exacte sur Ω
- Trouver une primitive de ω.

Exercice 2 :

Soit la forme différentielle définie par :

$$\omega = \frac{(z+y)\,dx + (z-x)\,dy - (x+y)\,dz}{(y+z)^2}$$

sur une partie E de $\mathbb{R}^2$ ne rencontrant pas le plan d'équation $y+z=0$.

- Montrer que ω est exacte et calculer sa primitive.

Exercice 3 :

Trouver la fonction $f \ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 vérifiant $f(0)=0$ de la forme différentielle exacte ω définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{2xy}{(1+x^2)^2}\mathbf{dx} + \mathbf{f(x)dy}$$

Exercice 4 :

On donne la forme différentielle :

$$\omega(x,y) = \left(x^2 + y^2 + 2x\right) dx + 2ydy$$

- Montrer qu'elle admet un facteur intégrant $\mu\ (x)$.

- Déterminer alors une fonction f (primitive) admettant $\mu\ (x)\, \omega(x,y)$ comme différentielle.

Exercice 5 :

Soit $\varphi \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ avec $\varphi\,(0) = 0$ et le champ de vecteurs :

$$\boxed{\overrightarrow{V} = \left(\left(1 + x^2\right)\varphi\,(x)\,,\ -2xy\varphi\,(x)\,, -z\right)}$$

- Déterminer φ pour que $\overrightarrow{V}$ dérive d'une potentiel $f = f(x,y,z)$ et calculer f.

Exercice 6 :

Soit la forme différentielle :

$$\omega(x,y,z) = 2xzdx - 2yzdy - \left(x^2 - y^2\right) dz$$

- Trouver un facteur intégrant de la forme $f(z)$ ($f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 7 :

- Vérifier les relations suivantes où φ est une fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ et $\overrightarrow{V}\,(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z),\ R(x,y,z))$ un champ de vecteurs :

$$\operatorname{div}\left(\boldsymbol{\varphi}\overrightarrow{V}\right) = \boldsymbol{\varphi}\operatorname{div}\left(\overrightarrow{V}\right) + \overrightarrow{\operatorname{grad}\boldsymbol{\varphi}}.\overrightarrow{V}$$

$$\overrightarrow{Rot\left(\boldsymbol{\varphi}\overrightarrow{V}\right)} = \boldsymbol{\varphi}.Rot\left(\overrightarrow{V}\right) + \overrightarrow{\operatorname{grad}\boldsymbol{\varphi}}\Lambda\overrightarrow{V}$$

Exercice 8 :

- Calculer l'intégrale curviligne $\mathbf{I} = \oint_C y^2dx + x^2dy$ où $\mathbf{C}$ est la courbe fermée définie implicitement par $\mathbf{x^2+y^2-2x = 0}$ et orientée dans le sens trigonométrique.

Exercice 9 :

Soit $\overrightarrow{V}(x,y)$ le champ de vecteurs :

$$\overrightarrow{V}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

- Calculer la ciculation le long du cercle de centre O et de rayon r.

- En déduire que la forme différentielle ω n'est pas exacte.

Exercice 10 :

Calculer l'intégrale curviligne de :

$$\omega = x^2dx - xydy$$

le long des contours suivants :

- le segment de droite OB avec $O(0,0)$ et $B(1,1)$

- l'arc de parabole : $x = y^2$, $0 \leq x \leq 1$, orienté dans le sens des x croissants.

Que peut-on conclure pour la forme ω.

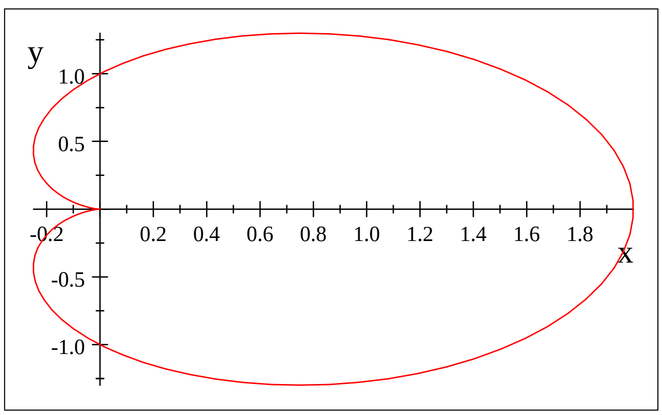
Exercice 11:

Soit la forme différentielle :

$$\boldsymbol{\omega}\,(x,y) = (x+y)\mathbf{dx} + (\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathbf{dy}$$

- Calculer l'intégrale curviligne $\oint\limits_{AB} \omega$ le long de la **demi-cardioïde** d'équation polaire :

$$\rho = 1+\cos\theta \quad \text{pour } \theta = 0 \ et \ \ \theta = \pi :$$



- Calculer l'aire de la **cardioïde .**

- Calculer le périmètre de la **cardioïde .**

Exercice 12 :

