**CHAPITRE 1**

**Séries numériques**

Lorsque l'on étudie une suite de nombres réels ou complexes $(u_n)_{n \in IN}$ il est naturel de sommer les $n$ premiers termes et de voir si cette nouvelle suite a elle même une limite ou non. On a ainsi la notion de série.

# Somme d'une série

Soit donnée une suite de nombres réels ou complexes $(u_n)_{n \in IN}$ .A partir de cette suite, on définit une nouvelle suite $(\mathbf{S}_n)_{n \in IN}$ en posant :

$$\mathbf{S}_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + ....... + u_n$$

On s'intéresse alors au cas où les sommes partielles forment une suite convergente.Si la série est convergente, la suite $(S_n)_{n \in IN}$ converge donc vers 0.

# Conditions nécessaires de convergence

Le meilleur exemple est donné par **la série harmonique** dont le terme général est le suivant

$$u_n = \frac{1}{n}$$

avec comme somme partielle d'ordre n :

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + .......... + \frac{1}{n}$$

**Expérimentation :** On utilise une calculatrice pour évaluer les premières sommes partielles.On constate que la suite est croissante avec un croissance assez lente.Mais on fait une grosse erreur d'appréciation en supposant que la série est convergente.

| *valeur de n* | *valeur de $S_n$* | *valeur de n* | *valeur de $S_n$* |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 11 | 3.019877345 |
| 2 | 1.5 | 12 | 3.103210678 |
| 3 | 1.833333333 | 13 | 3.180133755 |
| 4 | 2.083333333 | 14 | 3.251562327 |
| 5 | 2.283333333 | 15 | 3.318228993 |
| 6 | 2.45 | 16 | 3.380728993 |
| 7 | 2.592857143 | 17 | 3.439552523 |
| 8 | 2.71857143 | 18 | 3.495108078 |
| 9 | 2.828968254 | 19 | 3.547739657 |
| 10 | 2.928968254 | 20 | 3.597739657 |

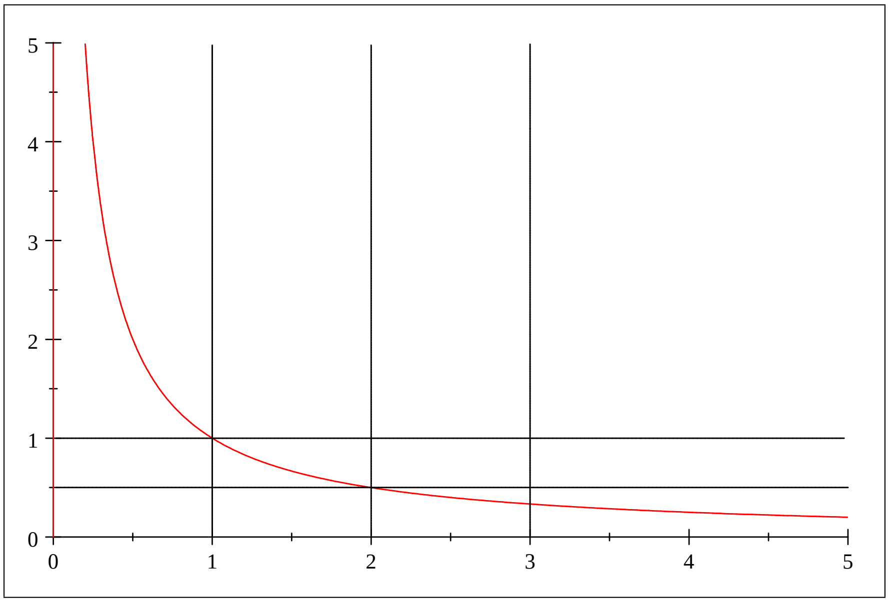
En vérité, notre supposition est totalement fausse, la série harmonique diverge

| *valeur de n* | *valeur de $S_n$* |
|---|---|
| 10 | 2.928968254 |
| 100 | 5.187377518 |
| 1000 | 7.485470861 |
| 10000 | 9.787506036 |
| 100000 | 12.09014613 |
| 1000000 | 14.39272672 |

En évaluant des sommes partielles avec un ordre de plus en plus grand, on constate que la suite est croissante et non bornée.

Nous considèrons le graphe de l'hyperbole équilatère dans un repère orthonormé xoy.

$y = \dfrac{1}{x}$




Graphe

Nous comparons la somme des aires des surfaces rectangulaires supérieures à la courbe, et la surface limitée par la courbe, l'axe des x et les verticales d'abscisses : $x = 1, x = n + 1$.On a alors l'inégalité :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ...... + \frac{1}{n} > \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \log (n + 1)$$

Ce qui nous permet d'avoir :

$$S_n > \log(n + 1)$$

Par passage à la limite, on a :

$$\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$$

**Exemple fondamental : Les séries géométriques**

Considérons la série :

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + ....... + ar^{n-1} + .......$$

On a ainsi une progression géométrique de premier terme $a \neq 0$ et de raison $r$. La somme des $n$ premiers termes de la progression géométrique (lorsque $r \neq 1$) est égale à :

$$S_n = \frac{a - ar^n}{1-a}$$

- Si $|r| \prec 1$, $r^n \to 0$ lorsque $n \to \infty$, la série est convergente et sa somme est égale à :

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \frac{a}{1-r}$$

- Si $|r| \succ 1$, $r^n \to \infty$ lorsque $n \to \infty$ et par conséquent

$$\frac{a - ar^n}{1-a} \to \pm\infty \; .$$

Lorsque $|r| \succ 1$ la série géométrique est divergente .

- Si $r = 1$, la série devient

$$a + a + a + a ...... + a .....$$

Ce qui donne

$$S_n = na, \quad \lim_{n\ \to\infty} S_n = \infty$$

La série diverge.

- Si $r = -1$, on a la série suivante :

$$a - a + a - a + .......$$

avec

$$S_n = \begin{cases} 0 & \text{si n est pair} \\ a & \text{si n est impair} \end{cases}$$

La suite $(S_n)_{n\in IN}$ n'a pas de limite. La série diverge.

**Critères de convergence des séries à termes positifs ,**
**Comparaison de séries** , **Régle de D′Alembert ,**
**Régle de Gauchy,Comparaison avec une intégrale**,
**Séries alternées** , **Critère de Leibniz .**

Soient deux séries à termes positifs

$$u_1 + u_2 + .......... + u_n + ............ \quad (1)$$
$$v_1 + v_2 + ........... + v_n + ........... \quad (2)$$

**Si les termes de la série** (1) **sont majorés par les termes correspondants de la série** (2)**, c'est à dire que**

$$u_n \preccurlyeq v_n (n = 1, 2, 3.......) \qquad (3)$$

**et si** $(2)$ **converge, la série** $(1)$ **converge aussi.**

On désigne par $s_n$ et $\sigma_n$ les sommes partielles d'ordre $n$ des deux séries

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} u_i \qquad \sigma_n = \sum_{i=1}^{n} v_i$$

De la condition d'inégalité du théorème, on a

$$s_n \preccurlyeq \sigma_n$$

Sachant que la série (2) converge, on a

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$$

ce qui donne par déduction

$$s_n \preccurlyeq \sigma$$

La suite $s_n$ est donc bornée, les termes de la série (1) étant positifs, la série est en même temps croissante.
Conclusion la première série est convergente.Si les termes de la série (1) sont minorés par les termes correspondants de la série (2)

$$u_n \succeq v_n (n = 1, 2, 3.......)$$

et si la série (2) diverge, la série (1) diverge aussi.

# Régle de D'Alembert

**Si dans une série à termes positifs**

$$u_1 + u_2 + .......... + u_n + ............$$

**Le rapport** $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ **a une limite finie** $l$ **lorsque n tend vers l'infini.**

$$\underset{n\ \to\ \infty}{Lim} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$$

**1) la série converge lorsque** $l \prec 1$.

**2) la série diverge lorsque** $l \succ 1$.

**3) Si** $l = 1$, **on ne peut rien conclure.**

1) $l \prec 1$ : Soit le nombre $r$ tel que $l < r < 1$.

Comme $\underset{n\ \to\ \infty}{Lim} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$, il existe alors un $N$ tel que pour tout $n > N$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < r \Longrightarrow u_{n+1} < r\ u_n$$

Par itération, on a

$$\begin{aligned} u_{N+1} &< r\ u_N \\ u_{N+2} &< r\ u_{N+1} < r^2\ u_N \\ u_{N+3} &< r\ u_{N+2} < r^3\ u_N \\ & \dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Soient alors les deux sériesLa série est une progression géométrique de raison $r < 1$, elle est convergente, comme
la série (2) majore la série (1) à partir du rang $N$, d'aprés le théorème précédent la série ( 1) est alors convergente.

# Régle de Gauchy

**Si dans une série à termes positifs, la quantité $\sqrt[n]{u_n}$ à une limite finie $l$ lorsque n tend vers l'infini, c'est à dire si l'on a**

$$\underset{n \to \infty}{Lim} \sqrt[n]{u_n} = l$$

**1) La série converge lorsque $l < 1$.**
**2) La série diverge pour $l > 1$**
**3) Si l=1 , on ne peut rien conclure .**

1) $l \prec 1$ : Soit le nombre $r$ tel que $l < r < 1$.
Comme $\underset{n \to \infty}{Lim} \sqrt[n]{u_n} = l$, il existe alors un $N$ tel que pour tout $n > N$ ,

$$\sqrt[n]{u_n} < r \quad ou \quad bien \quad u_n < r^n$$

*Considérons à présent les deux séries*

$$u_1 + u_2 + \dots\dots\dots + u_N + u_{n+1} + u_{N+2} + \dots\dots\dots(1)$$
$$r^N + r^{N+1} + r^{N+2} + \dots\dots\dots(2)$$

*La série (2)converge, en effet c'est une progression géométrique de raison $r < 1$.*
*Donc la série (1) converge.*
1) l >1 .On aura à partir d'un certain rang $N$

$$\sqrt[n]{u_n} > 1 \quad \Longrightarrow u_n > 1$$

Donc la série diverge.
2) $l < 1$ .Soit le nombre $r$ tel que $l < r < 1$, on aura à partir d'un certain rang $N$

$$\sqrt[n]{u_n} \prec r \quad \Longrightarrow u_n \prec r^n,\ \forall \quad n \succeq N$$

Soient alors les deux séries

$$u_1 + u_2 + \dots\dots\dots + u_N + u_{n+1} + u_{N+2} + \dots\dots\dots(1')$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad r^N + r^{N+1} + r^{N+2} + \dots\dots\dots(2')$$

La série $(2')$ est convergente car c'est une progression géométrique de raison $r < 1$, ainsi
d'aprés le critère de comparaison, la série $(1')$ converge.

**Remarque :** Le cas où $l = 1$ exige une étude particulière, la série peut alors converger ou diverger.

## Comparaison avec une intégrale

**Soit la série à termes positifs non croissante**

$$u_1 + u_2 + .......... + u_n + ............$$

**et soit** $f$ **une fonction continue non croissante telle que**

$$f(1) = u_1, \quad f(2) = u_2, \quad .......... \quad f(n) = u_n$$

**L'intégrale**

$$\int_1^\infty f(x)dx$$

**et la série sont de mème nature.**

## Série alternée. Critère de Leibniz

Dans ce paragraphe, on a des séries de la forme suivante :

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ........$$

où les $u_i$ sont tous positifs.

**Séries à termes de signes quelconques**

Une série est dite à termes de signes quelconques si on a des termes aussi bien positifs que négatifs.

# Exercices

## Exercice 1 :

Trouver le terme général de la série, si la suite $(s_n)$ de ses sommes partielles est définie comme suit :

$$\begin{aligned} (a) \quad s_n &= \frac{n+1}{n}, \qquad (b) \quad s_n = \frac{2^n-1}{2^n} \\ (c) \;\; s_n &= \arctan(n), \qquad (d) \;\; s_n = \frac{(-1)^n}{n} \end{aligned}$$

## Exercice 2 :

Trouver la somme des séries :

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}, \quad (b) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n(n+1)}}$$

$$(c) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)\sqrt{n(n+1)}}$$

## Exercice 3 :

Calculer les sommes suivantes

$$\log\frac{1}{4} - \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\frac{(n+1)(3n+1)}{n(3n+4)}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\frac{(2n+1)n}{(n+1)(2n-1)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)\ldots\ldots(n+m)}, \; m \; entier \;\; positif$$

## Exercice 4 :

Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{n!\pi}{720}$

## Exercice 5 :

Démontrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3.5.7.........(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}$

## Exercice 6 :

Montrer que les deux séries sont convergentes et calculer leur somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

## Exercice 7 :

Etudier la nature de la série de terme général :

$$u_n = \frac{1}{4n^2-1}, \quad n > 0$$

## Exercice 8 :

Etudier la nature de la série de terme général :

$$u_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

En déduire que la suite numérique :

$$v_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ...... + \frac{1}{n} - \ln(n)$$

admet une limite **C** $\approx$ **0,577215665** appelée **"constante d'Euler".**

## Exercice 9 :

Etudier suivant les valeurs des réels positifs $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\beta}$ la nature des séries de **Bertrand :**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha} (\ln n)^{\beta}}$$

## Exercice 10 :

Soit la série de terme général : $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}, n \in \mathbb{N}^*$

- Montrer que la série est convergente .

- Montrer qu'il existe quatre nombres réels $a,\ b,\ c\ et\ d$ tels que :

$$u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2} + \frac{d}{n+3}, \quad n > 0$$

- Trouver alors une formulation réduite de la somme partielle :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$$

En déduire la somme de la série.

# Exercice 11 :

Etudier la nature des séries de terme général :

$$u_n = \frac{2^n}{n!}, \quad v_n = \frac{n!}{n^n}$$

En déduire les limites suivantes : $\underset{n\to\infty}{Lim}\ u_n,\ \underset{n\to\infty}{Lim}\ v_n.$

# Exercice 12 :

Etudier suivant les valeurs de **p** la nature de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{2+n^p}{1+n^p}$.

# Exercice 13 :

Etudier la nature des séries numérique de terme général

$$(\mathbf{1}) \quad \frac{2n}{1+3^n}, \quad (\mathbf{2}) \quad n^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1, \ (\mathbf{3}) \quad \frac{\ln(n)}{n} \ln(1+\frac{1}{n^2}), \ (\mathbf{4}) \quad \cos\left(\frac{1}{n}\right)^{n^3}$$

$$(\mathbf{5}) \ \frac{n!}{a^n}, \quad a > 0, \ (\mathbf{6}) \quad \ln\left(\frac{\cosh\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}\right), \quad (\mathbf{7}) \quad \sqrt[n^2]{n} - 1, \ (\mathbf{8}) \quad \ln\frac{1}{n} - \ln\sin\frac{1}{n},$$

# Exercice 14 :

Calculer les sommes : $\displaystyle A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}, \quad \mathbf{B} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{n!}$

# Exercice15 :

Etudier, suivant les valeurs des réels $\alpha$ et $\beta$, le caractère de convergence des séries numériques :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{e} + \alpha + \frac{\beta}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n\ln(1+\frac{1}{n}) - \alpha\cos\frac{1}{n} + \beta\sin\frac{1}{n}$$

# Exercice 16 :

Etudier les séries suivantes:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! e^n}{n^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}\ , \qquad \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \sin \frac{\pi}{2^n}$$

# Solutions

## Exercice 1 :

$(a)$ $s_n = \dfrac{n+1}{n}$, la somme partielle est donc définie pour $n \neq 0$ d'où $s_1 = u_1 = 2$ et $u_n = s_n - s_{n-1} = \dfrac{n+1}{n} - \dfrac{n}{n-1} = -\dfrac{1}{n(n-1)}$.

$(b)$ $s_n = \dfrac{2^n - 1}{2^n}$, on a $s_0 = u_0 = 0$ avec $u_n = s_n - s_{n-1} = \dfrac{2^n - 1}{2^n} - \dfrac{2^{n-1} - 1}{2^{n-1}} = \dfrac{(2^n - 1) - 2^n + 2}{2^n} = \dfrac{1}{2^n}$.

$(c)$ $s_n = \arctan(n)$, en utilisant la mème méthode on obtient : $u_n = s_n - s_{n-1} = \arctan(n) - \arctan(n-1) = \arctan \dfrac{1}{n^2 - n + 1}$.

sachant que : $\arctan\ a - \arctan\ b = \arctan \dfrac{a-b}{1+ab}$)

$(d)$ $s_n = \dfrac{(-1)^n}{n} \implies u_n = (-1)^n \dfrac{2n-1}{n(n-1)}$

## Exercice 2 :

$(a)$ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2n+1}{n^2 (n+1)^2}$

On commence par la décomposition du terme général de la série : $u_n = \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{(n+1)^2}$,on a alors une série télescopique :

$$s_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$$

$\implies s = \lim\limits_{n \to \infty} s_n = 1.$

$(b)$ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n - \sqrt{n^2 - 1}}{\sqrt{n(n+1)}}$,

Avec la même démarche, on a :

$$u_n = \frac{n - \sqrt{n^2 - 1}}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} - \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}$$

donc : $s_n = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$ et $s = \lim\limits_{n \to \infty} s_n = 1.$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)\sqrt{n(n+1)}}$

Il suffit de constater que le terme général s'écrit comme suit

$$u_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

On a alors :
$S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}. + .... + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

Finalement on a : $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1.$

# Exercice 3 :

On a des séries télescopiques grâce à la propriété fondamentale de la fonction logarithme.

$A = \ln\frac{1}{4} - \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\frac{(n+1)(3n+1)}{n(3n+4)}$

Soit $u_n = \ln\dfrac{(n+1)(3n+1)}{n(3n+4)} = \ln(n+1) - \ln n + \ln(3n+1) - \ln(3n+4)$

$$\begin{aligned}
u_1 &= \ln 2 - \ln 1 + \ln 4 - \ln 7\\
u_2 &= \ln 3 - \ln 2 + \ln 7 - \ln 10\\
u_3 &= \ln 4 - \ln 3 + \ln 10 - \ln 13\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
u_n &= \ln(n+1) - \ln n + \ln(3n+1) - \ln(3n+4)
\end{aligned}$$

---

$$S_n = \ln 4 + \ln(n+1) - \ln(3n+4) = \ln\frac{4(n+1)}{3n+4}$$

d'où l'on a : $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \ln\frac{4}{3} \Longrightarrow A = \ln\frac{1}{4} - \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \ln\frac{3}{16}$

En utilisant la même démarche, on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\frac{(2n+1)\,n}{(n+1)(2n-1)} = \ln 2$

En utilisant la décomposition suivante du terme général $u_n$, on obtient

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{1}{n(n+1)\ldots\ldots(n-1+m)(n+m)}\\
&= \frac{1}{m}\left(\frac{1}{n(n+1)\ldots\ldots.(n+m-1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots..(n+m)}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi on peut calculer la somme partielle d'ordre $n$, on a :

$$\begin{aligned}
u_1 &= \frac{1}{1.2...m.(1+m)} = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{1.2...m} - \frac{1}{2...(m+1)}\right)\\
+ \quad u_2 &= \frac{1}{2.3.......(m+2)} = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{2...m(m+1)} - \frac{1}{3...(m+1)(m+2)}\right)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

.............................................................................................................

$$+ \quad u_n = \frac{1}{n\,(n+1)\,......\,(n+m)} = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{n(n+1)...(n+m-1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)..(n+m)}\right)$$

$$s_n = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{1.2.3.....m} - \frac{1}{(n+1)(n+2).....(n+m)}\right) \Longrightarrow$$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{m.m!}$$

# Exercice 4 :

$(a)$ Pour $n \succeq 6$ : $\sin\dfrac{n!\pi}{720} = \sin k\pi = 0$
Ce qui donne une somme finie de 5 termes seulement

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sin\frac{n!\pi}{720} = \sum_{n=1}^{n=5}\sin\frac{n!\pi}{720} = \sin\frac{\pi}{720} + \sin\frac{\pi}{360} + \sin\frac{\pi}{120} + \sin\frac{\pi}{30} + \sin\frac{\pi}{6}.$$

# Exercice 5 :

On utilise la décomposition suivante

$$u_n = \frac{n}{3.5.7...\,(2n+1)} = \frac{A}{3.5.7...\,(2n-1)} + \frac{B}{5.7...\,(2n-1)\,(2n+1)}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3.5.7...\,(2n-1)} - \frac{1}{3.5.7...\,(2n+1)}\right)$$

On a alors une série télescopique avec

$$u_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right)$$

$$u_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3.5}\right)$$

$$u_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3.5} - \frac{1}{3.5.7}\right)$$

.....................................