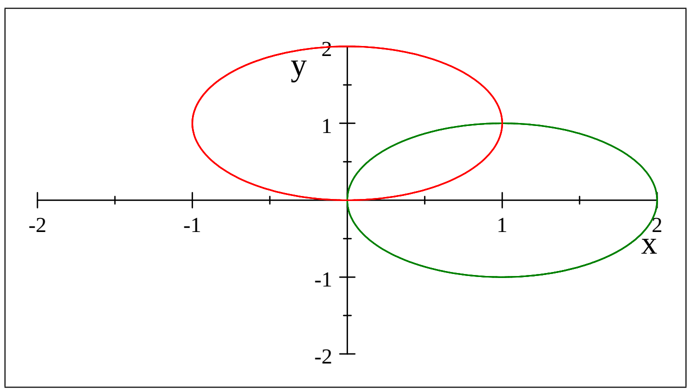
Soit la forme différentielle :

$$\boldsymbol{\omega}\,(x,y) = \mathbf{ydx} + \mathbf{aydy}$$

- Calculer l'intégrale curviligne $\oint_\Gamma \omega$ le long du contour Γ limitant l'intersection des deux disques:

$$x^2 + y^2 - 2x \preceq 0$$

$$x^2 + y^2 - 2y \preceq 0$$



CHAPITRE 5

Examen du 24 mai 2016

Exercice 1:

Soit la fonction f définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{pour} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Montrer que :

$$|f(x,y)| \leq |y|$$

b) Etudier la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}^2$.

c) Calculer : $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}, \ \dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y}$

d) Etudier la différentiabilité de la fonction f en $(0,0)$.

Exercice 2 :

On considère la forme différentielle:

$$\omega(x,y) = 2xdx + \left(x^2 + y^2 + 2y\right) dy$$

i) Montrer que ω n'est pas une forme exacte.

ii) Trouver un facteur intégrant $\psi(y)$ de la forme $\omega(x,y)$.

iii) Trouver une fonction f telle que :

$$df \ (x,y) = \psi(y) . \omega(x,y)$$

Exercice 3 :

Calculer l'aire du domaine D :

$$D = \left\{(x, y) \in R^2, \quad -1 \leq 2x + y \leq 1, -2 \leq 2x - y \leq 2\right\}$$

en effectuant le changement de variables :

$$\begin{aligned} u &= 2x + y \\ v &= 2x - y \end{aligned}$$

SOLUTIONS

Exercice 1:

a) Sachant que :

$$|xy| \leq 2\,|xy| \leq x^2 + y^2$$

$\Longrightarrow$

$$\left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| |y| \leq |y|$$

b) La fonction est continue sur $\mathbb{R}^2 - (0,0)$: opérations sur les fonctions continues .

En $(0,0)$, on a :

$$0 \leq |f(x,y)| \leq |y| \Longrightarrow \underset{(x,y)\longrightarrow(0,0)}{Lim} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

Donc la fonction est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Autre méthode : En utilisant les coordonnées polaires, on a aussi :

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = r\cos\theta\sin^2\theta \Longrightarrow |f(r\cos\theta, r\sin\theta)| \leq r$$

Ce qui donne : $\underset{(x,y)\longrightarrow(0,0)}{Lim} f(x,y) = \underset{r\longrightarrow 0}{Lim}\ f(r\cos\theta, r\sin\theta) = 0.$

c) On a par définition des dérivées partielles **:**

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \underset{x\to 0}{Lim}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \underset{y\to 0}{Lim}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = 0$$

d) Etude de la différentiabilité en $(0,0)$.

Si la fonction f est différentiable en un point (x_0,y_0) ,on doit avoir :

$$\begin{aligned} f(x_0+h_1,y_0+h_2)-f(x_0,y_0) &= \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}h_1+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}h_2+\varepsilon\left(h_1,h_2\right)\left\|(h_1,h_2)\right\| \\ \text{avec} \quad \underset{(h_1,\ h_2)\to(0,0)}{Lim}\varepsilon\left(h_1,h_2\right) &= 0 \end{aligned}$$

Dans notre cas, on a:

$$f(h_1,h_2)-f(0,0)=+\varepsilon\left(h_1,h_2\right)\sqrt{h_1^2+h_2^2}$$

Ce qui donne :

$$\varepsilon\left(h_1,h_2\right)=\frac{h_1h_2^2}{(h_1^2+h_2^2)^{\frac{3}{2}}}$$

avec :

$$\underset{(h_1,\ h_2)\to(0,0)}{Lim}\varepsilon\left(h_1,h_2\right)\neq 0$$

en effet :

$$\varepsilon\left(h_1,h_1\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Ainsi la fonction f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 2 :

i) On a : $\omega\left(x,y\right)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ avec $P(x,y)=2y$ et $Q(x,y)=x^2+y^2+2y$,Ce qui donne :

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=2,\ \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=2x$$

$\Longrightarrow$

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

La forme ω n'est pas une **forme fermée**, ce n'est pas une **forme exacte.**

ii) Facteur intégrant : On a :

$$\psi\left(y\right).\omega\left(x,y\right) = 2x\psi\left(y\right)dx + \left(x^2+y^2+2y\right)\psi\left(y\right)dy$$

avec :

$$\frac{\partial\left(2x\psi\left(y\right)\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\left(x^2+y^2+2y\right)\psi\left(y\right)\right)}{\partial x}$$

Ce qui donne :

$$2x\psi'(y) = 2x\psi(y) \Longrightarrow \psi'(y) = \psi(y) \Longrightarrow \psi(y) = ke^y$$

d'où : $\quad \psi\left(y\right).\omega\left(x,y\right) = 2xe^y dx + \left(x^2+y^2+2y\right)e^y dy$

iii) Calcul d'une primitive de $\psi\left(y\right).\omega\left(x,y\right)$:

Soit une fonction à deux variables f telle que :

$$df = 2xe^y dx + \left(x^2+y^2+2y\right)e^y dy$$

d'où l'on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xe^y \ . \qquad (1)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \left(x^2+y^2+2y\right)e^y \ . \qquad (2)$$

En intégrant l'équation (1) ,on obtient :

$$f(x,y) = x^2 e^y + C(y) \quad (3)$$

En calculant la dérivée partielle de la fonction f par rapport à la variable y , on obtient :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 e^y + C'(y) = \left(x^2 + y^2 + 2y\right) e^y$$

$\Longrightarrow$

$$C'(y) = \left(y^2 + 2y\ \right) e^y$$

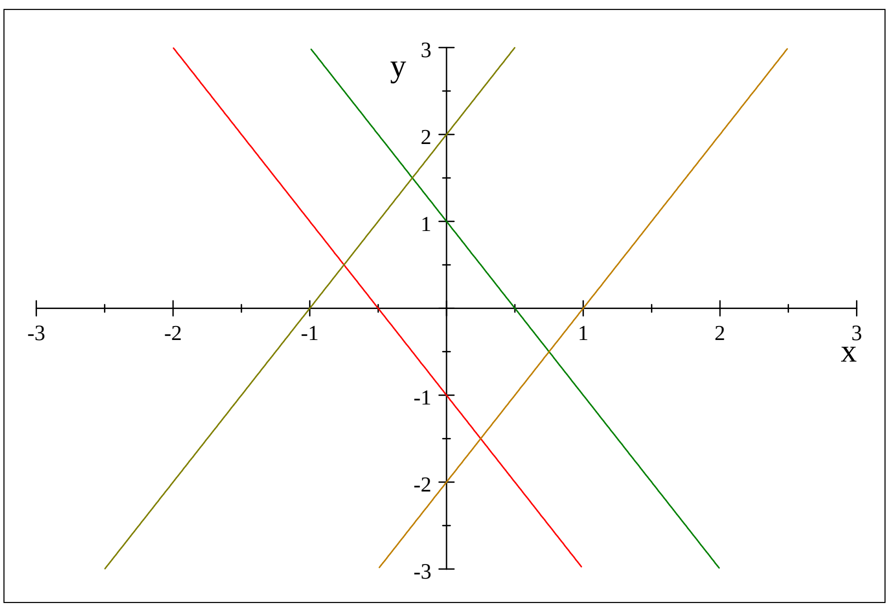
$\Longrightarrow$

$$C(y) = y^2 e^y + k$$

d'où :

$$f(x,y) = \left(x^2 + y^2\right) e^y + k$$

Exercice 3 :



On commence par trouver les expressions des anciennes variables x et y par rapport aux nouvelles variables u et v.

$$x\,(u,v)=\frac{u+v}{4},\;\; y(u,v)=\frac{u-v}{2}$$

On a alors l'application vectorielle :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (u,v) & \longrightarrow & \left(\frac{u+v}{4},\frac{u-v}{2}\right) \end{array}$$

On calcule alors le jacobien de cette application :

$$j=\begin{vmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}=-\frac{1}{4}$$

$\Longrightarrow$

$$Aire\,(D)=\iint\limits_{D} dxdy=\int\int\limits_{\mathrm{Im}(D)}\frac{dudv}{4}=\frac{1}{4}\int\limits_{-1}^{1}du\int\limits_{-2}^{2}dv=2$$

Autre méthode pour calculer l'aire d'un domaine plan :

On utilise la formule suivante :

$$Aire\,(D)=\frac{1}{2}\oint\limits_{\partial D} xdy-ydx=\oint\limits_{\partial D} xdy=-\oint\limits_{\partial D} ydx$$

On commence par calculer les coordonnées des sommets du parallélogramme :

$$A=\left(\frac{1}{4},-\frac{3}{2}\right),\;\; B=\left(\frac{3}{4},-\frac{1}{2}\right),\;\; C=\left(-\frac{1}{4},\frac{3}{2}\right),D=\left(-\frac{3}{4},\frac{1}{2}\right)$$

$$Aire\,(D) = \oint\limits_{\partial D} xdy = \int\limits_{AB} xdy + \int\limits_{BC} xdy + \int\limits_{CD} xdy + \int\limits_{DA} xdy$$

Pour AB, on est sur la droite d′équation $y = 2x - 2$.

$$\int\limits_{AB} xdy = \int\limits_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} 2xdx = \frac{1}{2}$$

Pour BC, on est sur ladroite d'équation $y = -2x + 1$.

$$\int\limits_{BC} xdy = -\int\limits_{\frac{3}{4}}^{-\frac{1}{4}} 2xdx = \frac{1}{2}$$

Pour CD, on est sur la droite d'équation $y = 2x + 2$.

$$\int\limits_{-\frac{1}{4}}^{-\frac{3}{4}} 2xdx = \frac{1}{2}$$

et pour DA, on est sur la droite d'équation $y = -2x - 1$.

$$-\int\limits_{-\frac{3}{4}}^{\frac{1}{4}} 2xdx = \frac{1}{2}$$

En conclusion, on obtient :

$$Aire(D) = 2$$

Autre méthode :

utilisation du produit vectoriel .

on a :

$$\overrightarrow{AB} = \left(\frac{1}{2}, 1\right),\ \overrightarrow{AD} = (-1, 2)$$

$\Longrightarrow$

$$\overrightarrow{AB}. \wedge \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2\,\overrightarrow{k}$$

et l'on ainsi : $\quad Aire\ (D) = \left\| \overrightarrow{AB}. \wedge \overrightarrow{AD} \right\| = 2.$

Examen du 16 juin 2009

Exercice 1 :

Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = (2x - y + 5)^2 + (x - 3y)^2 + 1$$

- Calculer les dérivées partielles du premier ordre.