.....................................

$$u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3.5.7...\,(2n-1)} - \frac{1}{3.5.7...\,(2n+1)}\right)$$

d'où : $\quad s_n = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{3.5.7...\,(2n+1)}\right)$

Ce qui implique le résultat demandé.

# Exercice 6 :

$S=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\,\frac{1}{n},$

Soit : $\mathbf{S}_{2n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$

En regroupant les termes suivant leur signes, on a

$$S_{2n}=1+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\right)$$

A cette somme partielle, on va ajouter et retrancher la mème valeur

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}$$

On obtient la somme $\mathbf{S}_{2n}$ sous la forme suivante

$$\begin{aligned} S_{2n} &= 1+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2n-1}+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\right)\\ &\quad-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} S_{2n} &= 1+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\right)\\ &\quad-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} S_{2n} &= 1+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+...+\frac{1}{2n}\\ &\quad-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

Et finalement on obtient : $S_{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+....+\frac{1}{2n}$

on utilise la comparaison avec une intégrale, on a

$$\int_{n}^{2n+1}\frac{dx}{x}\leq S_{2n}\leq\int_{n}^{2n}\frac{dx}{x}+\frac{1}{n}$$

$\Longrightarrow$

$$\ln\frac{2n+1}{n}\leq S_{2n}\leq\ln 2+\frac{1}{n}$$

Finalement, on a : $\underset{n\to\infty}{Lim} S_{2n} = \ln(2)$ et comme : $S_{2n+1} = S_{2n} + \frac{1}{2n+1}$.On a ainsi :

$$\underset{n\to\infty}{Lim} S_n = \ln 2$$

$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ :

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \ln 2 - \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} - \ln\frac{5}{4} + \ln\frac{6}{5} .... + \ln\frac{2n}{2n-1} - \ln\frac{2n+1}{2n} \\ &= \ln\frac{2.4.6....2n}{1.3.5...(2n-1)} - \ln\frac{3.5....(2n-1).(2n+1)}{2.4.6....(2n)} \\ &= \ln\frac{2^2.4^2......(2n)^2}{3^2.5^2...(2n-1)^2(2n+1)} \end{aligned}$$

En utilisant la **formule de Wallis**

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right) = \frac{2}{\pi} \Longrightarrow \frac{2^2.4^2......(2n)^2...}{3^2.5^2...(2n-1)^2(2n+1)......} = \frac{\pi}{2}$$

On a alors $\underset{n\to\infty}{Lim} S_{2n} = \ln\frac{\pi}{2}$.Sachant que $S_{2n+1} = S_{2n} + \ln\frac{2n+2}{2n+1} \Longrightarrow \underset{n\to\infty}{Lim} S_n = \ln\frac{\pi}{2}$.

# Exercice 7 :

$u_n \approx \frac{1}{4n^2}$.Le terme général de la série est équivalent au terme général d'une série de **Riemann** avec un exposant égal à 2, la série est alors convergente

Décomposition du terme général en éléments simples

$$\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

Calcul de la somme partielle d'ordre n

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2}\right] \\ u_2 &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right] \\ u_3 &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right] \\ &- - - - - - - - - \\ u_n &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right) \end{aligned}$$

$$\mathbf{S}_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$$

Ce qui donne $\mathbf{S} = \underset{n\to\infty}{Lim}\mathbf{S}_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$

# Exercice 8 :

Etude de la nature de la série : On a l'équivalence suivante

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \approx \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}$$

on a alors : $u_n \approx \dfrac{1}{2n^2}$ d'où la convergence de la série et sa somme est égale à $\mathrm{C}$ ( **Constante d'Euler** ).

**Etude de la suite $\mathbf{v}_n$ :**

On commence par calculer la somme partielle d'ordre $n$ de la série de terme général $\mathbf{u}_n$,

pour cela on utilise l'égalité : $\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln(n)$

$$\begin{aligned}
u_1 &= 1 - \ln(2) \\
u_2 &= \frac{1}{2} - \ln 3 + \ln 2 \\
u_3 &= \frac{1}{3} - \ln 4 + \ln 3 \\
&\quad \text{...............} \\
&\quad \text{.............} \\
u_{n-1} &= \frac{1}{n-1} - \ln(n) + \ln(n-1) \\
u_n &= \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln n
\end{aligned}$$

En additionnant membre à membre ces différentes égalités, on a

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} u_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \text{......} + \frac{1}{n} - \ln(n+1) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \text{......} + \frac{1}{n} - \ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\underset{n\to\infty}{Lim} S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \text{......} + \frac{1}{n} - \ln n \ = C$$

# Exercice 9 :

## Séries de Bertrand

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha} (\ln n)^{\beta}}$$

Pour $\alpha = 1$ **:** la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x (\ln x)^{\beta}}$ est positive, monotone et décroissante.

on compare la série numérique avec l'intégrale $I = \displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{x (\ln x)^{\beta}}$ .

On fait le changement de variable suivant : $\ln x = t \Longrightarrow I = \displaystyle\int_{\ln 2}^{\infty} \frac{dt}{t^{\beta}}$

On sait alors que :
si $\beta \preceq \mathbf{1}$, la série est divergente.
si $\beta > \mathbf{1}$, la série est convergente.
**Pour** $\alpha > 1$ : on utilise le critère de comparaison, on a l'inégalité suivante

$$u_n = \frac{1}{n^{\alpha} (\ln n)^{\beta}} < \frac{1}{n^{\alpha}}$$

la série majorante est une série de **Riemann** avec un exposant supérieur à **1**, donc
la série étudiée est convergente.
**Pour** $\alpha < \mathbf{1}$ : on a

$$\lim_{n \to \infty} n u_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^{\alpha - 1} (\ln n)^{\beta}} = +\infty$$

Ainsi à partir d'un certain rang $N_0$, la suite positive $(n u_n)$ est minorée par $A \Longrightarrow$

$$u_n > \frac{A}{n}$$

donc la série de **Bertrand** diverge.

# Exercice 10 :

$u_n \approx \dfrac{1}{n^4}$, la série est convergente .
On décompose le terme général

$$u_n = \frac{1}{6n} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)} - \frac{1}{6(n+3)}$$

Remarque : la somme des coefficients est nulle
$\frac{1}{6}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=0$.On a donc une série télescopique.

## Calcul de la somme partielle d'ordre n :

$$\begin{aligned}
u_1 &= \frac{1}{6}-\frac{1}{2.2}+\frac{1}{2.3}-\frac{1}{6.4}\\
u_2 &= \frac{1}{6.2}-\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.4}-\frac{1}{6.5}\\
u_3 &= \frac{1}{6.3}-\frac{1}{2.4}+\frac{1}{2.5}-\frac{1}{6.6}\\
u_4 &= \frac{1}{6.4}-\frac{1}{2.5}+\frac{1}{2.6}-\frac{1}{6.7}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
u_{n-2} &= \frac{1}{6(n-2)}-\frac{1}{2(n-1)}+\frac{1}{2n}-\frac{1}{6(n+1)}\\
u_{n-1} &= \frac{1}{6(n--1)}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{6(n+2)}\\
u_n &= \frac{1}{6n}-\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2(n+2)}-\frac{1}{6(n+3)}\\
\hline
s_n &= \frac{1}{18}+\frac{1}{3(n+2)}-\frac{1}{6(n+1)}-\frac{1}{6(n+3)}
\end{aligned}$$

Ce qui donne la somme de la série :

$$S=\underset{n\to\infty}{Lim}S_n=\frac{1}{18}$$

**Autre méthode :** on a démontré que ( **voir exercice 3** )

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)\ldots\ldots(n+m)}=\frac{1}{m.m!}$$

Ce qui donne par application directe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{1}{3.3!}=\frac{1}{18}$$

# Exercice 11 :

$u_n=\frac{2^n}{n!}$, $v_n=\frac{n!}{n^n}$ : on applique le critère de **D'alembert**

$$\underset{n\to\infty}{Lim}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\underset{n\to\infty}{Lim}\frac{n!}{(n+1)!}.\frac{2^{n+1}}{2^n}=0$$

$$\underset{n\to\infty}{Lim}\frac{v_{n+1}}{v_n}=\underset{n\to\infty}{Lim}\frac{(n+1)!}{n!}.\frac{n^n}{(n+1)^n}=\underset{n\to\infty}{Lim}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}$$

Donc les deux séries sont convergentes $\Longrightarrow \underset{n\to\infty}{Lim} u_n,\ \underset{n\to\infty}{Lim}\ v_n = 0$.

# Exercice 12 :

On montre que pour $n$ assez grand, on a une équivalence avec le terme général d'une série de **Riemann**

$$\ln \frac{2+n^p}{1+n^p} = \ln\left(1+\frac{1}{1+n^p}\right) \approx \frac{1}{1+n^p} \approx \frac{1}{n^p}.$$

d'où le résultat suivant : si $0 < p \preceq 1$ la série diverge, si $p > 1$ la série converge.

# Exercice 13 :

(**1**) $\dfrac{2n}{1+3^n} \approx \dfrac{2n}{3^n}$,On utilise le critère de D'Alembert $\Longrightarrow \dfrac{2\,(n+1)}{3^{n+1}}.\dfrac{3^n}{2n} = \dfrac{n+1}{3n}$

Ce qui donne $\underset{n\to\infty}{\lim} \dfrac{n+1}{3n} = \dfrac{1}{3} < 1,$ la série est convergente.

(**2**) $n^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 = e^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} - 1 \approx \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}} > \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, la série est divergente.

(**3**) $\dfrac{\ln(n)}{n} \ln(1+\dfrac{1}{n^2}) \approx \dfrac{\ln(n)}{n^3} < \dfrac{n}{n^3} = \dfrac{1}{n^2}$, la série est convergente.

(**4**) $\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)^{n^3} = e^{n^3 \ln\left[\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right]} \approx e^{n^3 \ln\left(1-\frac{1}{2n^2}\right)} \approx e^{-\frac{n}{2}},$

c'est le terme d'une série géométrique de raison $\dfrac{1}{\sqrt{e}} < 1$

la série donnée est convergente.

(**5**) $u_n = \dfrac{n!}{a^n},\quad a > 0$, on applique le critère de **D'Alembert**

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{a^{n+1}}.\frac{a^n}{n!} = \frac{n}{a}$$

On a $\underset{n\to\infty}{Lim} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty$, la série est divergente.

(**6**) $\ln\left(\dfrac{\cosh\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}\right) \approx \ln\left(\dfrac{1+\frac{\pi^2}{2n^2}}{1-\frac{\pi^2}{2n^2}}\right) \approx \dfrac{\pi^2}{n^2}$ et la série est alors convergente.

$$(\mathbf{7}) \quad \sqrt[n^2]{n} - 1 = e^{\dfrac{\ln(n)}{n^2}} - 1 \approx \frac{\ln(n)}{n^2},$$

c′est une série de Bertrand, donc elle est convergente.

$$(\mathbf{8}) \quad \ln\frac{1}{n} - \ln\sin\frac{1}{n} \approx \ln\frac{1}{n} - \ln\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3}\right) = \ln\frac{1}{n} - \ln\frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{6n^2}\right)$$

$$= -\ln\left(1 - \frac{1}{6n^2}\right) \approx \frac{1}{6n^2}, \text{ la série converge.}$$

# Exercice 14 :

Pour calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$, on utilise la décomposition suivante

$$\begin{aligned}
n^2 &= A + Bn + Cn(n-1) \\
\text{Pour } n &= 0 \Longrightarrow A = 0,\ n = 1 \Longrightarrow B = 1 \quad et \quad C = 1 \quad \text{par identification} \\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-1)}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} = 2e
\end{aligned}$$

Pour calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{n!}$,onutilise la décomposition factorielle suivante

$$\begin{aligned}
n^5 &= A + Bn + Cn(n-1) + Dn(n-1)(n-2) + En(n-1)(n-2)(n-3) + \\
& \quad Fn(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) \\
& \quad \text{Pour calculer les coefficients A, B, C, D, E et F on utilise la méthode suivante} \\
\text{Pour } n &= 0 \Longrightarrow \mathbf{A = 0};\ n = 1 \Longrightarrow \mathbf{B = 1};\ pour\ n = 2 \Longrightarrow 32 = 2 + 2C \Longrightarrow \\
\mathbf{C = 15} \ ;\ pour\ n &= 3 \Longrightarrow 243 = 3 + 15 \cdot 6 + 6D \Longrightarrow \mathbf{D = 25} \\
pour\ \ n &= 4 \Longrightarrow 1024 = 4 + \mathbf{15} \cdot 4 \cdot 3 + \mathbf{25} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 + \mathbf{E} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \Longrightarrow \\
\mathbf{E = 10} & \quad et\ \mathbf{F = 1} \text{ par identification}
\end{aligned}$$

Finalement, on a $: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)} + 15 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} +$

$$25 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-3)!} + 10 \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(n-4)!} + \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n-5)!} = 52e$$

# Exercice 15 :

Etudier, suivant les valeurs des réels $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\beta}$, le caractère de convergence des séries numériques

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{e} + \alpha + \frac{\beta}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n \ln(1 + \frac{1}{n}) - \alpha \cos\frac{1}{n} + \beta \sin\frac{1}{n}$$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{e} + \alpha + \frac{\beta}{n}$ : on a l'équivalence suivante

$$\sqrt[n]{e} + \alpha + \frac{\beta}{n} \approx 1+ +\alpha+ \frac{1+\beta}{n} + \frac{1}{2n^2}$$

- Si $\alpha \neq -1$, la série est divergente.
- Si $\alpha = -1$ et $\beta \neq -1$, la série est divergente.
- Si $\alpha = -1$ et $\beta = -1$, la série est convergente.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \ln(1 + \frac{1}{n}) - \alpha \cos \frac{1}{n} + \beta \sin \frac{1}{n}$ :
  On utilise les développements limités jusqu'à l'ordre trois

$$\ln(1+\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$\cos \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\sin \frac{1}{n} = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$n \ln(1+\frac{1}{n}) - \alpha \cos \frac{1}{n} + \beta \sin \frac{1}{n} = (1-\alpha) + \left(\beta - \tfrac{1}{2}\right) \frac{1}{n} + \frac{3\alpha+2}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\begin{cases} si\ \alpha \neq 1,\ u_n \ \text{ ne tend pas vers 0, la série est divergente} \\ si\ \alpha = 1 \text{ et } \beta \neq \frac{1}{2},\ \text{alors } u_n \approx \frac{A}{n},\ \text{la série est divergente} \\ si\ \alpha = 1 \text{ et } \beta = \frac{1}{2},\ \text{alors } u_n \approx \frac{B}{n^2},\ \text{la série est convergente} \end{cases}$$

# Exercice 16 :

On utilise l'équivalence de **Stirling** pour $n \longrightarrow \infty$

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \Longrightarrow u_n \approx \sqrt{2\pi n} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = \infty,$$

La série donnée est divergente.On utilise le critère de **D'Alembert** $\Longrightarrow$

$$\underset{n\to\infty}{Lim} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \underset{n\to\infty}{Lim} \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e} < 1$$

La série est convergente.
Pour $n$ assez grand on a l'équivalence, $\sin \frac{\pi}{2^n} \approx \frac{\pi}{2^n}$.

(série géométrique convergente de raison $r = \frac{1}{2} < 1$).

La série est convergente.

**CHAPITRE 2**

# Séries de Fonctions

## Notion de convergence simple:

Soit $(f_n)_{n \in IN}$ une suite de fonctions définies sur un même ensemble de définition $D_f$ et à valeurs réelles ou complexes.D'une manière naturelle, on définit la limite (si elle existe ) de cette suite de fonctions $f$ par :

$$f(x) = \underset{n\to\infty}{Lim} f_n(x)$$

On dit que $f$ est la limite simple de la suite $(f_n)_{n \in IN}$ .Mais ce type de convergence pose problème, en effet les propriétés de continuité, dérivabilité et d'intégrabilité ne sont pas en général conservées.

### Exemples

### - Continuité :

Soit la suite de fonctions définie par :

$$f_n(x) = x^n, x \in [0, 1]$$

La limite de cette suite de fonctions est discontinue au point 1, en effet on a

$$f(x) = \underset{n\to\infty}{Lim} x^n = \begin{cases} 0, & si \;\; x < 1 \\ 1, & si \; x = 1 \end{cases}$$

### - Dérivabilité :

Soit la suite de fonctions définie par :

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}, x \in IR$$

On a comme limite

$$f(x) = 0$$

Mais la suite dérivée

$$f_n'(x) = \cos nx$$

n'admet en général aucune limite.Autrement dit :

$$\frac{d}{dx}\left(\underset{n\to\infty}{Lim} f_n(x)\right) \neq \underset{n\to\infty}{Lim} \frac{d}{dx}\left(f_n(x)\right)$$

ainsi il n'est pas permis d'intervertir les symboles de limite et de dérivation.

### - Intégrabilité :

On a une intégrale

$$\int_0^1 2n^2 x e^{-n^2x^2} dx = 1 - e^{-n^2}$$

de limite égale à 1; mais sous l'intégrale, la suite de fonctions tend vers 0.Dans cet exemple, il n'est pas permis d'intervertir les symboles de limites et d'intégrattion . (Exemple donné par **Gaston Darboux** (1842/1917) en 1875).Un exemple comparable s'applique à l'intervalle fermé $[0,\ 1]$ avec la suite de fonctions :

$$f_n(x) = n^2 x^n (1 - x)$$

Cette suite de fonctions converge vers la fonction nulle pourtant l'intégrale :

$$\int_0^1 n^2 x^n (1-x) dx = n^2 \int_0^1 \left(x^n - x^{n+1}\right) dx = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)}$$

l'intégrale tend vers 1.

## Séries de Fonctions :

On appelle série de fonctions toute série dans laquelle
le terme général est une fonction de $x$

Considérons une série de fonctions

$$u_1(x) + u_2(x) + ....... + u_n(x) + .....$$

Donnons à $x$ différentes valeurs, on a différentes séries numériques qui peuvent être convergentes ou non :

L'ensemble des valeurs pour lesquelles la série de fonction converge est appelé **Domaine de convergence.**

La somme $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ d'une série de fonctions est une fonction dontle domaine de définition est le domaine de convergence de la série.

Le reste $r_n(x) = \sum\limits_{k\ =\ n+1}^{\infty} u_n(x)$ d'une série convergente tend vers zéro lorsque $\Longrightarrow +\infty$.

On a

$$r_n(x) = S(x) - S_n(x)$$

Pour tout $x$ appartenant au domaine de convergence, on a

$$\underset{n\to\infty}{Lim} S_n(x) = S(x)$$

D'où $\underset{n\to\infty}{Lim} r_n(x) = 0$

## Séries majorables.

Une série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ est dite majorable dans un domaine $D$ s'il existe une série numérique à termes positifs convergente
$a_1 + a_2 + ...... + a_n + .....$
telle que l'on ait : $|u_n(x)| \leq a_n$.

Une série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ majorable dans un domaine $D$ est uniformément convergente sur $D$
.

Soit

$$\sigma = \alpha_1 + \alpha_2 + ......... + \alpha_n + ...... = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$$

avec $\sigma = \sigma_n + \varepsilon_n$, $\sigma_n$ étant la somme partielle d'ordre n et $\varepsilon_n$ le reste du même ordre.
Comme cette série converge, on a nécessairement $\underset{n\to\infty}{Lim}\ \varepsilon_n = 0$,
ce qui permet d'écrire ce qui suit

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \ \exists\ N,\ tel\ que\ \ \forall\ n\ \succeq N \implies \varepsilon_n \leq \varepsilon.$$

Sachant que la série est majoranle, on a

$$|r_n(x)| \leq \varepsilon_n \leq \varepsilon$$

ce qui montre que l'on a une convergence uniforme sur le domaine $D$.

### Corollaire :

Une série de fonctions majorable sur un domaine $D$ est absolument convergente.

La somme d'une série de fonctions continues, majorable sur le segment $[a, b]$ est une fonction continue sur ce segment.

Soit une série de fonctions continues majorable sur le segment $[a, b]$

$$u_1(x) + u_2(x) + ....... + u_n(x) + .....$$

Soit $x_0 \in [a,b]$, on a

$$\Delta S = S(x) - S(x_0),\ \Delta S_N = S_N(x) - S_N(x_0)$$

Avec ces notations, on a

$$\Delta S = \Delta S_N + r_N(x) - r_N(x_0)$$

En passant aux valeurs absolues, on a l'inégalité

$$|\Delta S| \leq |\Delta S_N| + |r_N(x)| + |r_N(x_0)|$$

Inégalité vraie pour tout $x_0 \in [a,b]$.
Pour prouver la continuité de $S(x)$, il suuffit de démontrer que
- $\forall \varepsilon \succ 0,\ \exists\ \delta \succ 0$ tel que tous les $|\Delta x| \prec \delta \implies |\Delta s| \prec \varepsilon$.
Comme la série proposée est majorable, $\forall \varepsilon \succ 0,\ \exists\ N$ tel que $\forall\ n \succeq N$, en particulier pour $n = N$

$$|r_N(x)| \prec \varepsilon, \quad |r_N(x_0)| \prec \varepsilon$$

Comme la somme partielle d'ordre N de fonctions continues est continues, on peut alors écrire :
$\forall \varepsilon \succ 0,\ \exists\ \delta \succ 0$ tel que tous les $|x - x_0| \prec \delta \implies |\Delta S_N| \prec \varepsilon$.
Finalement, on obtient

$$|\Delta S| \prec 3\varepsilon$$

Ce qui termine la démonstration.

Soit la série de fonctions continues

$$u_1(x) + u_2(x) + ....... + u_n(x) + .....$$

majorable sur le segment $[a,b]$ et soit $S(x)$ sa somme. L'intégrale de $S(x)$ entre $a$ et $x$ ( $x \in [a,b]$ ) est égale à la somme des intégrales des termes de la série entre les mèmes bornes

$$\int_a^x S(x)dx = \int_a^x \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n(x)dx$$

Si la série de fonctions

$$u_1(x) + u_2(x) + ....... + u_n(x) + .....$$

ayant des dérivées continues sur le segment $[a,b]$, converge vers la somme $S(x)$ et la série des fonctions dérivées est majorable sur ce mème segment $[a,b]$ alors la somme de la série des dérivées est égale à la dérivée de la somme de la série proposée

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$$

.

# Exercices

## Exercice 1:

Soit la suite de fonctions : $f_n(x) = \sin\left(\dfrac{x}{n}\right)$ définie sur $\mathbb{R}$.
Calculer la limite de $f_n$.
Est ce que la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}$.

## Exercice 2:

Soit la suite de fonctions : $f_n(x) = \left(\dfrac{x^2}{1+x^2}\right)^n$ sur $\mathbb{R}$.
Calculer la limite simple.
Montrer que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.
Montrer que la convergence est uniforme sur tout

segment $I = [-a, a]$, $a > 0$.

## Exercice 3:

Soit la suite de fonctions : $f_n(x) = e^{\frac{n-1}{n}\mathbf{x}}$
1) Etudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que la convergence est uniforme sur

tout intervalle $I = ]-\infty,\ b]$.
3) Est ce que la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}$.

## Exercice 4:

Etudier la convergence **simple**, **uniforme** et **normale** des séries de fonctions $u_n$ définies sur $[0,\ 1]$ dont le terme général est le suivant:

$$
\begin{array}{lrcl}
\textbf{a}) & u_n(x) & = & \dfrac{1}{n+xn^2} \\
\textbf{b}) & u_n(x) & = & \dfrac{(-1)^n}{nx+\sqrt{n}} \\
\textbf{c}) & u_n(x) & = & x^n(1-x) \\
\textbf{d}) & u_n(x) & = & (-1)^n x^n (1-x) \\
\textbf{e}) & u_n(x) & = & \dfrac{\arctan(nx)}{n^2}
\end{array}
$$

# Exercice 5:

On se donne une série de fonctions définie sur $\mathbb{R}^+$ par son terme général

$$u_n(x) = \frac{x}{n^2 + x^2}$$

a) Montrer que la série de fonctions est simplement convergente sur $\mathbb{R}^+$.
b) Montrer que la série n'est pas uniformément convergente sur $\mathbb{R}^+$.
c) Montrer que la série alternée $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n(x)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$
mais la convergence n'est pas normale.

# Exercice 6:

Soit la série de fonctions $F(x) = \sum_{n \succeq 1} f_n(x) .= \sum_{n \succeq 1} \frac{x}{n} e^{-nx}, \quad x \in IR^+ = [0, \infty[$

$i)$ Montrer que la série de fonctions converge simplement dans $\mathbb{R}^+$.
$ii)$ Calculer la dérivée de $f_n$ et $\sup |f\ _n(x)|$ pour $x \in \mathbb{R}^+ = [0, \infty[$.
Est ce que la convergence est normale sur $\mathbb{R}^+$.
$iii)$ Calculer $f\ "_n(x)$ (dérivée seconde ) *et* $\sup\limits_{x \in\ IR^+} |f\ '_n(x)|$ .
$iv)$ La série $\sum_{n \succeq 1} f_n{}'$ :converge-t-elle normalement dans $\mathbb{R}^+$.

# Exercice 7:

Soit $u_n$ la fonction définie sur $[0,\ \infty[$ par :

$$u_n(x) = \frac{1}{n^2 x + n^3}$$

- Montrer que la série de fonctions de terme général $u_n(x)$ converge uniformémentsur $[0,\ \infty[$vers une fonction indéfiniment dérivable.

# Solutions

## Exercice 1:

$\underset{n\to\infty}{Lim}\ f_n(x) = 0.$
On utilise la norme de la convergence uniforme, on a facilement:

$$\|f_n\|_\infty = 1$$

donc la convergence n'est pas uniforme.

## Exercice 2:

**Limite simple :** $\underset{n\to\infty}{Lim}\ f_n(x) = 0.$
On a $\|f_n\| = 1$, **la convergence n'est pas uniforme sur** $\mathbb{R}$.
Etude de la convergence sur l'intervalle fermé $[-a, a]$
La norme $\|f_n\|_\infty$de la suite de fonctions sur l'intervalle $I = [-a, a]$ est égale à :

$$\|f_n\|_\infty = \left(\frac{a^2}{1+a^2}\right)^n$$

Et comme on a : $\underset{n\to\infty}{Lim}\ \|f_n\|_\infty = 0$, la convergence est uniforme.

## Exercice 3:

*1)* $\underset{n\to\infty}{Lim}\ f_n(x) = \underset{n\to\infty}{Lim} e^{\frac{n-1}{n}\mathbf{x}} = e^x = f(x)$, la convergence est simple sur $\mathbb{R}$.
*2)* Pour étudier la convergence sur $I = ]-\infty,\ b]$,

on se propose d'utiliser la norme de la convergence uniforme

$$\|f - f_n\|_\infty = \sup_{\mathbf{x}\,\in\,\mathbf{I}} |f(x) - f_n(x)| = \max\left(\frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n,\ e^b - e^{\frac{n-1}{n}b}\right)$$

Ainsi : $\underset{n\to\infty}{Lim}\ \|f - f_n\|_\infty = 0$, la convergence est donc **uniforme** sur $\mathbf{I} = ]-\infty,\ b]$.
*3)* $\|f - f_n\|_\infty = \sup_{\mathbf{x}\,\in\,\mathbf{R}.} |f(x) - f_n| = +\infty$, donc la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.

**Indication :** Pour calculer les normes, il est demandé d'étudier les variations de la fonction

$$g(x) = |f(x) - f_n(x)| = \begin{cases} e^x - e^{\frac{n-1}{n}\mathbf{x}}, & x \succeq 0 \\ e^{\frac{n-1}{n}\mathbf{x}} - e^x, & x \preceq 0 \end{cases}$$

Etude pour $x \preceq 0$ :

$g\prime(x) = \dfrac{n-1}{n} e^{\frac{n-1}{n}x} - e^x$, $\quad g\prime(x) = 0 \Longrightarrow \dfrac{n}{n-1} = e^{-\frac{x}{n}} \Longrightarrow x = \ln\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^n$

Etude pour $x \succeq 0$ :

$g\prime(x) = e^x - \dfrac{n-1}{n} e^{\frac{n-1}{n}x} \succ 0.$

Tableau de variation :

| $x$ | $-\infty$ $\qquad \ln\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^n \qquad 0 \qquad +\infty$ |
|---|---|
| $v\prime_n(x) = -\dfrac{n}{(nx+\sqrt{n})^2}$ | ......................................................... |
| $v_n(x) = \dfrac{1}{nx+\sqrt{n}}$ | $0 \nearrow \dfrac{1}{n-1}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n \searrow 0 \nearrow +\infty$ |

# Exercice 4:

**a**) $u_n(x) = \dfrac{1}{n+xn^2}$

On a $u_n(0) = \dfrac{1}{n}$, C'est le terme général de la série harmonique.Donc la série de fonctions diverge sur $[0,\ 1]$.

**b**) $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{nx+\sqrt{n}}$

On a une série alternée, on étudie alors la suite de fonctions

$$v_n(x) = \frac{1}{nx+\sqrt{n}} \text{ sur } [0,\ 1]$$

| $x$ | $0 \qquad\qquad 1$ |
|---|---|
| $v\prime_n(x) = -\dfrac{n}{(nx+\sqrt{n})^2}$ | $-$ |
| $v_n(x) = \dfrac{1}{nx+\sqrt{n}}$ | $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \searrow \dfrac{1}{n+\sqrt{n}}$ |

La suite de fonctions $v_n(x)$ est décroissante et comme $|v_n(x)| \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, .elle tend uniformément vers 0.

La série donnée converge uniformément sur $[0,\ 1]$. Mais elle ne converge pas absolument car $|u_n(0)| = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

**c**) $u_n(x) = x^n\,(1-x)$

On a une série géométrique de raison $x$, ce qui donne la somme de la série

$$S(x) = \left\{ \begin{array}{l} 1\ si\ x \in\, ]0,1] \\ 0 \quad si\ ...x = 0 \end{array} \right.$$

Comme la somme $S$ n'est pas continue alors que $u_n$ l'est. la convergence n'est pas uniforme. Puisque $u_n(x) \succeq 0$, la série converge absolument.

**d**) $u_n(x) = (-1)^n\, x^n\,(1-x)$

La série converge absolument d'aprés ce qui précède.

Pour la convergence uniforme, on étudie le comportement de $|u_n(x)|$

$$|u_n(x)| = x^n\,(1-x)$$

| $x$ | $0$ | $\dfrac{n}{n+1}$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $\lvert u_n(x)\rvert' = x^{n-1}\,(n - x\,(n+1))$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $\lvert u_n(x)\rvert$ | $0\ \nearrow$ | $\dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n}$ | $\searrow\ 0$ |

On a la majoration suivante :

$$|u_n\,(x)| \preceq \frac{1}{n+1}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

Ainsi la suite de fonctions $|u_n\,(x)|$ tend vers zéro uniformément, donc la série alternée converge uniformément sur $[0,\ 1]$.

**e**) $u_n(x) = \dfrac{\arctan(nx)}{n^2}$, sachant que $|\arctan(nx)| \preceq \dfrac{\pi}{2}$ donc $|u_n(x)| \preceq \dfrac{\pi}{2n^2}$, et la série de fonctions est donc majorable, on a alors toutes les convergences.

# Exercice 5:

**a**) Convergence simple **:** La série de fonctions donnée est une série à termes positifs.On a alors $u_n(x) = \dfrac{x}{n^2+x^2} \preceq \dfrac{x}{n^2}$, où $x \in \mathbb{R}^+$.On a ainsi majoré par une série de Riemann d'exposant égal à 2, donc la série converge.

**b**) La convergence n'est pas uniforme **:** C'est une question difficile, pour y répondre on se propose de faire un raisonnement par l'absurde.

On suppose que la série de fonctions est uniformément convergente sur $\mathbb{R}^+$.On a alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\ N \quad tel\ que \quad \forall x \in \mathbb{R}^+\ et\ \forall\ n\ \succeq N$$

$\Longrightarrow$

$$|r_n(x)| = \left| \sum_{k\ =\ n+1}^{\infty} \frac{x}{k^2+x^2} \right| < \varepsilon$$

Il faut alors choisir judicieusement $x$ et $n$ pour arriver à une contradiction.Pour cela, on fait le choix suivant $x = n = N$ et on considère la sommation suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{k\ =\ N\ +1}^{2N} \frac{N}{k^2+N^2} &= \frac{N}{(N+1)^2+N^2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{N}{(2N)^2+N^2} \\ &= \frac{N}{(N+1)^2+N^2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{N}{5N^2} \end{aligned}$$

On a ainsi $N$ fractions dont la plus petite est : $\dfrac{N}{5N^2}$.Ce qui permet d'obtenir la minoration suivante:

$$\sum_{k\ =\ N+1}^{2N} \frac{N}{k^2+N^2} \succeq N.\frac{N}{5N^2} = \frac{1}{5}$$

donc le choix efectué nous a permis d'avoir une partie du reste de la série minorée par $\dfrac{1}{5}$.

Ceci est une contradiction, donc la série n'est pas uniformément convergente sur $\mathbb{R}^+$.

**c)** On a une série alternée, pour la convergence uniforme, on applique le critère de Liebniz, il faut alors montrer que :

La suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ( évident )

La suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 uniformément., pour cela, on calcule la norme de $u_n(x)$ sur $\mathbb{R}^+$

| $x$ | $0 \qquad n \qquad +\infty$ |
|---|---|
| $f\prime_n(x) = \dfrac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}$ | $+ \qquad 0 \qquad -$ |
| $f_n(x) = \dfrac{x}{n^2+x^2}$ | $0 \nearrow \dfrac{1}{2n} \searrow 0$ |

Ce qui donne:

$$\|u_n\|_\infty = \sup_{x\ \in\ \mathbb{R}^+} \frac{x}{n^2+x^2} = \frac{1}{2n} \searrow 0.$$

Donc la série alternée converge uniformément. Comme la série numériquede terme général $\dfrac{1}{2n}$ diverge, la série de fonctions de terme général $\dfrac{x}{n^2+x^2}$ne converge pas normalement.

# Exercice 6:

**i)** Pour $x > 0$, on une série de fonctions à terme positifs, on applique le critère de D'alembert :

$$\frac{f_{n+1}(x).}{f_n(x)} = \left(\frac{x}{n+1}e^{-(n+1)x}\right)\left(\frac{n}{xe^{-nx}}\right) = \frac{n}{n+1}e^{-x}$$

Ce qui donne :

$$\underset{n\to\infty}{Lim}\frac{f_{n+1}(x).}{f_n(x)} = e^{-x} < 1$$

Et pour $x = 0$, on a $f_n(0) = 0$.En conclusion : la série de fonction **converge simplement** dans $IR^+ = [0, \infty[$.

**ii)** $f_n(x).= \dfrac{x}{n}e^{-nx} \Longrightarrow f_n'(x) = \left(\dfrac{1}{n} - x\right)e^{-nx}$

| $x$ | $0$ | $\frac{1}{n}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f\prime_n(x) = (1-nx)\,e^{-nx}$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f_n(x) = xe^{-nx}$ | $0 \nearrow$ | $\dfrac{1}{en^2}$ | $\searrow 0$ |

$\|f_n\|_\infty = \sup|f_n(x)| = \dfrac{1}{n^2e}$

La série de terme général $\|f_n\|_\infty = \dfrac{1}{n^2e}$ est une série numérique à termes positifs convergente ( équivalence avec une série de Riemann )

La série de fonctions de terme général $f_n(x).= \dfrac{x}{n}e^{-nx}$ converge donc normalement sur $IR^+ = [0, \infty[$.

**iii)** $f\ '_n(x) = \left(\dfrac{1}{n} - x\right)e^{-nx} \Longrightarrow f"_n(x) = -e^{-nx} - n\left(\dfrac{1}{n} - x\right)e^{-nx} = e^{-nx}(nx-2)$

| $x$ | $0$ | $\frac{2}{n}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f"_n(x) = e^{-nx}(nx-2)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f\prime n(x) = \left(\dfrac{1}{n} - x\right)e^{-nx}$ | $\dfrac{1}{n} \searrow$ | $-\dfrac{1}{ne}$ | $\nearrow 0$ |

$\|f\ '_n\|_\infty = \sup|f_n'(x)| = \dfrac{1}{n}$

La série de terme général $\|f\ '_n\|_\infty = \dfrac{1}{n}$ est divergente ( série harmonique ), ainsi la série de fonctions de terme général :

$$f\ '(x) = \left(\frac{1}{n} - x\right)e^{-nx}$$

ne converge pas normalement sur $\boldsymbol{R}^+ = [0, \infty[$.

# Exercice 7:

$u_n(x) = \dfrac{1}{n^2x+n^3},\ x \in [0,\ \infty[ \Longrightarrow |u_n(x)| \leq \dfrac{1}{n^3}.$

La série de fonctions est majorable donc normalement convergente sur $[0,\ \infty[$.La dérivée d'ordre $k$ est égale à :

$$u_n^{[k]}(x) = \frac{(-1)^k\, k! n^{2k}}{(n^2x+n^3)^{k+1}}$$

On a la majoration suivante

$$\left|u_n^{[k]}(x)\right| \leq \frac{k!}{n^{k+3}},\ k \geq 0$$

la série des kièmes dérivées est ainsi majorable $\Longrightarrow$ la série converge uniformément vers une fonction indéfiniment dérivale sur $[0,\ \infty[$.