- Déterminer les extrémas de la fonction donnée (points critiques et valeur des extrémas .

- Donner l'expression de la différentielle df au point $(1, 2)$.

Exercice 2

En utilisant le changement de variables :

$$x = ar\cos\theta, \quad y = br\sin\theta$$

calculer l'intégrale double :

$$I = \iint\limits_{D} \left(y^2 - 2x\right) dxdy$$

où le domaine **D** est défini comme suit :

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \succeq 0,\ y \succeq 0,\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$$

(Faire un dessin du domaine **D**).

Exercice 3

On donne sur $\mathbb{R}^2 - \{0,0\}$, le champ de vecteurs :

$$\overrightarrow{V(x,y)} = (P(x,y), Q(x,y)) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

a) Calculer, pour tout cercle centré à l'origine $\mathbb{C}(0,\rho)$, l'intégrale curviligne :

$$\oint_{\mathbb{C}(0,\rho)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

b) Soit la forme différentielle : $\boldsymbol{\omega} = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$.

- Montrer que $\boldsymbol{\omega}$ est une forme différentielle fermée, est ce qu'elle est exacte ?.

- Calculer une primitive de $\boldsymbol{\omega}$ sur $\mathbb{R}^2$ privé de la demi-droite $\{x \leq 0,\ y = 0\}$.

c) Calculer la circulation du champ de vecteurs $\overrightarrow{V}(x,y)$ le long du carré Ω de sommets $A(1,0)$, $B(2,0)$, $C(2,1)$, $D(1,1)$ décrit dans le sens direct.

SOLUTIONS

Exercice 1:

1) $f(x,y) = (2x - y + 5)^2 + (x - 3y)^2 + 1$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2.2\,(2x - y + 5) + 2\,(x - 3y) = 10x - 10y + 20 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= -2\,(2x - y + 5) - 2.3\,(x - 3y) = -10x + 20y - 10\end{aligned}$$

2) **Points critiques** : Les points critiques sont les solutions du sytème :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 10x - 10y + 20 \ = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -10x + 20y - 10 = 0 \end{cases} \Longrightarrow x = -3,\ y = -1$$

Nature du point critique:

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-3,-1) = 10, \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-3,-1) = 20,$$

$$s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,2) = -10 \Longrightarrow:\ s^2 - rt = -100\ < 0,$$

avec $r > 0$, c'est un minimum.Et le minimum est égal à : $f(-1,-3) = 1$.

Autre méthode : La solution est évidente, on a la somme de deux carrés plus 1, ainsi la valeur minimale de la fonction donnée est égale à 1

avec:

$$2x - y + 5 = 0 \ et \ x - 3y = 0 \Longrightarrow x = -3,\ y = -1.$$

3) $df_{(1,2)} = 10\ dx + 20\ dy.$

Exercice 2 :

On commence par calculer le jacobien du changement de variables .

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & br\cos\theta \end{vmatrix} = abr$$

Calcul de l'intégrale :

$$\begin{aligned} I = \iint_D \left(y^2 - 2x\right) dxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \left(b^2 r^2 \sin^2\theta - 2ar\cos\theta\right) abrdrd\theta \\ &= ab^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^3 \frac{1-\cos 2\theta}{2} drd\theta - 2a^2 b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^2 \cos\theta drd\theta \\ &= \frac{ab^3}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2\theta)\, d\theta - \frac{2a^2 b}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta = \frac{ab^3\pi}{16} - \frac{2a^2 b}{3}. \end{aligned}$$

Autre méthode : Utilisation de la formule de **Green-Riemann :**

$$I = \iint_D \left(y^2 - 2x\right) dxdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \oint_\Gamma Pdx + Qdy$$

On commence par chercher P et Q tels que :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = y^2\ et\ \frac{\partial P}{\partial y} = 2x$$

On peut prendre par exemple : $\mathbf{Q(x, y) = xy^2}\quad et \quad P(x, y) = 2xy.$

Le domaine **D** étant l'intérieur d'un quart d'une ellipse, on décompose le bord Γ comme suit : $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ avec :

$$\Gamma_1 = \{x = 0,\ 0 \leq y \leq b\}\,,$$

$$\Gamma_2 = \left\{x = a\cos\theta,\ y = b\sin\theta,\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right\},\ \Gamma_3 = \{y = 0,\ 0 \leq x \leq a\}\,.$$

Sur Γ_1 et Γ_3, l'intégrale curviligne est nulle.

Ainsi :

$$\begin{aligned}
I &= \oint_{\Gamma_3} 2xydx + xy^2dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-2a^2b\cos\theta\sin^2\theta + ab^3\cos^2\theta\sin^2\theta\right) d\theta \\
&= -2a^2b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta d(\sin\theta) + \frac{ab^3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(2\theta)\, d\theta \\
&= -\frac{2a^2b}{3} + \frac{ab^3}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2\theta)\, d\theta = -\frac{2a^2b}{3} + \frac{ab^3\pi}{16}
\end{aligned}$$

Exercice 3

a) L'intégrale curviligne porte sur un cercle centré à l'origine, on utilise alors les coordonnées polaires :

$$\begin{aligned}
x &= \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta \\
J &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\rho\sin\theta}{\rho^2}(-\rho\sin\theta)\, d\theta + \frac{\rho\cos\theta}{\rho^2}(\rho\cos\theta)\, d\theta\right) = 2\pi
\end{aligned}$$

b) Soit :

$$P(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} \Longrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \implies \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

La forme différentielle ω est donc une forme fermée mais elle n'est pas une forme exacte car son domaine de définition $\mathbb{R}^2 - \{0,0\}$ n'est pas

un domaine étoilé.