**CHAPITRE 3**

# Séries entières

On appelle série entière ou série de puissance une série de fonctions de la forme

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ......a_n x^n + ............(1)$$

où $a_0,\ a_1,\ a_2, ......, a_n,$ .....sont des constantes données appelées coefficients de la série

(D'Abel)

**1)** Si un série entière converge pour $x_0 \neq 0$, elle converge absolument pour toute valeur de $x$ inférieure à $x_0$.

**2)** Si la série diverge pour $x_1 \neq 0$, elle diverge pour $x$ tel que $|x| \geq |x_1|$.

**1)** Par hypothèse, la série converge pour $x_0 \implies$ donc la série numérique

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + ...... + a_n x_0^n + ....$$

converge avec nécessairement $\underset{n\to\infty}{Lim} a_n x_0^n = 0.$

Ecrivons l'expression de la série (1) sous la forme suivante

$$a_0 + a_1 x_0 \frac{x}{x_0} + a_2 x_0^2 \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + ...... + a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n + ...$$

Par passage aux valeurs absolues, on obtient

$$|a_0| + |a_1 x_0| \left|\frac{x}{x_0}\right| + \left|a_2 x_0^2\right| \left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + ...... + |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n + .......(2).$$

Sachant que $\underset{n\to\infty}{Lim} a_n x_0^n = 0.$, $\exists\ M > 0$ tel que $|a_n x_0^n| < M$,
ce qui nous permet de faire une majoration de la série (2)
on a

$$M + M\left|\frac{x}{x_0}\right| + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + ...... + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n + .......(3).$$

Sachant que $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$, la série (3) est convergente $\implies$ la série (1) est donc absolument convergente.

**2)** Si en un point $x$ tel que $|x| \geqslant |x_1|$, la série (1) converge, d'aprés 1) elle va converger pour $x_1$, ce qui n"est pas possible, donc la série donnée diverge pour tous les $x$ tels que $|x| \geqslant |x_1|$.

- Remarque : Aux extrémités de l'intervalle, on a aucune information sur la convergence de la série.

# Calcul du rayon de convergence

Soit la série des valeurs absolues..

$$|a_0| + |a_1 x| + \left|a_2 x^2\right| + ...... + |a_n x^n| + ........$$

Appliquons le critère de D'alembert :

$$\underset{n\to\infty}{Lim} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \underset{n\to\infty}{Lim} \left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \underset{n\to\infty}{Lim} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x|$$

Il y a convergence si

$$\underset{n\to\infty}{Lim} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x| < 1 \Longrightarrow |x| < \frac{1}{\underset{n\to\infty}{Lim} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$$

Ce qui donne comme rayon de convergence

$$R = \underset{n\to\infty}{Lim} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

En faisant la mème chose avec la règle de Cauchy, on obtient

$$R = \frac{1}{\underset{n\to\infty}{Lim} \sqrt{|a_n|}}$$

Une série entière $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ...... + a_n x^n + ....$ est majorable sur tout intervalle fermé $[-\alpha, \alpha]$ entièrement contenu dans le domaine de convergence.

Comme $\alpha < R$ , la série numérique suivante

$$|a_0| + |a_1| \alpha + |a_2| \alpha^2 + ...... + |a_n| \alpha^n + ........$$

est convergente, mais pour $|x| < \alpha$, on a $|a_n x^n| < |a_n| \alpha^n$,
ce qui prouve que la série est majorable
sur l'intervalle fermé $[-\alpha, \alpha]$

1. La somme d'une série entière est une fonction continue sur tout intervalle fermé $[-\alpha, \alpha]$ entièrement contenu dans le domaine de convergence

2. Si les bornes d'intégration $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ appartiennent à l'intervalle de convergence d'une série entière, l'intégrale de la somme de la série est égale à la somme des intégrales de chaque terme de la série.

3 . Si on a $\mathrm{D}_c = (-R, R)$ pour la série

$$S(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ...... + a_n x^n + ....(1)$$

la série **des dérivées**

$$\varphi(x) = a_1 + 2a_2 x + ....... + (n+1)\, a_{n+1} x^n + ....(2)$$

admet le mème domaine de convergence avec en plus $\varphi(x) = S'(x)$.

On calcule le rayon de convergence de la série dérivée .

$$R = \underset{n\to\infty}{Lim} \left| \frac{(n+1)\, a_{n+1}}{(n+2)\, a_{n+2}} \right| = \underset{n\to\infty}{Lim} \left| \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} \right| = R$$

On a ainsi le même domaine de convergence, la série dérivée est alors majorable à l'intérieur de $\mathbf{D}_{c.}$,la série entière **(1)** est donc dérivable ce qui nous permet d'écrire

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

La série **(2)** peut être dérivée de nouveau et il est alors possible de continuer ce processus indéfiniment, en conclusion une série entière est $\mathbf{C}^{\infty}$sur tout intervalle contenu dans le domaine de convergence.

# Tableau des développements des fonctions usuelles

$$\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ......... + (-)\,\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + .............D_c = IR \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ......... + (-1)\,\frac{x^{2n}}{(2n)!} + ................D_c = IR \\
e^x &= \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ......... + \frac{x^n}{n!} + ................... ...D_c = IR \\
e^{-x} &= \frac{1}{0!} - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ......... + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + ................D_c = IR \\
shx &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ......... + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + .................D_c = IR \\
chx &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ......... + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + .....................D_c = IR \\
(1+x)^m &= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + ..... + \frac{m(m-1)....(m-(n+1))}{n!}x^n + ....
\end{aligned}$$

$$\text{Développement valable pour} \begin{cases} m \succeq 0 & D_c = [-1,\ 1] \\ -1 < m < 0, & D_c = ]-1,\ 1] \\ m \preceq -1, & D_c = ]-1,\ 1[ \end{cases}$$

**Application de la formule du binôme de Newton :**

- $\boxed{m = -1}$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + ........... + x^n + .............................D_c = ]-1, 1[ \\
\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 + ........... + (-1)^n x^n + .......................D_c = ]-1, 1[ \\
\ln(1-x) &= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - .......... - \frac{x^n}{n} - .........................D_c = ]-1, 1[ \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - .......... + (-1)^n \frac{x^n}{n} - ........................ .D_c = ]-1, 1[
\end{aligned}$$

- $\boxed{m=-\frac{1}{2}}$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1-\frac{1}{2}x+\frac{1.3}{2.4}x^2+.......+(-1)^n\frac{1.3.5........(2n-1)}{2.4.6..........(2n)}x^n+...\\
\frac{1}{\sqrt{1-x}} &= 1+\frac{1}{2}x+\frac{1.3}{2.4}x^2+.......+\frac{1.3.5........(2n-1)}{2.4.6..........(2n)}x^n+.\\
\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1.3}{2.4}x^4+.......+\frac{1.3.5........(2n-1)}{2.4.6..........(2n)}x^{2n}+.......\\
\arcsin x &= x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5}+.......+\frac{1.3.5........(2n-1)}{2.4.6..........(2n)}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}+...........\\
\arccos x &= \frac{\pi}{2}-x-\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}-\frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5}+.......-\frac{1.3.5........(2n-1)}{2.4.6..........(2n)}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}+.......\\
\arg\tan x &= x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-.............+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+.....................D_c=[-1,1]
\end{aligned}
$$

- 

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} &= 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1.3}{2.4}x^4+.......+(-1)^n\frac{1.3.5........(2n-1)}{2.4.6..........(2n)}x^{2n}+.......\\
\arg\sinh x &= \ln(x+\sqrt{1+x^2})=x-\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5}+.......+(-1)^n\frac{1.3.5........(2n-1)}{2.4.6..........(2n)}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}+.......\\
\arg\cosh x &= \ln(x+\sqrt{x^2-1})=\text{pas de dévellopement en série entière.}\\
\arg\coth x &= \ln(\frac{1+x}{1-x})=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-.............+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+.....................D_c=[-1,1]
\end{aligned}
$$

# Exercices

## Exercice 1:

Calculer le rayon de convergence des séries entières définies comme suit

$$a)\sum_{n=1}^{\infty} n\ \ x^n,\quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} n^2\ x^n\ ,\ c)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n\quad x^n}{n^2-1},\ d)\ \sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$$

$$e)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} n!x^{n^2},\quad f\ )\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{\cosh n}.$$

Faire l'étude aux bornes de l'intervalle de convergence pour chaque série.

## Exercice 2:

Calculer les sommes des séries entières suivantes :

$$a)\sum_{n=1}^{\infty} n\ \ x^n,\qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} n^2\ \ x^n\ ,\qquad c)\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n\quad x^n}{n^2-1}$$

## Exercice 3:

Calculer les sommes des trois séries entières suivantes pour tout $x$ réel :

$$F(x) = \sum_{n\ =\ 1}^{\infty} \cosh n\ \frac{x^{2n}}{n!},\qquad G(x) = \sum_{n\ =\ 1}^{\infty} \sinh n\ \frac{x^{2n}}{(2n)\,!}.,\quad H\,(x) = \sum_{n\ =\ 1}^{\infty}\ \frac{x^n}{(2n)\,!}$$

## Exercice 4:

Développer en série entière les fonctions suivantes

$$\frac{1}{(2x+3)^2},\qquad e^{\cos x},\qquad \tan x,\qquad (1+x)^x$$

$$\frac{x}{(1-x)^2},\qquad \ln\cos(x)$$

## Exercice 5:

Calculer le rayon de convergence et la somme de la série entière :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+4n+1}{n!} x^n$$

## Exercice 6:

Soit $j = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, une des racines cubiques de l'unité.
Calculer pour tout $k$ entier positif, la somme : $1+j^k+j^{2k}$.En déduire la somme de la série entière:

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$$

## Exercice 7:

Trouver la solution de l'équation différentielle $y'' - 2xy' - 4y = 0$ vérifiant les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

## Exercice 8:

Développer en série entière les fonctions suivantes : $f(x) = a^x \quad (a > 0)$, $g(x) = \cos(x+a)$, $h(x) = \sin(x+a)$.

# Solutions

## Exercice 1:

**a)** $\sum_{n=1}^{\infty} n\ x^n$ ,on applique le critère de **D'Alembert**

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)}. = 1$$

- Etude aux bornes :

$$x = 1 \Longrightarrow \text{on a} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n, \quad \text{la série est divergente}$$

$$x = -1 \Longrightarrow \text{on a} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n\,(-1)^n\text{, la série est divergente}$$

Domaine de convergence $]-1,1[$.

**b)** $\sum_{n=1}^{\infty} n^2\ x^n$, On applique le critère de **D'Alembert**

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$$

Aux bornes du domaine de convergence, pour $x = 1$ et $x = -1$, le terme général ne tend pas vers zéro, la série diverge, $\Longrightarrow$ Domaine de convergence $]-1,1[$.

**c)** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n\quad x^n}{n^2-1}$

**Calcul du rayon de convergence :**

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)\,(n-1)}.\frac{(n+2)\,n}{n+1} = 1$$

**Etude aux bornes de l'intervalle de convergence** $(-1,1)$

Pour $x = 1$, $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{n^2-1}$ la série ne converge pas ( équivalence avec la série harmonique)

Pour $x = -1$, $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1^n)\,n}{n^2-1}$ la série converge.(critère de **Liebniz**)

$\Longrightarrow$ Domaine de convergence $[-1,1[$ .

d) $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$, $\quad a_n = n! \Longrightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{n+1}$

$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 0 \Longrightarrow$ Domaine de convergence : $\{0\}$

**e)** $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^{n^2}$.

Pour trouver le rayon de convergence, on

applique le critère de **D'alembert**, ce qui donne :

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!\ x^{(n+1)^2}}{n!!x^{n^2}}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1)\,x^{2n+1}$$

La suite obtenue : $u_n = (n+1)\left|x\right|^{2n+1}$ converge vers 0 si $|x| < 1$

et tend vers $+\infty$ pour $|x| > 1$.

Si $|x| = 1$, le terme général de la série $n!\,(\pm 1)^{n^2}$ ne tend pas

vers 0, la série diverge.

$\Longrightarrow$ Domaine de convergence : $]-1, 1[$

*f)* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{\cosh n}$.

On utilise l'équivalence suivante :

$\cosh n = \frac{e^n - e^{-n}}{2} \approx \frac{e^n}{2}$ , $n \in \ \mathbb{V}(\infty)$

d'où : $\frac{x^{2n}}{\cosh n} \approx \frac{2x^{2n}}{e^n}$.

Pour trouver le rayon de convergence, on applique le critère de **D'alembert** ce qui nous donne : $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2x^{2n+2}}{e^{n+1}}.\frac{e^n}{2x^{2n}}\right| = \frac{x^2}{e} < 1 \Longrightarrow |x| < \sqrt{e}$,

Ainsi : $R = \sqrt{e}$

Etude aux bornes :

$x = \pm\sqrt{e} \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{\cosh n}$.et $\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{\cosh n} = 2$, la série diverge..

# Exercice 2:

**Calcul de la somme :** On a $n^2 = n(n-1) + n$ .

Ce qui nous permet d'écrire

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^n \\
&= x\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} + x^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}
\end{aligned}$$

Sachant que ( par dérivation des séries entières) :

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2},\ \textit{et}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

on a donc :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{2x^2}{(1-x)^3} = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}$$

Domaine de convergence $[-1,1[$

- En décomposant la fraction rationnelle en éléments simples, on a

$$S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n \quad x^n}{n^2-1}. = \frac{1}{2}\left[\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n-1}\right]$$

Si $x = 0$, $\mathbf{S}(x) = 0$
Si $x \neq 0$

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} + x\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x}\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n} + x\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\right] \end{aligned}$$

Sachant que $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, on obtient -

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{2x}\left[-x - \frac{x^2}{2} - \ln(1-x)\right] - \frac{x}{2}\ln(1-x) \\ &= -\frac{1}{2}\left[1 + \frac{x}{2} + \left(x + \frac{1}{x}\right)\ln(1-x)\right] \end{aligned}$$

# Exercice 3:

**a)** En écrivant

$\cosh(n) = \dfrac{e^n + e^{-n}}{2}$. On a :

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \cosh n \ \frac{x^{2n}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n + e^{-n}}{2} \ \frac{x^{2n}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(ex^2\right)^n + \left(e^{-1}x^2\right)^n}{2n!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(ex^2\right)^n}{2n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(e^{-1}x^2\right)^n}{2n!} = \tfrac{1}{2}\left(\left(e^{ex^2} - 1\right) + \left(e^{\frac{x^2}{e}} - 1\right)\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(e^{\mathbf{ex}^2} + e^{\frac{x^2}{e}}\right) - 1.$$

**b)** En écrivant $\sinh(n) = \dfrac{e^n - e^{-n}}{2}$ , on a :

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sinh n \ \frac{x^{2n}}{n!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n - e^{-n}}{2} \ \frac{x^{2n}}{(2n)\,!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{e}x)^{2n} - \left(\sqrt{e^{-1}}x\right)^{2n}}{2\,(2n)!}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{e}x)^{2n}}{(2n)!} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\sqrt{e^{-1}}x\right)^{2n}}{(2n)!}$$

$$= \frac{1}{2} \cosh \sqrt{e}x - \frac{1}{2} \cosh \frac{x}{\sqrt{e}} - 1.$$

**c)** $H(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)\,!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n}}{(2n)\,!} = \cosh(\sqrt{x}) - 1.$

# Exercice 4 :

**i)** $e^{\cos x} = e^{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}\cdots\cdots} = e(1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{3!} - \dfrac{31x^6}{720} - \ldots\ldots..)$

**ii)** $(1+x)^x = e^{\mathbf{x}\ln(1+x)} = 1 + x^2 - \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{5}{6}x^4 + \ldots.$

**iii)** $\dfrac{x}{(1-x)^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$

**iv)** Soit $f(x) = \ln\cos x$, en dérivant on a :

$$f\prime(x) = -\tan x \ = -x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \ldots$$

En passant à la primitive, on obtient

$$\ln\cos x = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{90} - \frac{17x^8}{2520} - \ldots..$$

# Exercice 5 :

**Calcul du rayon de convergence :**

$$\begin{aligned} r &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+4n+1}{n!} \cdot \frac{(n+1)!}{(n+1)^2+4(n+1)+1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(n^2+4n+1\right)(n+1)}{(n+1)^2+4(n+1)+1} = +\infty \end{aligned}$$

- On utilise l'écriture du polynome donné sous la forme suivante

$$n^2+4n+1 \ = a+bn+cn(n-1)$$

$\Longrightarrow a=1,\ c=1$

on a alors : $n^2+4n+1=1+bn+n(n-1)$
Calcul de $b$ : pour $n=1 \quad \Longrightarrow \quad 6=1+b \Longrightarrow b=5$
Ce qui donne

$$n^2+4n+1=1+5n+n(n-1)$$

On a ainsi :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+5n+n(n-1)}{n!}x^n &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}+5\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n-1)!}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{(n-2)!},\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}+5x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+x^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-2}}{(n-2)!},\\ &= \left(1+5x+x^2\right)e^x.\end{aligned}$$

# Exercice 6 :

Soit $j=e^{\frac{2\pi i}{3}}$, une des racines cubiques de l'unité.On a :
$j^{3k}=e^{2k\pi i}=1 \Longrightarrow 1-j^{3k}=\left(1-j^k\right)\left(1+j^k+j^{2k}\right)=0$
$\Longrightarrow 1+j^k+j^{2k}=0$ , .si k n'est pas un multiple de 3

$$e^x=\frac{1}{0!}+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+.....+\frac{x^n}{n!}+...$$

$$e^{jx}=\frac{1}{0!}+\frac{jx}{1!}+\frac{j^2x^2}{2!}+\frac{j^3x^3}{3!}+.....+\frac{j^nx^n}{n!}+...$$

$$e^{j^2x}=\frac{1}{0!}+\frac{j^2x}{1!}+\frac{j^4x^2}{2!}+\frac{j^6x^3}{3!}+.....+\frac{j^nx^n}{n!}+...$$

En additionnant les trois égalités, on a :

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}=\frac{e^x+e^{jx}+e^{j^2x}}{3}$$

# Exercice7:

$y"-2xy'-4y=0 \quad (1)$

On se propose de chercher la solution sous la forme d'une série entière :

$$y(x)=a_0 \ +a_1x+a_2x^2+....+a_nx^n+...$$

on a alors : $a_0=0,\ a_1=1$
Par conséquent :
$y(x)= \ x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+....+a_{n-3}x^{n-3}+a_{n-2}x^{n-2}+......$

$y'(x) = 1 \ + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + ......(n-2)a_{n-2}x^{n-3} + .....$
$y"(x) = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + ...... + n(n-1)a_nx^{n-2} + .....$

En substituant ces expressions dans l'équation (1), et par identification, on trouve :

$2a_2 = 0 \qquad \Longrightarrow a_2 = 0$
$6a_3 - 2 - 4 = 0 \qquad \Longrightarrow a_3 = 1$
$12a_4 - 4a_2 - 4a_2 = 0 \qquad \Longrightarrow a_4 = 0$

$$n(n-1)a_n - 2\,(n-2)\,a_{n-2} - 4a_{n-2} = 0 \qquad \Longrightarrow a_n = \frac{2a_{n-2}}{n-1}$$

On a donc : $a_5 = \dfrac{2a_3}{4} = \dfrac{1}{2},\ a_7 = \dfrac{2a_5}{6} = \dfrac{1}{3!},\ a_9 = \dfrac{2a_7}{8} = \dfrac{1}{4!}$

Finalement, on obtient : $a_{2n} = 0,\ a_{2n+1} = \dfrac{1}{n!}$

On a la solution suivante :
$y(x) = x + \dfrac{x^3}{1!} + \dfrac{x^5}{2!} + ..... + \dfrac{x^{2n+1}}{n!} + .... = \mathbf{xe}^{x^2}.$

# CHAPITRE 4
# Séries de Fourier

Remarque :

Si la série converge, sa somme est alors une fonction périodique de période $2\pi$.

Détermination des coefficients de Fourier .

Supposons que la fonction $f(x)$ périodique de période $2\pi$ soit représentée par une série de **Fourier** convergente dans l'intervalle $(-\pi,\ +\pi)$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + ......... + a_n \cos nx + b_n \sin nx + ...$$

On suppose que la série numérique des valeurs absolues des coefficients de Fourier :

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$$

soit convergente, donc la série de **Fourier** est majorable, ce qui permet d'écrire ce qui suit:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)dx &= \int_{-\pi}^{+\pi} \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right) dx \\
&= \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \int_{-\pi}^{+\pi} \cos nxdx + \int_{-\pi}^{+\pi} \sin nxdx \right] = \pi a_0
\end{aligned}$$

Sachant que

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{+\pi} \cos nxdx &= \left[ \frac{\sin nx}{n} \right]_{-\pi}^{+\pi} = 0 \\
\int_{-\pi}^{+\pi} \sin nxdx &= \left[ -\frac{\cos nx}{n} \right]_{-\pi}^{+\pi} = -\frac{1}{n} \left[ \cos n\pi - \cos(-n\pi) \right] = 0
\end{aligned}$$

on a alors la première formule de Fourier

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(x)dx$$

On utilise les identités trigonométriques

$$\begin{aligned}
\sin mx \cos nx &= \frac{1}{2}\left[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right] \\
\cos mx \cos nx &= \frac{1}{2}\left[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right] \\
\sin mx \sin nx &= \frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right]
\end{aligned}$$

Pour calculer les intégrales suivantes :

- Pour $n \neq m$

$$\left\{\int\limits_{-\pi}^{+\pi} \sin mx \cos nx dx = 0, \quad \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \cos mx \cos nx dx = 0, \quad \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \sin mx \sin nx dx = 0\right.$$

- Pour $n = m$ $(n \succeq 1)$

$$\left\{\begin{array}{l}
\int\limits_{-\pi}^{+\pi} \cos^2(nx)dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} \left[\cos(2nx) + 1\right] dx = \pi \\
\int\limits_{-\pi}^{+\pi} \sin^2(nx)dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} \left[1 - \cos(2nx)\right] dx = \pi
\end{array}\right.$$

On a les formules de Fourier

$$\left\{\begin{array}{l}
a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx dx \\
b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin nx dx
\end{array}\right.$$

- Remarque :
  Soit $f(x)$ une fonction périodique et de période $2\pi$, pour tout $\lambda$ réel on a

$$\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(x)dx = \int\limits_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x)dx$$

Décomposons l'intégrale

$$\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x)dx = \int_{\lambda}^{-\pi} f(x)dx + \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx + \int_{\pi}^{\lambda+2\pi} f(x)dx$$

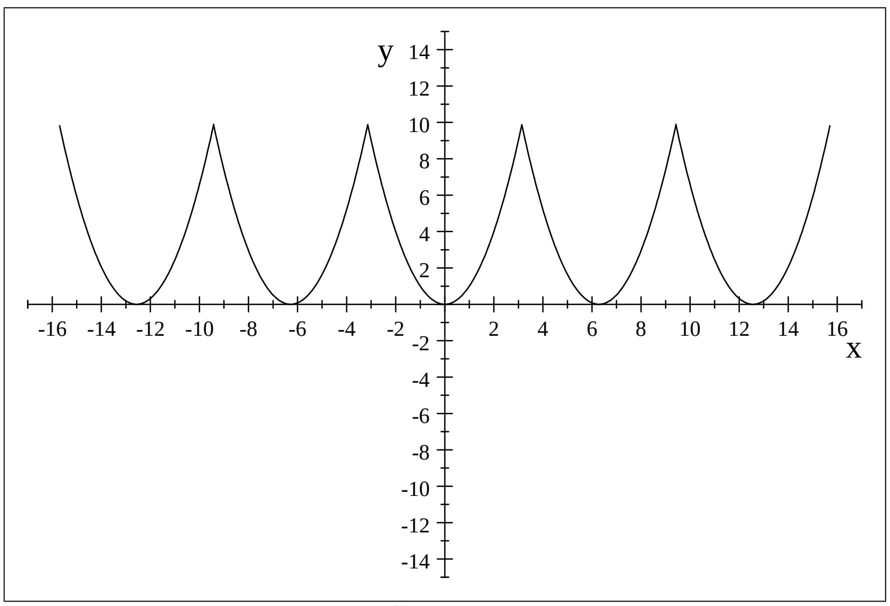
Dans la dernière intégrale, il suffit de faire le changement de variable suivant $x = t + 2\pi$, on obtient :

$$\int_{\pi}^{\lambda+2\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\lambda} f(t)dt$$

Donc l'intégrale d'une fonction périodique a la même valeur si l'on intégre sur un intervalle arbitraire dont la longueur est égale la période.

- Soit la fonction périodique de période $2\pi$ définie par

$$f(x) = x^2, \ -\pi \preceq x \preceq \pi$$




Graphe

Calcul des coefficients :

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{1}{\pi}\left[\left[\frac{x^2 \sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n}\int_{-\pi}^{+\pi} x \sin nx dx\right]$$

$$a_n = -\frac{2}{n\pi}\left[\left[-\frac{x\cos n\pi}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos nx dx\right] = \frac{4}{n^2}\cos n\pi$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx dx = 0$$

Comme la fonction donnée est monotone par morceaux, bornée et

continue, la fonction est égale à sa série de **Fourier**

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + ...\right), \quad x \in [-\pi, +\pi]$$

Pour $x = 0$,on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

Pour $x = \pi \Longrightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

# Séries de Fourier des fonctions de période 2 $\omega$

Soit **f** une fonction périodique de période $2\omega$.On fait le changement de variable: $\mathbf{x} = \frac{\omega}{\pi}\mathbf{t}$.La nouvelle fonction $\mathbf{f}\left(\frac{\omega}{\pi}\mathbf{t}\right)$ est alors périodique de période $2\pi$ développons là en série de **Fourier :**

$$\mathbf{f}\left(\frac{\omega}{\pi}\mathbf{t}\right) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos t + b_1\sin t + ... + a_n\cos nt + b_n\sin nt + ...$$

avec

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\mathbf{f}\left(\frac{\omega}{\pi}\mathbf{t}\right)\cos ntdt,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\mathbf{f}\left(\frac{\omega}{\pi}\mathbf{t}\right)\sin ntdt$$

Avec le retour à la variable $x$, on a :

$$t = \frac{\omega}{\pi}x \Longrightarrow dt = \frac{\omega}{\pi}dx$$

Ce qui nous donne :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\omega}^{\omega}\mathbf{f}\ (x)\ \cos\frac{n\ \omega}{\pi}xdx,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\omega}^{\omega}\mathbf{f}\ (x)\ \sin\frac{n\ \omega}{\pi}xdx$$

Le développement de Fourier va alors s'écrire comme suit :

$$\mathbf{f}\ (x)\ = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \frac{\omega}{\pi} x + b_1 \sin \frac{\omega}{\pi} x + ... + a_n \cos n \frac{\omega}{\pi} x + b_n \sin n \frac{\omega}{\pi} x + ...$$

# Séries de Fourier des fonctions paires et impaires

Si $f(x)$ est paire, on a le résultat suivant :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\pi} f(x)dx = -\int_{\pi}^{0} f(-t)dt + \int_{0}^{\pi} f(x)dx = 2\int_{0}^{\pi} f(x)dx$$

Si $f(x)$ est impaire, on a :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\pi} f(x)dx = -\int_{\pi}^{0} f(-t)dt + \int_{0}^{\pi} f(x)dx = 0$$

En appliquant ces résultats aux calculs des oefficients de Fourier d'une fonction paire, on obient

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x) \cos nx dx \qquad et \qquad b_n = 0$$

Pour une fonction impaire, on a

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad et \quad a_n = 0$$

# Séries de Fourier sous forme complexe

Soit la fonction $f(x)$ périodique de période $2\pi$ représentée par sa série de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

En utilisant la formule d'Euler, on peut écrire

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \quad \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$

Ce qui nous donne

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} \right] \end{aligned}$$

Posons alors

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \quad et \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$$

On peut écrire la série de fourier sous la forme suivante :

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

On a ainsi la formulation complexe de la série de Fourier avec :

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) e^{-inx} dx, \qquad n \in Z$$

# Approximation en moyenne d'une fonction au moyen d'un polynome trigonométrique

Soit une fonction $f(x)$ sur $[a,b]$ et on essaye d'évaluer l'erreur commise lorsqu'on remplace cette fonction par une autre fonction $g(x)$.On peut par exemple considérer que l'erreur est représentée par l'expression :

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$$

Ceci est appelé **écart maximum.**Mais on utilise beaucoup plus **l'écart quadratique moyen** $\delta$ défini par :

$$\delta^2 = \frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 \, dx$$

- # Données du problème :
-

Soit une fonction périodique $f(x)$ de période $2\pi$. Parmi tous les polynömes trigonométriques d'ordre $n$

$$\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx$$

On montre que c'est **le polynöme de Fourier** qui donne la meilleure approximation possible, dans ce cas on a l'écart quadratique comme suit :

$$\delta^2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f^2(x)dx-\frac{a_0^2}{2}-\sum_{k=1}^{n}a_k^2+b_k^2$$

on en déduit l'inégalité de Bessel :

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f^2(x)dx\succeq\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right)$$

Et si on fait tendre $n$ vers l'infini, l'écart quadratique est nul ($\delta=0$) et on obtient l'égalité de Liapounov-Parseval :

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f^2(x)dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)$$

# Exercices

## Exercice 1:

Développer en série de **Fourier** la fonction $2\pi$-périodique définie sur $]-\pi,+\pi[$ par : $f(x) = x^2$.

- En déduire les valeurs des séries numériques :

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, B = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}, C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

- En utilisant l'égalité de Liapounov- Parseval :

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{\,2}(x)dx$$

Calculer les sommes:

$$D = \sum_{n \succeq 1}^{\infty} \frac{1}{n^4}, E = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$$

## Exercice 2 :

Soit $f$ la fonction de période $2\pi$ et impaire, égale à $\left(\frac{\pi - x}{2}\right)$ sur $]0,\pi]$.

**i)** Tracer le graphe de $f$ sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.
**ii)** Donner l'expression de $f$ dans l'intervalle $]-\pi, 0]$.
**iii)** Calculer les coefficients de **Fourier** .
**iv)** Ecrire la fonction $f$ en série de Fourier . En déduire la valeur de :

$$\sum_{n \succeq 1} \frac{\sin(n)}{n}$$

## Exercice 3 :

Soit $f$ la fonction de période $2\pi$, égale à :

$$f(x) = \begin{cases} 0 \; si \; x \; \in \; ]-\pi, 0] \\ 4x \; si \; x \; \in \; ]0, \pi] \end{cases}$$

- Tracer le graphe de $f$ sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$
- Calculer les coefficients de **Fourier** et donner le développement de $f$ en série de **Fourier.**
- Etudier le cas $x = 0$, en déduire la valeur de la somme de la série numérique :

$$\sum_{n \succeq 1} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

# Exercice 4 :

Soit $f$ la fonction de période $2\pi$, définie par :

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^3 - \boldsymbol{\pi}^2 \mathbf{x} \quad si \; x \; \in \; [-\pi, +\pi]$$

- Trouver l'expression de la fonction $f$ sur l'intervalle $[+\pi, 3\pi]$.
- Tracer le graphe sur l'intervalle $[-\pi, 3\pi]$.
- Calculer les coefficients de **Fourier** associés à la fonction $f$
- Donner le développement de $f$ en série de **Fourie**r.

# Exercice 5 :

Soit $f$ la fonction périodique de période $2\pi$, définie par :

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - |x|, \quad x \in \; [-\pi, \pi].$$

- Tracer le graphe de $f$ sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$.
- Calculer les coefficients de **Fourier et** écrire la série de **Fourier** de $f$ .

- Calculer, en utilisant la formule de **Liapounov-Parseval,** la somme de la série numérique :
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$$

## Exercice 6 :

Soit $f$ la fonction impaire, périodique, définie par :

$$f(x) = \cos x, \quad x \in \ ]0, \pi[\,.$$

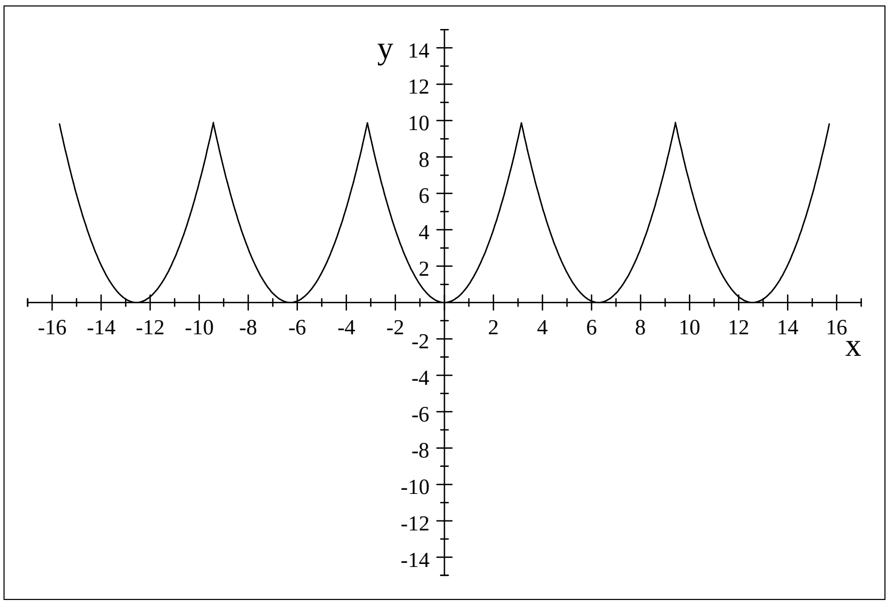
- Tracer le graphe de $f$ sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.
- Donner l'expression de $f$ dans l'intervalle $]-\pi, 0[$.
- Calculer les coefficients de **Fourier et** écrire la série de **Fourier** de $f$ .

# SOLUTIONS

## Exercice 1 :

Soit la fonction périodique de période $2\pi$ définie par :

$$f(x) = x^2, \ -\pi \preceq x \preceq \pi$$




Graphe

La fonction est paire $\Longrightarrow b_n = 0$, autrement dit la fonction est développable en série de **cosinus.**

(ii) Calcul de $a_0$ : $a_0 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi x^2 dx = \dfrac{2}{3}\pi^2$

Calcul des $a_n$ :

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2 \cos(nx)dx$$

On fait une intégration par parties en posant :

$$\begin{aligned} u &= x^2 \Longrightarrow du = 2xdx \\ dv &= \cos(nx)dx \Longrightarrow v = \frac{\sin(nx)}{n} \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2 \sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{2x \sin(nx)}{n} dx = -\frac{4}{n\ \pi}\int_0^{\pi} x \sin(nx)\, dx$$

En utilisant une deuxième fois l'intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} u &= x \Longrightarrow du = dx \\ dv &= \sin(nx)dx \Longrightarrow v = -\frac{\cos(nx)}{n} \end{aligned}$$

$$a_n = -\frac{4}{n\ \pi}\left(\left[-\frac{x\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos(nx)}{n} dx\right)$$

L'intégrale restant à calculer étant nulle, on a finalement :

$$a_n = \frac{4\,(-1)^n}{n^2}$$

Comme la fonction est monotone par tranches, bornée et continue sur $\mathbb{R}$, la série de **Fourier** de la fonction donnée s'écrit :

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + .... + \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2} + ..\right)$$

Pour $x = 0$, on a :

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + .... + \frac{(-1)^n}{n^2} + .. = \frac{\pi^2}{12}.$$

Pour $x = \pi$, on obtient :

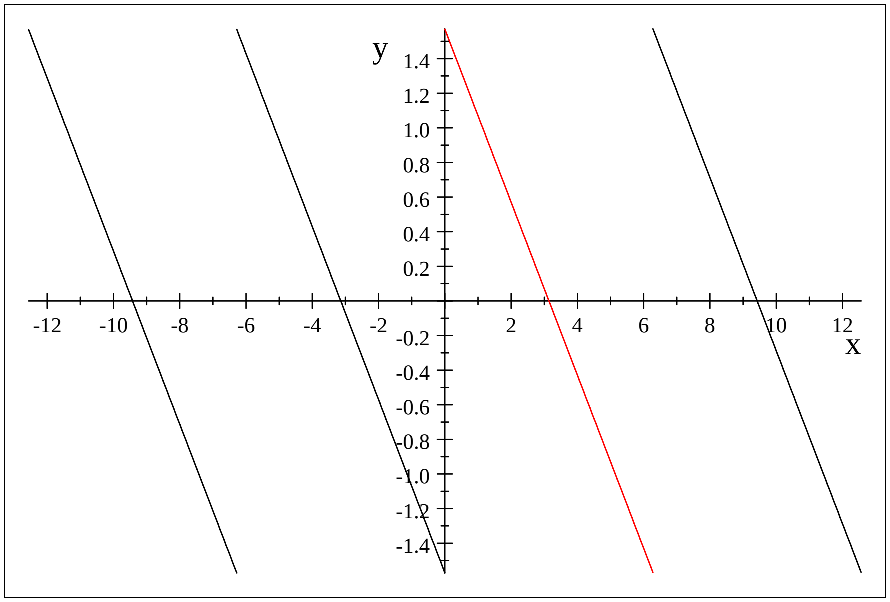
$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(-\frac{1}{1} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - .... - \frac{1}{n^2} + ..\right)$$

Ce qui donne : $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + .... + \frac{1}{n^2} + . = \frac{\pi^2}{6}$

$D = \sum_{n\succeq 1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$, $E = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$

# Exercice 2 :

(i) **Graphe de la fonction sur** $]-2\pi, 2\pi[$ :




Graphe

(ii) **Calcul des coefficients de Fourier**

La fonction est impaire $\Longrightarrow a_0 = a_n = 0$, autrement dit la fonction est développable en série de sinus.