Calcul d'une primitive de ω :

Soit $F(x,y)$ une primitive de :

$$\omega \implies \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

d'où :

$$F(x,y) = Arctg\left(\frac{y}{x}\right) + c(x)$$

$\implies$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2} + c'(x)$$

$\implies$

$$c'(x) = 0 \implies c(x) = k$$

et

$$F(x,y) = Arctg\left(\frac{y}{x}\right) + k$$

c) Le chemin d'intégration Ω se trouvant dans un domaine étoilé la forme est alors exacte donc la circulation est égale à zéro :

$$\oint_{\Omega} Pdx + Qdy = 0.$$

Examen du 28 juin 2009

Exercice 1 :

Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\boxed{f(x,y) = x^3 + y^3 - 3\left(x^2 - y^2\right)}$$

$a)$ Calculer les dérivées partielles du premier ordre.

$b)$ Déterminer les points critiques de la fonction donnée.

$c)$ Calculer les dérivées partielles du secon ordre.

$d)$ Donner la nature des points critiques.

Exercice 2 :

Calculer l'intégrale curviligne :

$$\boxed{\oint_{\mathbb{C}(0,1)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \oint_{\mathbb{C}(0,1)} \left(x^3 - y\right)dx + (x+y)\,dy}$$

le long du cercle trigonométrique parcouru dans le sens direct :

$$\mathbb{C}(0,1) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1\right\}$$

(Faire un dessin du cercle $\mathbb{C}(0,1)$).

Exercice 3

Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par:

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \quad si \ \ (x,y) \neq (0,0) \quad et \ f(0,0) = 0$$

- Quel est le domaine de définition de f.

- Etudier la continuité de la fonction donnée à l'origine.

- Montrer que f est continue en $(0, 0\ )$séparément par rapport à chacune des variables.

- Montrez que les dérivées partielles $\dfrac{\partial f\,(0,0)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f\,(0,0)}{\partial y}$existent, puis calculez-les.

SOLUTIONS

Exercice 1 :

1) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3\left(x^2 - y^2\right)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 3x^2 - 6x \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 3y^2 + 6y \end{aligned}$$

2) **Points critiques** : Les points critiques sont les solutions du sytème

$$\begin{aligned} 3x\left(x-2\right) &= 0 \\ 3y(y+2) &= 0 \end{aligned}$$

Ce qui nous donne 4 points critiques :

$$O\left(0,0\right),\ A\left(2,0\right),\ B\left(0,-2\right)\ \ et\ C\left(2,-2\right)$$

Dérivées partielles du second ordre :

$$\begin{aligned} r &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x - 6, t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6y + 6, \\ s &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0\ . \end{aligned}$$

3) **Nature des points critiques** :

$*$ L′origine $\mathbf{O}(0,0)$:

$$r=-6, \quad t=6, \ s=0 \Longrightarrow: \ s^2-rt=36 \ >0,$$

O est un point stationnaire.

$*$ Le point **A** :

$$r=6, \quad t=6, \ s=0 \Longrightarrow: \ s^2-rt=-36 \ <0,$$

avec $r>0$, on a un minimum .

$*$ Le point **B** :

$$r=-6, \quad t=-6, \ s=0 \Longrightarrow: \ s^2-rt=-36 \ <0,$$

avec $r<0$, on a un maximum

$*$ Le point **C** :

$$r=6, \quad t=-6, \ s=0 \Longrightarrow: \ s^2-rt=36 \ >0,$$

C est un point stationnaire .

Exercice 2

On commence par séparer l'intégrale comme suit :

$$I = \oint\limits_{\mathbb{C}(0,1)} \left(x^3 - y\right) dx + (x+y)\, dy = \oint\limits_{\mathbb{C}(0,1)} x^3 dx + ydy + \oint\limits_{\mathbb{C}(0,1)} -ydx + xdy$$

Ce qui nous permet de voir que la première intégrale est nulle, car la forme diffiréntielle :

$$\omega = x^3 dx + ydy$$

est une forme exacte sur $\mathbb{R}^2$. Pour le calcul de la deuxième intégrale sur le cercle trigonométrique on pose : $x = \cos\theta,\ y = \sin\pi$, ce qui donne :

$$I = \int\limits_0^{2\pi} \left[-\sin\theta\,(-\sin\theta)\, d\theta + \cos\theta\,(\cos\theta)\, d\theta\right] = \int\limits_0^{2\pi} \left[\sin^2\theta + \cos^2\theta\right] d\theta = \int\limits_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

Exercice 3

a) Le domaine de définition est égal à $\mathbb{R}^2$

b) En posant :

$$x = r\cos\theta \ et\ y = r\sin\theta,$$

on a :

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2} = \cos\theta\sin\theta$$

d'où :

$$\underset{r\to 0}{Lim} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \cos\theta\sin\theta$$

ainsi la fonction donnée n'a pas de limite à l'origine donc il y discontinuité à l'origine.

c) On a :

$$\begin{aligned} f(x,0) &= 0 \ et \ f(0,0)=0 \\ \underset{x\to 0}{Lim} f(x,0) &= f(0,0)=0 \end{aligned}$$

La fontion $f(x,0)$ est continue à l'origine, il en est de même pour la fonction $f(0,y)=0$.

d) On a par défintion de la dérivée partielle par rapport à la variable x :

$$\frac{\partial f\,(0,0)}{\partial x} = \underset{x\to 0}{Lim}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}$$

Sachant que : $f(x,0)=$ 0 sur $\mathbb{R}$, la fonction est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\dfrac{\partial f\,(0,0)}{\partial x}=0$.