(ii) Calcul des $b_n$ :

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)}{2} \sin(nx) dx$$

On fait une intégration par parties en posant :

$$\begin{aligned} u &= \frac{(\pi - x)}{2} \Longrightarrow du = -\frac{dx}{2} \\ dv &= \sin(nx) dx \Longrightarrow v = -\frac{\cos(nx)}{n} \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{(\pi - x)\cos(nx)}{2n} \right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos(nx)}{2n} dx$$

On a finalement

$$b_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{n}$$

(iii) D'aprés le théorème de **Dirichlet**, vu que la fonction est bornée, monotone par morceaux, on a

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}, \quad si \quad x \ \in ]0, \pi]$$

La fontion étant continue au point $x = 1$,d'aprés toujours le théorème de **Dirichlet**, on a :

$$\frac{\pi - 1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n}, \ x \in ]0, \pi]$$

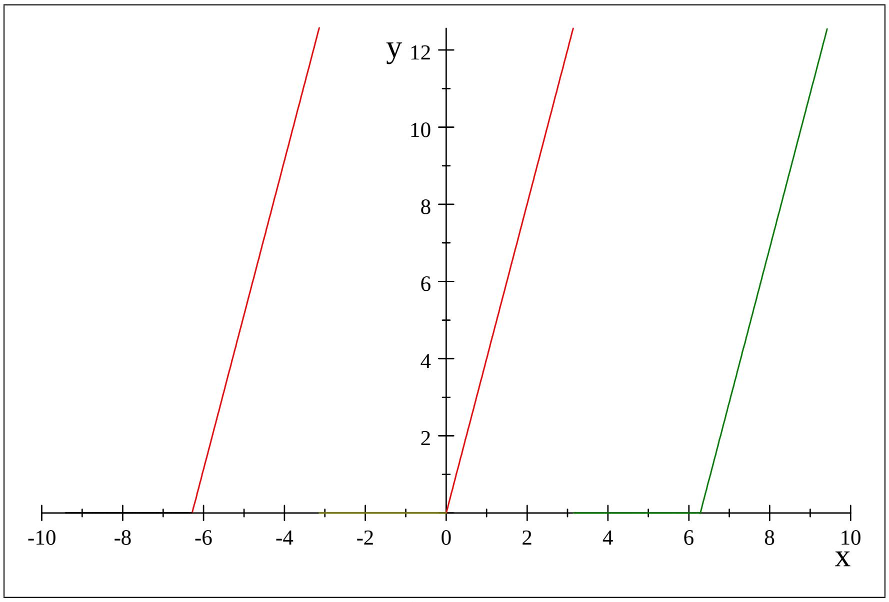
(iv) En utlisant la formule de **Liapounov-Parseval**, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \left(\frac{\pi - x}{2}\right)^2 dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{-(\pi - x)^3}{12}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{6}$$

Ce qui donne finalement : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

# Exercice 3 :

Graphe de la fonction sur $]-3\pi, 3\pi[$ :




Graphe

- **Calcul des coefficients de Fourier :**

La fonction donnée n'est ni paire ni impaire .

# Calcul de $a_0$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 4xdx = 2\pi$$

# Calcul des $a_n$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 4x\cos(nx)dx$$

On fait une intégration par parties en posant :

$$\begin{aligned} u &= 4x \Longrightarrow du = 4dx \\ dv &= \cos(nx)dx \Longrightarrow v = \frac{\sin(nx)}{n} \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{4x\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(nx)}{n}dx = \frac{4}{\pi n^2}\left[\cos nx\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{4}{\pi n^2}\left[\cos n\pi - 1\right] = \frac{4}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right] = \begin{cases} -\dfrac{8}{\pi n^2} & \text{pour } n \text{ impair} \\ 0, & \text{pour } n \text{ pair} \end{cases} \end{aligned}$$

## Calcul des $b_n$ :

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 4x\sin(nx)dx$$

On fait une intégration par parties en posant :

$$\begin{aligned} u &= 4x \Longrightarrow du = 4dx \\ dv &= \sin(nx)dx \Longrightarrow v = -\frac{\cos(nx)}{n} \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{4x\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos(nx)}{n}dx$$

On a finalement

$$b_n = \frac{4\pi}{\pi}(-1)^{n+1} = \begin{cases} \frac{4}{n} & \text{pour } n \text{ pair} \\ -\frac{4}{n} & \text{pour } n \text{ impair} \end{cases}$$

D'aprés le théorème de **Dirichlet**, vu que la fonction est bornée, monotone par morceaux, on a dans l'intervalle $]0, 2\pi[$

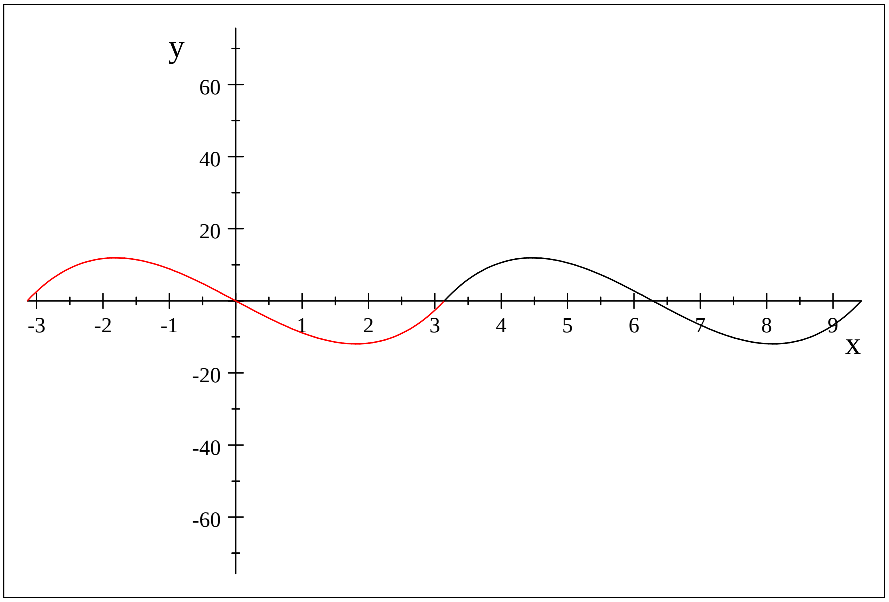
$$f(x) = 4x = \pi - \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{8}{\pi(2n-1)^2}\cos(2n-1)x + (-1)^{n+1}\ \frac{4}{n}\sin(nx)\right]$$

La fonction étant continue à l'origine, l'égalité ci-dessus est valable pour $x = 0$, d'où

$$f(0) = 0 = \pi - \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{8}{\pi(2n-1)^2}\right] \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

# Exercice 4 :

Graphe de la fonction sur $]-\pi, 3\pi[$ :




Graphe

- Expression de la fonction f sur l'intervalle $[\pi, 3\pi]$

$$f(x) = f(x-2\pi) = (x-2\pi)^3 - \pi^2(x-2\pi)$$

**Calcul des coefficients de Fourier.**

La fonction donnée étant impaire $\Longrightarrow a_0 = a_n = 0$

## Calcul des $b_n$ :

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(x^3 - \pi^2 x\right)\sin(nx)\,dx$$

Pour le calcul, on utilise une intégration par parties en posant :

$$\begin{aligned} u &= x^3 - \pi^2 x \Longrightarrow du = \left(3x^2 - \pi^2\right)dx \\ dv &= \sin(nx) \qquad \Longrightarrow v = -\frac{\cos(nx)}{n} \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$b_n = \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi \left(3x^2 - \pi^2\right)\cos(nx)\,dx$$

Pour terminer les calculs, on utilise le même procédé ( on fait alors deux intégration par parties) d'où le résultat suivant :

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(x^3 - \pi^2 x\right)\sin(nx)\,dx = (-1)^n\,\frac{12}{n^3}$$

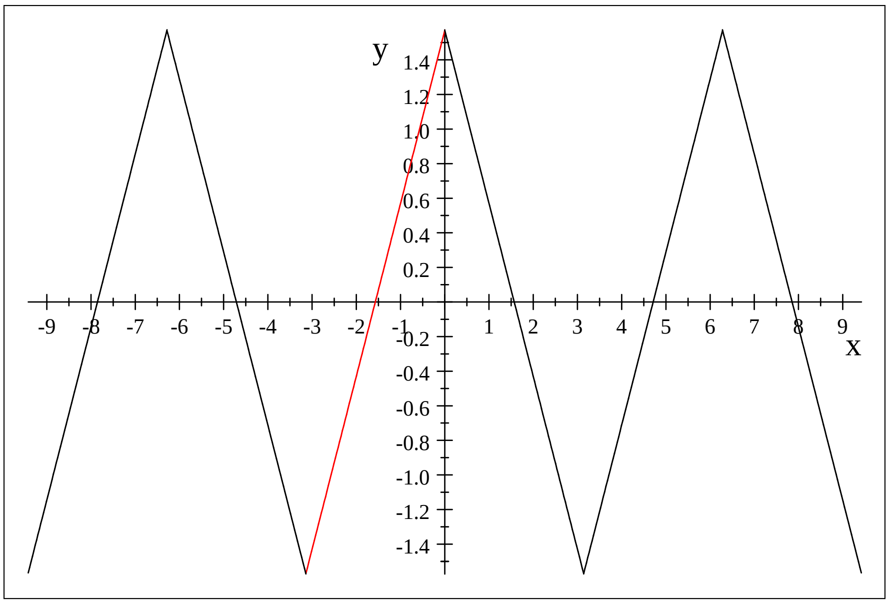
**Développement en série de Fourier**

La fonction f étant continue, elle est alors égale à sa série de Fourier :

$$f(x) = x^3 - \pi^2 x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{12}{n^3} \sin(nx), \quad x \in [-\pi, +\pi]$$

# Exercice 5 :

Graphe :




Graphe

ii) ( 3 points ) **Calcul des coefficients de Fourier**

la fonction est paire $\Longrightarrow$ $\mathbf{b}_n = \mathbf{0}$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = 0$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos nx dx$$

On fait une intégration par parties en posant

$u = \left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad dv = \cos nx dx$

$du = -dx; \quad v = \dfrac{\sin(nx)}{n}$

Ce qui nous donne :

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left[\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(nx)}{n}dx = -\frac{2}{\pi n^2}\left[\cos(nx)\right]_0^{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi n^2}\left[1 - (-1)^n\right]$$

La fonction est continue, monotone, bornée sur $\mathbb{R}$, elle est égale à sa série de Fourier

$$\boldsymbol{f(x)} = \frac{4}{\pi}\left[\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + ..... + \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} + ...\right].$$

ou encore :

$$\frac{\pi}{2} - x = \frac{4}{\pi}\left[\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + ..... + \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} + ...\right], \; x \in [0, \pi]$$

## • Formule de Liapounov-Parseval :

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(x)dx \quad (\ f \text{ étant une fonction paire })$$

Ce qui donne :

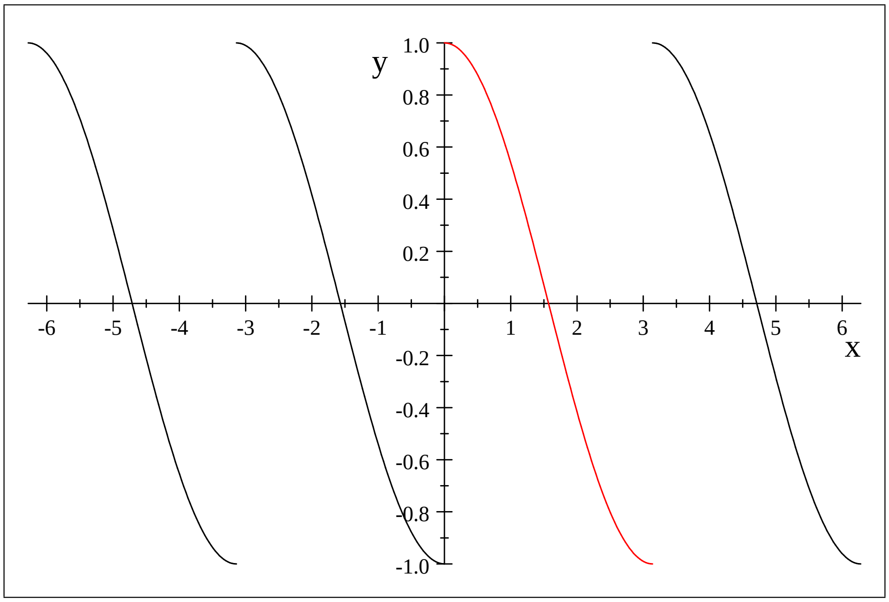
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{\pi^2(2n+1)^4} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right)^2 dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^3}{3}\right]_0^{\pi}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{\pi^2(2n+1)^4} = \frac{2}{3\pi}\left[2\left(\tfrac{\pi^3}{8}\right)\right] = \frac{\pi^2}{6}$$

Finalement on obtient : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$

# Exercice 6 :

**i)** Graphe : $f$ est impaire, périodique et $f(x) = \cos x$ , $x \in ]0, \pi[$




Graphe

**ii)** L'expression de $\mathbf{f}$ l'intervalle $]-\pi, 0[$ : $f(\mathbf{x}) = -\cos \mathbf{x}$, la fonction donnée est de période $\pi \Longrightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \cos(\mathbf{x} + \boldsymbol{\pi}) = -\cos \mathbf{x}$.

**iii) Calcul des coefficients de Fourier :** La fonction $\mathbf{f}$ étant impaire $\Longrightarrow \mathbf{a}_0 = \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$.

**Calcul des $\mathbf{b}_n$** : La période est égale à : $T = 2\omega = \pi \Longrightarrow \omega = \dfrac{\pi}{2}$

$$\mathbf{b}_n = \frac{2}{\omega} \int_0^{\omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \sin \frac{n\pi}{\omega} x dx = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \mathbf{x} \sin 2nx dx$$

Sachant que :

$$\cos \mathbf{x} \sin 2nx = \frac{\sin{(2n+1)x} + \sin(2n-1)\,x}{2}$$

on a :

$$\mathbf{b}_n = \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{\cos(2n+1)x}{2n+1} - \frac{\cos(2n-1)x}{2n-1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8n}{\pi\,(4n^2-1)}$$

**Développement de Fourier :** $\mathbf{f}$ est une fonction monotone, bornée, continue par morceaux elle est égale à sa série de Fourier aux points de continuité,

$\Longrightarrow$.

$$\cos x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n}{\pi\,(4n^2-1)} \sin 2nx,\ \ x \in \left]0, \pi\right[$$

Aux points de discontinuité de première espèce, exemple au point $x = 0$, la série de **Fourier** est égale à la moyenne arithmétique de la limite à gauche, et de la limite à droite pour $x = 0$, ce qui donne :

$$\frac{f(0-0)+f(0+0)}{2} = \frac{(-1)+1}{2} = 0$$

**CHAPITRE 5 :**

**Sujets d'examens corrigés**

**Examen du 6 février 2011** :

# Exercice 1 :

Etudier la convergence des séries numériques suivantes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n^2+n+1)}, \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n}}, \sum_{n\succeq 1} \left(\frac{2n}{1+2n}\right)^{2n} \ ,$$
$$\sum_{n\succeq 0} \frac{n^2+n+1}{n!}, \ \sum_{n\succeq 0} \left[3\ln\left(n^2+1\right) - 2\ln\left(n^3+1\right)\right].$$

# Exercice 2 :

Soit la série de fonctions

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x(1-x)x^n \ , \quad x \in [0,1]$$

1. Calculer la somme $S(x)$ de la série sur $[0,1]$ .
2. Calculer la norme : $\|f_n\|_\infty = \sup\limits_{x \in [0,1]} |f_n(x)|$.
3. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\|$, est ce que la convergence est normale ?

# Exercice 3 :

Soit $f$ la fonction paire, périodique de période $2\pi$, définie par :

$$f(x) = |\pi - x|, \quad x \in [0,\pi].$$

1. Donner l'expression de **f** dans l'intervalle $[-\pi, 0]$.
2. Tracer le graphe de **f** sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$.
3. Calculer les coefficients de **Fourier .**

4. Ecrire la série de Fourier de $\mathbf{f}$ .
5. Etudier le cas $\mathbf{x} = \boldsymbol{\pi}$ .

# SOLUTIONS

## Exercice 1 :

$\dfrac{1}{\ln(n^2+n+1)} \approx \dfrac{1}{2\ln(n)}$ **DV** ( série de **Bertrand** )

$\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n}}$ **CV** ( série alternée, critère de **Leibniz** )

$\left(\dfrac{2n}{1+2n}\right)^{2n} = \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{2n}} \to \dfrac{1}{e} \neq 0$ **DV**

$\dfrac{n^2+n+1}{n!} \approx \dfrac{n^2}{n!}$ **CV** ( critère de **D'Alembert** )

$$\begin{aligned}
u_n &= \left[3\ln\left(n^2+1\right) - 2\ln\left(n^3+1\right)\right] \\
&= 3\ln\left(n^2\right) + 3\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) - 2\ln\left(n^3\right) - 2\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right) \\
&= 3\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) - 2\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right) \\
&\approx \frac{3}{n^2}
\end{aligned}$$

**CV** ( série de **Riemann** ).

## Exercice 2 :

- $s(x) = \begin{cases} x, & si \;\; x \in [0,1[ \\ 0, & si \;\; x = 1 \end{cases}$
- $f_n(x) = x(1-x)x^n \implies f_n'(x) = \left[(n+1)-(n+2)x\right]x^n$

| $x$ | $0$ | | $\dfrac{n+1}{n+2}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'_n(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f_n(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $\dfrac{n+1}{(n+2)^2}\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^n$ | $\searrow$ | $0$ |

$$\|f_n\|_\infty = \frac{n+1}{(n+2)^2}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$$

$$\|f_n\|_\infty = \frac{n+1}{(n+2)^2}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}$$

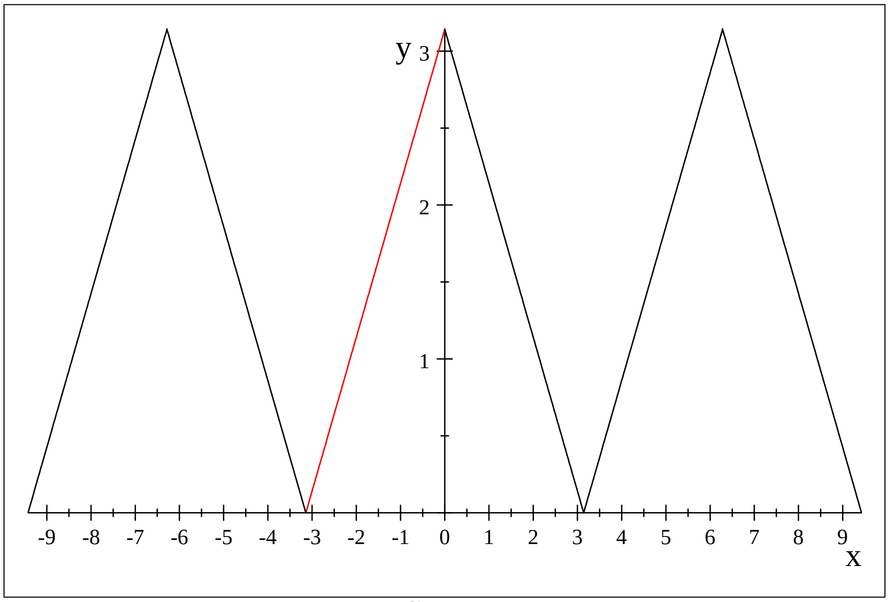
Sachant que $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n = e^a$

$\implies \|f_n\|_\infty \approx \dfrac{1}{ne} \implies \lim\limits_{n\to\infty}\|f_n\| = 0$

- Comme la série numérique de terme général $\left( u_n = \dfrac{1}{ne} \right)$ diverge .La convergence n'est pas normale.