On fait le même raisonnement pour la fonction $f(0,y)=0$ avec $\dfrac{\partial f\,(0,0)}{\partial y}=0$.

Examen du 31 mai 2011

Exercice 1 :

Soit la forme différentielle :

$$\omega = \frac{ydx - xdy}{xy}$$

définie sur le domaine $\mathbf{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 0,\ y > 0\right\}$.

- Montrer que ω est une forme différentielle fermée . Est ce qu'elle est exacte ?
- Calculer une primitive de ω sur $\mathbf{D} = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 2 :

Soit f et g les deux fonctions définies par :

$$f(x) = x^2 \text{ et } g(x) = 2 - x^{3.}.$$

- Tracer sur le même repère orthonormé les courbes Γ et Ω des deux fonctions .
- Calculer avec deux méthodes différentes **l'aire** du domaine limité par $x = 0$, $x = 1$ et les courbes Γ et Ω.

Exercice 3 :

Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2}, \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \;\; \text{si} \;\; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Montrer que la fonction f est continue à l'origine.

b) Calculer les dérivées partielles du premier ordre sur $\mathbb{R}^2$.

c) Etudier la différentiabilité de la fonction f à l'origine.

d) Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ .Que peut-on conclure.

SOLUTIONS

Exercice 1:

$$P(x,y)=\frac{1}{x},\ Q(x,y)=-\frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=0,$$

la forme différentielle ω est fermée comme D est simplement connexe, elle est donc exacte.

Calcul de la primitive

Soit la fonction f telle que :

$$df=\omega \implies \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{x}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{1}{y}$$

$\Longrightarrow$

$$f(x,y)=\ln x+C(y)$$

$\Longrightarrow$

$$C'(y)=-\frac{1}{y}$$

$\Longrightarrow$

$$C(y) = \ln\left(\frac{1}{y}\right) + k$$

Finalement; on obtient :

$$f(x,y) = \ln\frac{Ax}{y}.$$

Exercice 2 :

$$A = \iint_D dxdy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{2-x^3} dy\right) dx = \int_0^1 \left[2 - x^3 - x^2\right] dx = \left[2x - \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{17}{12}$$

$$A = -\oint y dx = -\int_0^1 x^2 dx - \int_1^0 \left(2 - x^3\right) dx = -\frac{1}{3} + 2 - \frac{1}{4} = \frac{17}{12}$$

Exercice 3 :

a) Par majoration :

$$|f(x,y)| = \left|xy\frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2}\right| \leq |xy|$$

Coordonnées polaires :

$$|f(x,y)| \leq r^2 \left|\cos\theta \sin\theta \left(\sin^2\theta - \cos^2\theta\right)\right|$$

donc :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| = 0$$

b)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= y\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2} - y\frac{4x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= x\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2} + x\frac{4x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}
\end{aligned}$$

Les dérivée partielles premières sont continues sur $\mathbb{R}^2 - \{0,0\}$.

Etude à l'origine

Par majoration :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leq |y|\left|\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}\right| + |2y|\left|\frac{2x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right| \leq 3\,|y|$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leq 3\,|x|$$

Coordonnées polaires :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(r,\theta) = r\sin\theta\left[\sin^2\theta - \cos^2\theta - 4\cos^2\theta\sin^2\theta\right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(r,\theta) = r\cos\theta\left[\sin^2\theta - \cos^2\theta + 4\cos^2\theta\sin^2\theta\right]$$

Donc :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0\ .$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0\ = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\ \ ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\ \ .$$

La fonction est de classe $C^1\left(\mathbb{R}^2\right) \Longrightarrow$ elle est différentiable sur $\mathbb{R}^2$

c)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2} - y\frac{4x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{y} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2} + x\frac{4x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,0) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} -\frac{x}{x} = -1\ .$$

Donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)\ ,$$

D'aprés le Théorème de **Schwarz;** les fonctions $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\,,\ \ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)$ ne sont pas continues à l'origine.

Examen du 5 juin 2016

Exercice 1:

Soit la fonction f définie par :

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^4}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{pour } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

- Etudier la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}^2$.

- Calculer : $\overrightarrow{\nabla f(x,y)} = \overrightarrow{\mathrm{grad}\, f(x,y)}$ pour $(x,y)\neq(0,0)$ puis calculer $\overrightarrow{\nabla f(0,0)} = \overrightarrow{\mathrm{grad}\, f(0,0)}$.

- La fonction est-elle de classe $C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$.

Exercice 2 :

Etudier de deux manières différentes la nature du point critique de la fonction $f(x,y)$ définie par :

$$f(x,y)=x^2+y^2-4x+y$$

Dire si c'est un extremum local ou global.

Exercice 3 :

Soient :

Les quatre points suivants : $A(0,-1), B(-1,-1), C(1,0)$ et $D(0,1)$.

Γ le contour fermé $OABCDO$.

CD l'arc du cercle de centre O et r.

AB, BC,et DA des segments de droite .

- Calculer avec trois méthodes, l'intégrale curviligne suivante :

$$\oint_{\Gamma} (2x - y)\, dx + (x + 3y)\, dy$$

Examen du 18 juin 2016

Exercice 1 :

Soit la fonction f définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y + 3y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{pour } \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Montrer que pour $(x,y) \neq (0,0)$: $|f(x,y)| \leq 4\,|y|$

b) La fonction f est-elle continue en $(0,0)$.

c) Calculer $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}, \dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y}$.

d) Etudier la différentiabilté de la fonction f en $(0,0)$.

Exercice 2 :

Soit la fonction $f(x,y)$ définie par :

$$f\,(x,y) = x^4 + y^4 - 2\,(x-y)^2$$

a) Trouver ses points critiques.

b) Etudier la nature de ces points critiques.

c) Montrer que l'on a, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$x^2 + y^2 \succeq \frac{(x-y)^2}{2}$$

En déduire que :

$$f(x,y) \succeq -8$$

Que peut-on conclure ?

Exercice 3 :

Soit D le domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$D = \left\{(x, y) \in R^2,\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\quad x^2 + y^2 \geq 1\right\}$$

- Calculer avec trois méthodes différentes, l'aire de D.

SOLUTIONS

Exercice 1:

a)

$$|f(x,y)| = \left|\frac{x^2y+3y^3}{x^2+y^2}\right| = \frac{\left|x^2y+3y^3\right|}{|x^2+y^2|}$$

$$\leq |y| \frac{x^2}{|x^2+y^2|} + 3|y| \frac{y^2}{|x^2+y^2|} \leq 4|y|.$$

b) La fonction est continue en $(0,0)$ car : $\underset{(x,y)\to(0,0)}{Lim} f(x,y) = f(0,0) = 0$

En effet : $0 \leq \underset{(x,y)\to(0,0)}{Lim} |f(x,y)| \leq \underset{y\to 0}{Lim} 4|y| = 0 = f(0,0)$

c) On a :

$$f(x,0) = 0 \Longrightarrow \frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = 0$$

et

$$f(0,y) = 3y \Longrightarrow \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 3$$

d) Pour l'étude de la différentiabilité à l'origine, on peut écrire ce qui suit :

$$f(x,y) - f(0,0) = 3y + \varepsilon(x,y)\sqrt{x^2+y^2}$$

Ce qui donne :

$$\varepsilon(x,y) = \frac{x^2y+3y^3-3y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

avec la fonction ε qui n'a pas de limite en $(0,0)$. La fonction f **n'est pas différentiable** en $(0,0)$.

Exercice 2 :

a)

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 4x^3 - 4\left(x-y\right) = 0 \Longrightarrow x^3 - \left(x-y\right) = 0 \quad ..... (1)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 4y^3 + 4\left(x-y\right) = 0 \Longrightarrow y^3 + \left(x-y\right) = 0 \;.... (2)$$

$\Longrightarrow$

$$x^3 + y^3 = 0$$

$\Longrightarrow$

$$\left(x+y\right)\left(x^2 - xy + y^2\right) = 0$$

$\Longrightarrow$

$$x = -y$$

En reportant cette égalité dans l'équation (1) , on obtient :

$$x^3 - 2x = 0 \Longrightarrow x\left(x^2-2\right) = 0 \Longrightarrow x = 0, x = \sqrt{2}, x = -\sqrt{2}$$

On a ainsi trois points critiques :

$$\left(0,0\right),\ \left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right), \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$$

b) Nature des points critiques :

Pour l'origine $(0,0)$,on a $f(0,0) = 0$:

$$f(x,0) = x^4 - 2x, \quad f(x,0) \approx -2x$$

Pour $x \approx 0, \quad f(x,0)$ change de signe, donc l'origine est un **point selle.**

Pour les deux autres points, on calcule les dérivées partielles d'ordre deux :

$$f\left(x,y\right) = x^4 + y^4 - 2\left(x-y\right)^2$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 12x^2 - 4,\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 12y^2 - 4,\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = 4$$

Ce qui donne pour les deux points :

$$\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right), \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$$

$$r = 20, s = 4\ et\ \ t = 20$$

$\Longrightarrow$

$$s^2 - rt = -396 < 0$$

$\Longrightarrow$

on a un extremum .

$r > 0$

$\Longrightarrow$

les deux points donnent des minima .

c) on a :

$$\left(x+y\right)^2 \geq 0 \Longrightarrow x^2 + y^2 \geq -2xy$$

$\Longrightarrow$

$$2x^2 + 2y^2 \geq x^2 - 2xy + y^2$$

Ce qui donne l'inégalité demandée :

$$x^2 + y^2 \succeq \frac{(x-y)^2}{2}$$

Pour montrer que : $f(x, y) \succeq -8$

c'est à dire :

$$x^4 + y^4 - 2\,(x-y)^2 \geq -8$$

On commence par faire une minoration de $f(x, y)$.

$\Longrightarrow$

$$f(x, y) \geq x^4 + y^4 - 4\left(x^2 + y^2\right) = x^4 - 4x^2 + y^4 - 4y^2 = \left(x^2 - 2\right)^2 + \left(y^2 - 2\right)^2 - 8$$