# Exercice 3 :

- $\mathbf{f}(x) = x + \pi, \quad x \in \; [-\pi, 0]$
- **Graphe**




Graphe

- **Calcul des coefficients de Fourier**

la fonction est paire $\Longrightarrow$ $\mathbf{b}_n = \mathbf{0}$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi - x)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{(\pi - x)^2}{2}\right]_0^\pi = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi - x)\cos nx dx$$

On fait une intégration par parties en posant

$u = \pi - x, \quad dv = \cos nx dx$

$du = -dx; \quad v = \dfrac{\sin(nx)}{n}$

Ce qui donne : $a_n = \dfrac{2}{\pi}\left[(\pi - x)\dfrac{\sin(nx)}{n}\right]_0^\pi + \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \dfrac{\sin(nx)}{n}dx = -\dfrac{2}{\pi}\left[\dfrac{\cos nx}{n^2}\right]_0^\pi$

$$a_n = -\frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos n\pi - 1}{n^2}\right] = \frac{2}{\pi n^2}\left[1 - (-1)^n\right]$$

- La fonction est continue, monotone, bornée sur $\mathbb{R}$, elle est égale à sa série de Fourier $\boldsymbol{f(x)} = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\left[\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + ..... + \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} + ...\right]$.

ou encore :

$$\pi - x = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\left[\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + ..... + \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} + ...\right],\ x \in [0, \pi]$$

- Pour $x = \pi$, on a ( Théorème de **Dirichlet** )

$$0 = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\left[-1 - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} - ........ - \frac{1}{(2n+1)^2} - ....\right]$$

$$\Longrightarrow 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + ........ + \frac{1}{(2n+1)^2} + .... = \frac{\pi^2}{8}$$

# Examen de février 2010

## Exercice 1 :

- Donner l'expression du terme général de la série :

$$\frac{1}{1}-\frac{2}{5}+\frac{3}{9}-\frac{4}{13}+\frac{5}{17}.....$$

Etudier alors la convergence.

- Etudier la convergence des 5 séries numériques suivantes :

$$\sum_{n\succeq 1}\frac{1}{\sqrt{n}},\qquad \sum_{n\succeq 1}\log n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\sum_{n\succeq 0}\frac{3+n^2}{n!},\qquad \sum_{n\succeq 0}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2},\qquad \sum_{n\succeq 1}\frac{(-1)^n+1}{n}.$$

## Exercice 2 :

Soit la série de fonctions $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}x^2\left(1-x\right)^n.,\quad x\in[0,1]$

1. Calculer la somme $S(x)$ de la série sur $[0,1]$
2. Calculer la norme suivante : $\|f_n\|_{\infty}=\sup\limits_{x\in[0,1]}|f_n(x)|$
3. Caractériser les types de convergence.

## Exercice 3 :

Soit **f** la fonction périodique de période $2\pi$ égale à :

$$\cos\frac{x}{2}\quad sur\ \ [-\pi,\pi]$$

1. Tracer le graphe de **f** sur l'intervalle $[-3\pi,3\pi]$
2. Calculer $a_0\ et\ b_n$
3. Montrer que : $a_n=\dfrac{4\left(-1\right)^{n+1}}{\pi\left(4n^2-1\right)}$
4. Donner le développement de **f** en série de Fourier

# SOLUTIONS

## Exercice 1 :

- $u_n = \dfrac{(-1)^n (n+1)}{4n+1}$ , le terme général n'a pas de limite **la série diverge**

- $\sum\limits_{n \succeq 1} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, série divergente

- $\log n \log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\log\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right) \approx \dfrac{\log n}{n^3}$ , série de **Bertrand** convergente

- $\dfrac{3+n^2}{n!} \approx u_n = \dfrac{n^2}{n!}$, critère de D'Alembert

$$\underset{n\to\infty}{Lim}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \underset{n\to\infty}{Lim}\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}.\frac{n!}{n^2} = \underset{n\to\infty}{Lim}\frac{n+1}{n^2} = 0$$

**La série est convergente** .

- $\sum\limits_{n \succeq 0} \left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{n^2}$ , $u_n = \left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{n^2}$

On applique le critère de Cauchy

$$\underset{n\to\infty}{Lim}\sqrt{u_n} = \underset{n\to\infty}{Lim}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n = \underset{n\to\infty}{Lim}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n} = \frac{e}{e^2} = \frac{1}{e} \prec 1$$

**La série est convergente** .

- $\sum\limits_{n \succeq 1} \dfrac{(-1)^n+1}{n}$ :

On a la somme de deux séries, l'une est convergente ( série harmonique alternée), l'autre est divergente ( série harmonique),la somme est divergente**.**

## Exercice 2 :

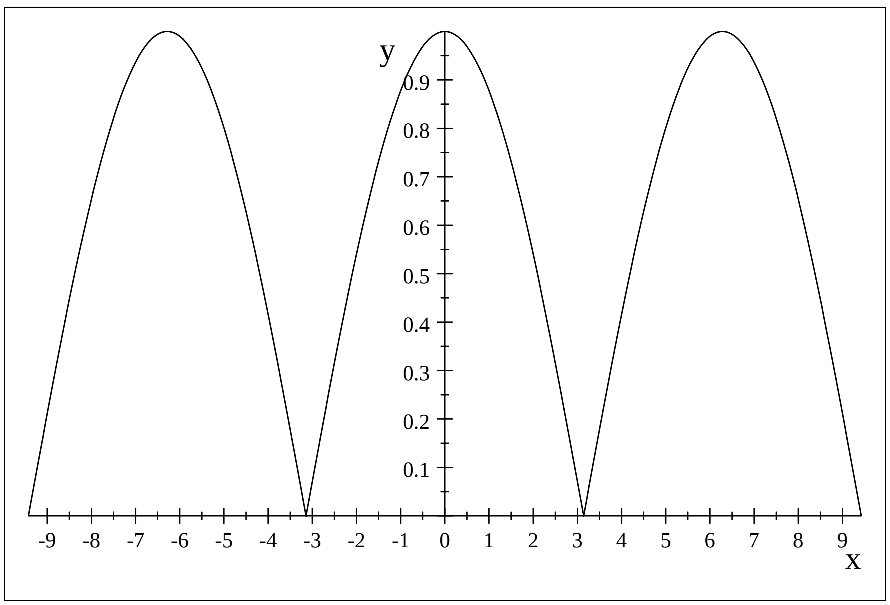
- On a une série géométrique de raison $(1-x) \Longrightarrow s(x) = x$

avec $s(0) = 0$ et $s(1) = 1$ donc $s(x) = x$ sur $[0,1]$ .( 2 points )

- $\|f_n\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = \dfrac{4}{(2+n)^2} \cdot \dfrac{1}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n} \approx \dfrac{A}{n^2}$ terme général d'une série convergente.
- On a alors tous les types de convergence: normale, uniforme, absolue et simple sur $[0,1]$ .

# Exercice 3 :

- **Graphe de la fonction périodique et de période $2\pi$** : $f(x) = \cos\dfrac{x}{2}$




Graphe

- La fonction est paire, les $b_n$ sont tous nuls

Calcul de $a_0$ : $\quad a_0 = \dfrac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos\dfrac{x}{2}dx = \dfrac{2}{\pi}\left[2\sin\dfrac{x}{2}\right]_0^\pi = \dfrac{4}{\pi}$

Calcul de $a_n$ :

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\cos\frac{2n+1}{2}x+\cos\frac{2n-1}{2}x\right]dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2n+1}\sin\left(2n+1\right)\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2n-1}\sin\left(2n-1\right)\frac{\pi}{2}\right] \\
\text{Si } n \textit{ est pair} \quad &\Longrightarrow a_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2n+1}\sin\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2n-1}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n-1}\right] = -\frac{4}{\pi\left(4n^2-1\right)} \\
\text{Si } n \textit{ est impair} \quad &\Longrightarrow a_n = \frac{4}{\pi\left(4n^2-1\right)}
\end{aligned}$$

Donc : $a_n = \dfrac{4\left(-1\right)^{n+1}}{\pi\left(4n^2-1\right)}$

- **Ecriture du développement en série de Fourier**

$$\cos\frac{x}{2} = \frac{2}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\left(-1\right)^{n+1}}{\pi\left(4n^2-1\right)}\cos nx, \quad x\in\left[-\pi,\pi\right]$$

# EXAMEN DE MARS 2010

## Exercice 1 :

Etudier la convergence des 5 séries numériques suivantes :

$$\sum_{n\succeq 1} \frac{1}{\sqrt{25n}}, \qquad \sum_{n\succeq 1} \sin\frac{1}{n^2}\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\sum_{n\succeq 0} \frac{n^n}{n!}, \qquad \sum_{n\succeq 0} \left(\frac{n-1}{n+6}\right)^{n^2}, \qquad \sum_{n\succeq 1} \frac{23\,(-1)^n+5}{n}.$$

## Exercice 2 :

Soit la série de fonctions :

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n\,(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{x}\,(1-x)^n\,., \quad x\in[0,1]$$

1. Calculer la somme $S(x)$ de la série sur $[0,1]$ .Est ce que la convergence est uniforme.
2. Calculer la norme suivante : $\|f_n\|_\infty=\sup\limits_{x\in[0,1]}|f_n(x)|$.

   Etudier la série de terme général $\|f_n\|_\infty$ .
3. Calculer la somme de la série alternée $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\sqrt{x}\,(1-x)^n$sur $[0,1]$

## Exercice 3 :

On définit une fonction périodique de période $2\pi$ comme suit :

$$f(x)=\begin{cases} -1, & pour\ -\pi\preceq x\preceq 0 \\ +1, & pour\ 0\preceq x\preceq \pi \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de $f$ sur l'intervalle $[-5\pi,5\pi]$
2. Calculer les coefficients de Fourier
3. Ecrire le développement de $f$ en série de Fourier
4. En déduire la somme de la série numérique

$$A=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+....+\frac{(-1)^n}{2n+1}+.....$$

# SOLUTIONS

## Exercice 1 :

- $\sum_{n\succeq 1} \frac{1}{\sqrt{25n}}$, série de Riemann divergente .

- $\sin\frac{1}{n^2}\cos\frac{1}{n^2} \approx \frac{1}{n^2}$ , série de de Riemann convergente .

- $u_n = \frac{n^n}{n!}$, critère de D'Alembert

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{(n+1)!}.\frac{n!}{n^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

La série est divergente .

- $\sum_{n\succeq 0}\left(\frac{n-1}{n+6}\right)^{n^2}$ , $u_n = \left(\frac{n-1}{n+6}\right)^{n^2}$ On applique le critère de Cauchy

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{u_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+6}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{6}{n}\right)^n} = \frac{e^{-1}}{e^6} = \frac{1}{e^7} \prec 1$$

**La série est convergente** .

- $\sum_{n\succeq 1}\frac{23(-1)^n+5}{n}$, on a la somme de deux séries, l'une est convergente ( série harmonique alternée), l'autre est divergente ( série harmonique),la somme est divergente.

## Exercice 2 :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{x}\,(1-x)^n = \sqrt{x}\left(1+(1-x)+(1-x)^2+.....\right)$$

ainsi : $s(0)=0,\quad s(1)=1$.On a une série géométrique de raison $(1-x)$

$$\Longrightarrow s(x)=\sqrt{x}\left[\frac{1}{1-(1-x)}\right]=\frac{1}{\sqrt{x}} \text{ sur } ]0,1[\,.$$

La convergence est simple sur $[0,1]$ ,les fonctions $f_n(x)=\sqrt{x}\,(1-x)$ sont continues sur $[0,1]$, mais la fonction somme de la série n'est pas continue sur $[0,1]$ ,la convergence n'est pas uniforme .

- On a $f_n(x)=\sqrt{x}\,(1-x)^n \Longrightarrow {f_n}'(x)=\dfrac{(1-x)^{n-1}}{2\sqrt{x}}\left[1-x\,(1+2n)\right]$

$$\|f_n\|_\infty=\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)|=\frac{4}{\sqrt{2+n}}.\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n}\approx\frac{A}{\sqrt{n}}$$

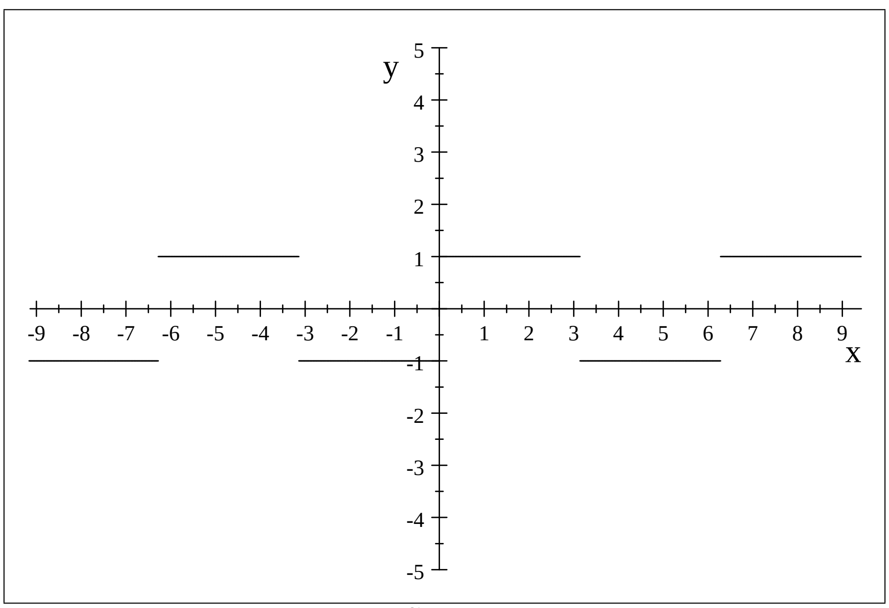
terme général d'une série divergente.

- $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\sqrt{x}\,(1-x)^n=\sqrt{x}\left(1-(1-x)+(1-x)^2+...\right)$

d'où : $\quad S(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{1-(x-1)}=\dfrac{\sqrt{x}}{2-x}$ avec $S(0)=0$ et $S(1)=1$

# Exercice 3 :

**Graphe**




Graphe

- La fonction est impaire, : $a_0=a_n=0$

**Calcul de** $b_n$ :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} = \\ &= \frac{2}{n\pi}\left[1-\cos n\pi\right] = \begin{cases} 0, \text{ si } n \text{ est pair} \\ \frac{4}{n\pi}, \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{aligned}$$

- **Ecriture du développement en série de Fourier**

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + .... + \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} + ..\right]$$

- Pour $x = \frac{\pi}{2}$, la fonction est continue, elle est donc égale à sa série de Fourier ( **Dirichlet** )

On a : $\quad f(x) = +1 = \frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + .... + \frac{(-1)^n}{2n+1} + ..\right] \Longrightarrow A = \frac{\pi}{4}.$

# Examen de janvier 2012

## Exercice 1 :

Etudier la convergence des séries numériques suivantes :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{n+2}\right)^{n},\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{1+\sqrt{n}},\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^{2}}{(2n)!},$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\ n}{n^{2}},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)\,(n+2)\,...\,(2n)}{(2n)^{n}}$$

## Exercice 2 :

Soit la suite de fonctions

$$f_n\,(x)=\mathbf{n}\mathbf{x}^2\mathbf{e}^{-nx}\ ,\quad x\in\boldsymbol{R}^+$$

i) Calculer la limite simple de la suite de fonctions :

$$\lim_{n\to+\infty}.f_n\,(x)=\mathbf{f}(\mathbf{x}),\ x\in\boldsymbol{R}^+$$

ii) Calculer la norme :

$$\|f_n-f\|_\infty=\sup_{x\ \in\ \boldsymbol{R}^+}|f_n(x)|$$

iii) Est ce que la convergence est uniforme sur $\boldsymbol{R}^{+}$.

## Exercice 3 :

Soit $f$ la fonction périodique de période $2\pi$, définie par $f(\mathbf{x})=\frac{\pi}{2}-|x|\,,\quad \mathbf{x}\in\ [-\pi,\pi]\,.$

i) Tracer le graphe de $f$ sur l'intervalle $[-3\pi,3\pi]\,.$

ii) Calculer les coefficients de **Fourier et** écrire la série de **Fourier** de $\mathbf{f}$ .

iii) Calculer, en utilisant la formule de **Liapounov-Parseval,** la somme de la série numérique :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^{4}}$$

# SOLUTIONS

## Exercice 1 :

$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{n+2}\right)^n$ .Critère de **Cauchy .**

$\sqrt[n]{\left(\frac{3n+1}{n+2}\right)^n} = \frac{3n+1}{n+2} \Longrightarrow \lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{3n+1}{n+2} = 3 > 1$.**La série est divergente**.

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+\sqrt{n}}$ .**La série est convergente** ( série alternée, critère de **Leibniz** )

$\sum_{n\succeq 0}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$, soit : $u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

On a une série à termes positifs, appliquons le critère **de D'Alembert**

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n!)^2(n+1)^2}{(2n)!(2n+1)(2n+2)}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \Longrightarrow \lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{4} < 1$,**La série est convergente.**

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\ n}{n^2}$ Critère de comparaison

On a $\left|\frac{\sin\ n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ **La série est convergente** ( série de **Riemann** ).

la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\ n}{n^2}$ est donc absolument convergente.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)\ldots(2n)}{(2n)^n}$

On a une série à termes positifs, appliquons le critère de D'Alembert :

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+2)(n+3)\ldots(2n+2)}{(2(n+1))^{n+1}}\frac{(2n)^n}{(n+1)(n+2)\ldots(2n)}$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{.(2n+1)(2n+2)}{(2(n+1))^{n+1}}\frac{(2n)^n}{(n+1)} = \frac{.2(2n+1)(2n)^n}{(2(n+1))^{n+1}} = \frac{2(2n+1)2^n n^n}{2^{n+1}(n+1)^{n+1}}$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{2n+1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \Longrightarrow \lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{e} < 1$

La série est donc convergente.