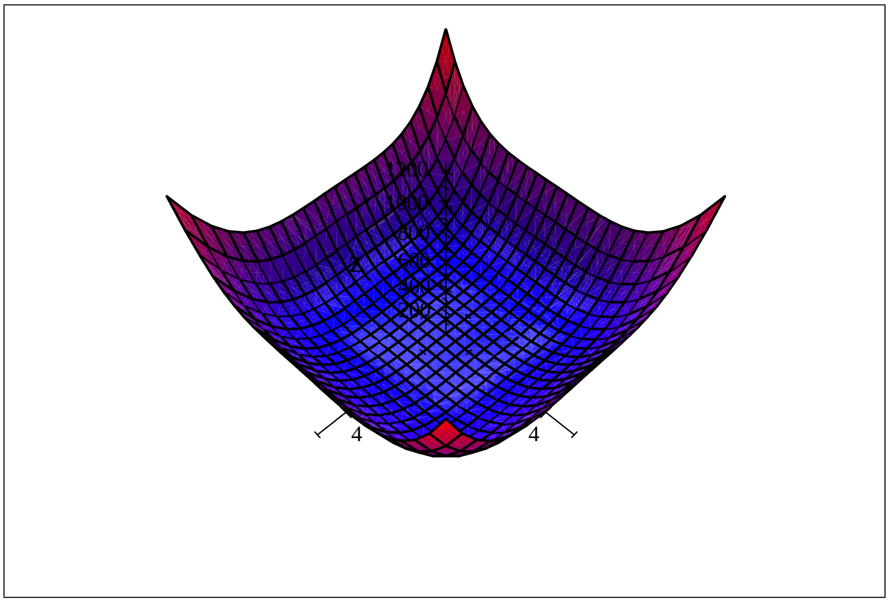
$\Longrightarrow$

$$f(x, y) + 8 \geq \left(x^2 - 2\right)^2 + \left(y^2 - 2\right) \geq 0,$$

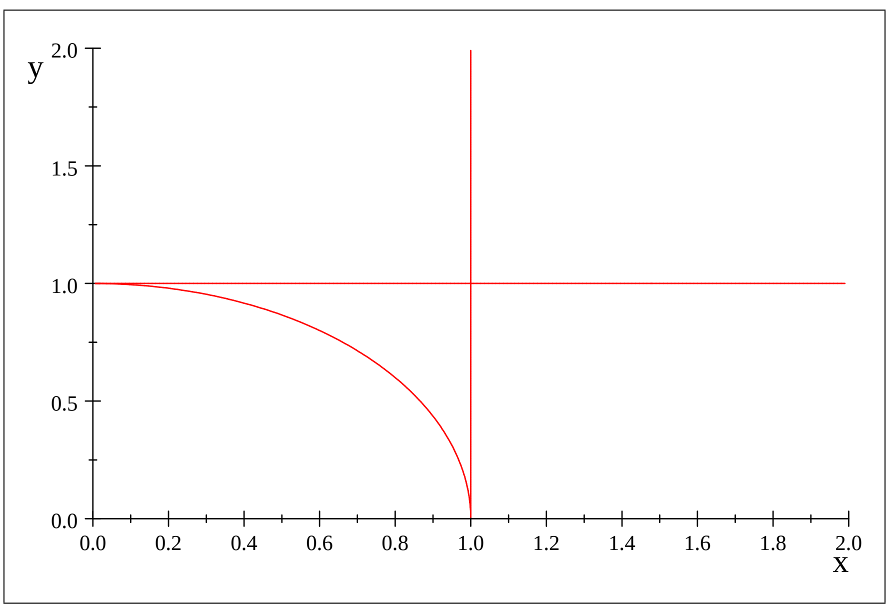
donc on obtient l'inégalité :

$$f(x, y) \succeq -8 = f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}),\ \forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2$$

On a alors un **minimum global :**



Exercice 3 :



Méthode 1:

L'aire du domaine est égale à l'aire du carré de coté 1 moins

l'aire du quart de cercle de rayon 1, d'où :

$$S = 1 - \frac{\pi}{4}$$

Méthode 2 :

On utilise l'intégrale double :

$$S = \iint_D dxdy = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^1 dy \right) dx = \int_0^1 \left[1 - \sqrt{1-x^2}\right] dx$$

$$= 1 - \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

On fait un changement de variable :

on pose : $x = \sin t$.

Ce qui donne :

$$S = 1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt = 1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt$$

$$S = 1 - \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

Méthode 3 :

On utilise l'intégrale curviligne : $A = \oint_\Gamma x dy$.

Γ étant la frontière du domaine D décrite dans le sens positif , ce qui donne :

$$S=\oint_{\Gamma} xdy=\int_{AB} xdy+\int_{BC} xdy+\int_{\widehat{CB}} xdy$$

avec : $A=(1,0)$, $B=(1,1)$, $C=(0,1)$ et $\widehat{BC}$ l'arc de cercle

Sur AB, y varie de 0 à 1 et $x=1 \Longrightarrow$

$$\int_{AB} xdy=\int_0^1 dy=1.$$

Sur BC, x varie de 1 à 0, et $y=1 \Longrightarrow$

$$\int_{BC} xdy=0.$$

Sur l'arc cercle CB, on a : $x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$ et θ varie de : $\frac{\pi}{2}$ à 0 : D'où

:

$$\int_{\widehat{CB}} xdy=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos\theta.\cos\theta d\theta=-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 tdt=-\frac{\pi}{4}$$

et l'aire du domaine D est égale à :

$$S=1-\frac{\pi}{4}.$$

FIN

1

TABLE DE MATIERES

CHAPITRE 1 : Espaces vectoriels :

Définitions :..**01.**

Exercices :...**06.**

2 : CHAPITRE 2 : Fonctions différentiables :

Définitions :..**10.**

Exercices :...**20**.

3 : CHAPITRE 3 : Extrémas d'une fonction différentiable :

Définitions : ....**24.**

Exercices :...**28**.

4 : CHAPITRE 4 : Formes différentielles .Intégrales curvilignes:

Définitions :..**30.**

Exercices :...**38**.

5 : CHAPITRE 5 : Sujets d'examens corrigés :..**43**.