# Exercice 2 :

- $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\left(nx^2e^{-nx}\right) = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{nx^2}{e^{nx}}\right) = 0,\ si\ x\in \boldsymbol{R}^+$ .
- En effet pour $x \in \boldsymbol{R}^+$, on a : $e^{nx} \succeq n^2x^2$.Ce qui nous donne : $0 \preceq nx^2e^{-nx} \preceq \dfrac{nx^2}{n^2x^2} = \dfrac{1}{n}$.
- $f_n(x) = nx^2e^{-nx},\ \ f_n^{\prime}{}'(x) = 2nxe^{-nx} - n^2x^2e^{-nx} = nxe^{-nx}\left(2-nx\right)$

| $x$ | $0$ | | $\dfrac{2}{n}$ | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f'$'_n\left(x\right)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| f$_n(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{4}{n}e^{-2}$ | $\searrow$ | $0$ |

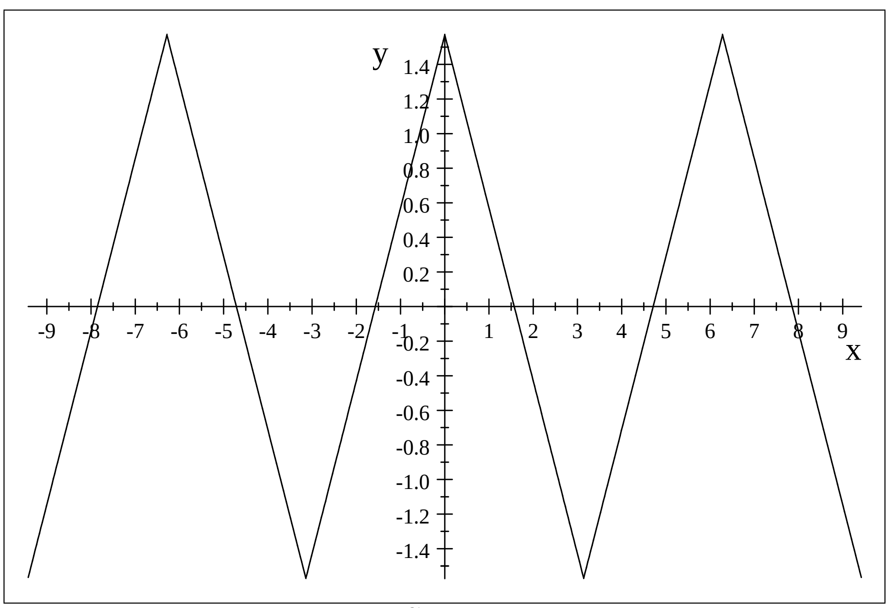
$$\|f_n\|_\infty = \frac{4}{n}e^{-2}$$

- On a : $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\|f_n\|_\infty = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\dfrac{4}{n}e^{-2} = 0$

La convergence de la suite de fonctions est ainsi uniforme sur $\boldsymbol{R}^+$

# Exercice 3 :

- **Graphe**




Graphe

- **Calcul des coefficients de Fourier**

la fonction est paire $\Longrightarrow$ $\mathbf{b}_n = \mathbf{0}$

$a_0 = \dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)dx = \dfrac{2}{\pi}\left[\dfrac{\pi}{2}x-\dfrac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = 0$

$a_n = \dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\cos nx dx$

On fait une intégration par parties en posant

$u = \left(\dfrac{\pi}{2}-x\right), \quad dv = \cos nx dx$

$du = -dx; \quad v = \dfrac{\sin(nx)}{n}$

Ce qui nous donne :

$a_n = \dfrac{2}{\pi}\left[\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\dfrac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} + \dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\dfrac{\sin(nx)}{n}dx = -\dfrac{2}{\pi n^2}\left[\cos(nx)\right]_0^{\pi}$

$a_n = \dfrac{2}{\pi n^2}\left[1-(-1)^n\right]$

La fonction est continue, monotone, bornée sur $\mathbb{R}$, elle est égale à sa série de Fourier :

$$\boldsymbol{f(x)} = \frac{4}{\pi}\left[\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots.. + \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} + \ldots\right].$$

ou encore :

$$\frac{\pi}{2} - x = \frac{4}{\pi}\left[\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots.. + \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} + \ldots\right], \ x \in [0,\pi]$$

- Formule de Liapounov-Parseval :

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f^2(x)dx$$

( $f$ étant une fonction paire ) .Ce qui donne :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{\pi^2(2n+1)^4} = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2 dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^3}{3}\right]_0^{\pi}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{\pi^2 \left(2n+1\right)^4} = \frac{2}{3\pi} \left[ 2 \left( \frac{\pi^3}{8} \right) \right] = \frac{\pi^2}{6}$$

Finalement on obtient :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(2n+1\right)^4} = \frac{\pi^4}{96} \quad .$$

# EXAMEN DE FEVRIER 2013

## Exercice 1 :

Etudier la nature des séries numériques suivantes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-n+n^2}{n!},\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{2n-1}\right)^{n^2}},\ \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-\sqrt{n}},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right),\ \sum_{n\succeq 1} \frac{(-1)^n+1}{n}$$

## Exercice 2 :

Soit la série de fonctions :

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n},\quad x \in [0,1]$$

**a)** Calculer la somme $\mathbf{S}(\mathbf{x})$ de la série sur $[0,1]$
**b)** Montrer que cette série converge absolument.
**c)** Est ce que la convergence est uniforme sur $[0,1]$.
**d)** Soit la série de terme général :

$$u_n(x) = \frac{(-1)^n x}{(1+x^2)^n},\ n \succ 0,\ x \in [0,1]$$

Montrer que la série est uniformément convergente, mais qu'elle n'est pas normalement convergente sur $[0,1]$.

## Exercice 3 :

Soit $f$ la fonction périodique de période $2\pi$ définie comme suit :

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4},\ x \in \left]-\dfrac{\pi}{2},+\dfrac{\pi}{2}\right[ \\ -\dfrac{\pi}{4},\ x \in \left]+\dfrac{\pi}{2},+\dfrac{3\pi}{2}\right[ \end{cases}$$

**i)** Tracer le graphe de **f** sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$.
**ii)** Calculer les coefficients de **Fourier.**
**iii)** Donner le développement de **f** en série de **Fourier.**

# SOLUTIONS

## Exercice 1 :

$\dfrac{1-n+n^2}{n!} \approx u_n = \dfrac{n^2}{n!}$, critère de **D'Alembert**

$$l = \underset{n\to\infty}{Lim}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \underset{n\to\infty}{Lim}\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}.\frac{n!}{n^2} = \underset{n\to\infty}{Lim}\frac{n+1}{n^2} = 0$$

La série est convergente. $\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{2n-1}\right)^{n^2}}$, on a une série à termes positifs on applique le critère de **Cauchy**, $\sqrt[n]{u_n} = \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{2n-1}\right)^{n}} = \dfrac{1}{e^{n\ln\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)}}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n} = \dfrac{1}{\sqrt{e}} \prec 1$.La série est convergente .On utilise la majoration suivante :

$2^{-\sqrt{n}}=e^{-\sqrt{n}\ln(2)}<\dfrac{1}{\left(\sqrt{n}\ln(2)\right)^{\alpha}}$.Pour $\alpha = 4$, on a alors l'inégalité suivante : $2^{-\sqrt{n}}=e^{-\sqrt{n}\ln(2)}<\dfrac{1}{n^2\ln(2)^4}$ et la série est convergente. $\dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} = \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} = \dfrac{1}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\sqrt{n}\sqrt{n+1}} \approx \dfrac{1}{2n\sqrt{n}} = \dfrac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$,la série est convergente..

$\sum\limits_{n\succeq 1}\dfrac{(-1)^n+1}{n}$, on a la somme de deux séries, l'une est convergente ( série harmonique alternée), l'autre est divergente ( série harmonique)
la somme est divergente.
Autre méthode :

$$\sum_{n\succeq 1}\frac{(-1)^n+1}{n} = \frac{2}{2}+\frac{2}{4}+\frac{2}{6}+.......+\frac{2}{2n}+.... = 2\sum_{n\succeq 1}\frac{1}{n}$$

On a ainsi le double de la série harmonique, la série donnée est alors divergente
.

## Exercice 2 :

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{(1+x^2)^n} = \frac{x}{(1+x^2)}+\frac{x}{(1+x^2)^2}+\frac{x}{(1+x^2)^3}+......$$
$$= \frac{x}{(1+x^2)}\left[1+\frac{1}{(1+x^2)}+\frac{1}{(1+x^2)^2}+......\right]$$

On a ainsi une progression géométrique de raison $\frac{1}{(1+x^2)}$.Ce qui donne :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n} = \frac{x}{(1+x^2)} \frac{1}{1-\frac{1}{(1+x^2)}} = \frac{1}{x}$$

d'où :

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, \ si \ x \in ]0,1[ \\ 0, \ si \ x = 0 \end{cases}$$

b) On a une série de fonctions à termes positifs, on applique le critère de **D'alembert** :
$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \frac{1}{1+x^2} < 1$,la série converge absolument .

c) Les fonctions $f_n(x)$ sont continues sur l'intervalle $[0,1]$, mais la fonction somme $S(x)$ est discontinue en 0, donc la convergence n'est pas uniforme sur $[0,1]$.

d) On a une série alternée, pour étudier le type de convergence, on calcule la norme de la fonction $f_n$.

$f_n(x) = \frac{x}{(1+x^2)^n} \Longrightarrow$

$f'_n(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{(1+x^2)^n}\right) = \frac{1-(2n-1)x^2}{(1+x^2)^{n+1}}$

La borne supérieure de la fonction $f_n$ est atteinte pour : $x = \frac{1}{\sqrt{2n-1}}$

Ce qui donne :

$$\|f_n\|_\infty = \frac{1}{\sqrt{2n-1}} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^n}$$

Sachant que :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} e^{n \ \ln\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)} = \sqrt{e}$$

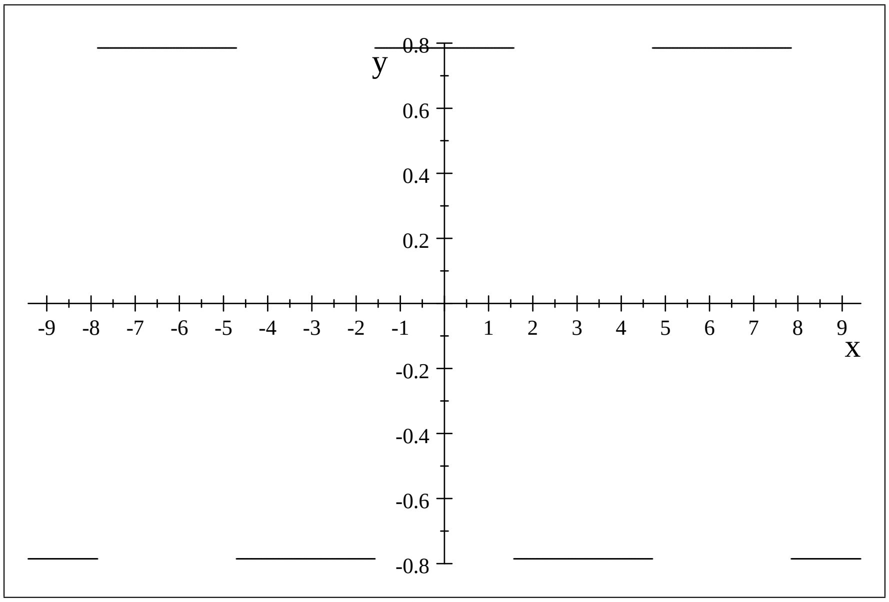
$\Longrightarrow \|f_n\|_\infty \approx \frac{1}{\sqrt{e}\sqrt{2n-1}}$

Donc $\|f_n\|_\infty$ tend vers 0 , la séries **alternée** converge uniformément sur $[0,1]$

Mais comme la série de terme général $\frac{1}{\sqrt{e}\sqrt{2n-1}}$ est divergente, la convergence n'est pas normale sur $[0,1]$.

# Exercice 3 :

i) Graphe de la fonction périodique et de période $2\pi$ :




Graphe

La fonction est paire $\Longrightarrow b_n = \mathbf{0}$

**ii)** Sachant que la valeur de l'intégrale d'une foction périodique est constante sur tout intervalle de longueur égale à la période $2\pi \Longrightarrow$ on calcule les $a_n$ sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ , mais comme la fonction est paire, on peut alors faire les calculs sur seulement l'intervalle $[0, \pi]$

**Calcul de** $a_0$ : $a_0 = \dfrac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\pi}{4} dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \dfrac{\pi}{4} dx\right] = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{4} = 0$

**Calcul de** $a_n$ :

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{4}\cos nx dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\pi}{4}\cos nx dx\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos nx dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos nx dx\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}\right] = \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2} \\
&= \begin{cases} 0, \ si \ n = 2k \\ \dfrac{(-1)^k}{2k+1}, \ si \ \ n = 2k+1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Ecriture du développement en série de Fourier **:**

Théorème de Dirichlet **:** La fonction donnée est monotone par morceaux, bornée, continue par morceaux,elle est donc égale à sa série de Fourier aux points de continuité, d'où :

$$\frac{\pi}{4} = \cos x - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - ....... + ..., \quad x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

Aux points discontinuité ( multiples impairs de $\frac{\pi}{2}$), la série de Fourier qui est alors égale à 0, est ainsi égale à la demi-somme des limites à gauche et à droite ie 0.

# EXAMEN DE FEVRIER 2015

## Exercice 1 :

Etudier la nature des séries numériques suivantes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(2n)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}, \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{3^n},$$

$$\sum_{n\succeq 0} \left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{n^2}, \ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n^2]{2n} - 1\right)$$

## Exercice 2 :

Soit la série de fonctions :

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^{2n}}, \quad x \in [0,1]$$

**a)** Montrer que cette série converge absolument sur $[0,1]$.
**b)** Calculer la somme $S(x)$ de la série sur $[0,1]$
**c)** Est ce que la convergence est uniforme sur $[0,1]$.
**d)** Soit la série de terme général :

$$u_n(x) = \frac{(-1)^n x^2}{(1+x^2)^{2n}}, \ n \succ 0, \ x \in [0,1]$$

Etudier la convergence uniforme et la convergence

normale sur $[0,1]$.

## Exercice 3 :

Soit $f$ la fonction de période $2\pi$, définie comme suit :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi - x}{2}, & si\ x \in [0,\pi] \\ \dfrac{\pi + x}{2}, & si\ x \in [-\pi, 0] \end{cases}$$

**i)** Tracer le graphe de $f$ sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.
**ii)** Donner l'expression de $f$ dans l'intervalle $[-3\pi, -2\pi]$.
**iii)** Calculer les coefficients de **Fourier**.
**iv)** Donner le développement de $f$ en série de **Fourier** .

# SOLUTIONS

## Exercice 1 :

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(2n)}$, série de **Bertrand** avec $\alpha = 0$ .

La série est divergente.

$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}$, on a l'inégalité suivante : $e^{\sqrt{n}} \succeq n^2 \Longrightarrow e^{-\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n^2}$ .

La série est convergente .

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$.

On applique le critère de **D'Alembert** avec $u_n = \frac{n!}{3^n}$

$\Longrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{3^{n+1}}.\frac{3^n}{n!} = \frac{n+1}{3}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty > 1$,la série est divergente.

$\sum_{n\succeq 0} \left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{n^2}$ , on applique le critère de **Cauchy:**

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[nn]{\left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n+2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^n = \frac{1}{e} < 1.$$

La série est convergente.

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n^2]{2n} - 1\right)$, on peut écrire ce qui suit : $\sqrt[n^2]{2n} = (2n)^{\frac{1}{n^2}} = e^{\frac{\ln(2n)}{n^2}}$.Pour $n$ assez grand, on a l'équivalence suivante :

$e^{\frac{\ln(2n)}{n^2}} \approx 1 + \frac{\ln(2n)}{n^2}$,

d'où : $\sqrt[n^2]{2n} - 1 \approx \frac{\ln(2n)}{n^2}$.

Le terme général de la série donnée est équivalent au terme général d'une série de **Bertrand** avec : $\alpha = 2$ et $\beta = -1$.La série est alors convergente.

## Exercice 2 :

**a)** On a une série de fonctions à termes positifs, on applique le critère de **D'Alembert** :

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \frac{1}{(1+x^2)^2} < 1$$

la série converge absolument

**b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^{2n}} = \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^4} + \frac{x^2}{(1+x^2)^6} + ......$

$= \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\left[1 + \frac{1}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{(1+x^2)^4} + ...\right]$

On a ainsi une progression géométrique de raison : $\frac{1}{(1+x^2)^2}$

Ce qui donne :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n} = \frac{x^2}{(1+x^2)^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{(1+x^2)^2}} = \frac{x^2}{(1+x^2)^2 - 1}$$

d'où :

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1}{2+x^2}, & si\ x \in \left]0,1\right] \\ 0, & si\ x = 0 \end{cases}$$

**c)** Les fonctions $f_n(x)$ sont continues sur l'intervalle $[0,1]$, mais la fonction somme $S(x)$ est discontinue en 0, donc la convergence n'est pas uniforme sur $[0,1]$.

**d)** On a une série alternée, pour étudier le type de convergence . On calcule la norme de la fonction $f_n$.

$f_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^{2n}} \Longrightarrow$

$f_n'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{(1+x^2)^{2n}}\right) = 2x\frac{1-(2n-1)x^2}{(x^2+1)^{2n+1}}.$

La borne supérieure de la fonction $f_n$ est atteinte pour : $\mathbf{x} = \frac{1}{\sqrt{2n-1}}$

Ce qui donne :

$$\|f_n\|_\infty = \frac{1}{2n-1}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^{2n}}$$

Sachant que :

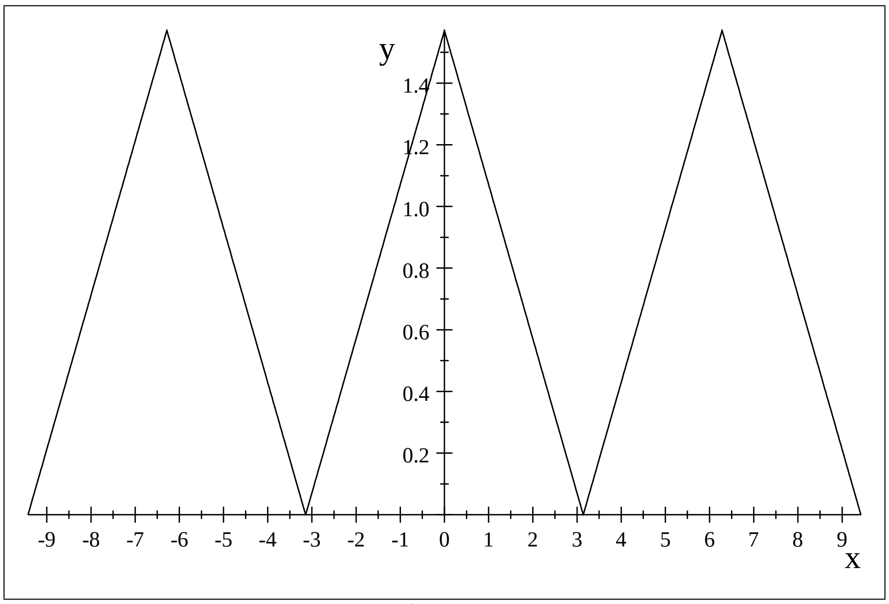
$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^{2n} = \lim_{n\to+\infty} e^{2n\ \ln\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)} = e$$

$\Longrightarrow \|f_n\|_\infty \approx \frac{1}{e(2n-1)}$

Donc $\|f_n\|_\infty$ tend vers 0 , la séries **alternée** converge uniformément sur $[0,1]$ .Mais comme la série de terme général $\dfrac{1}{e(2n-1)}$ est divergente, la convergence n'est pas normale sur $[0,1]$ .

# Exercice 3 :

i) Graphe de la fonction périodique et de période $2\pi$ :




Graphe

**ii)** l'expression de **f** dans l'intervalle $[-3\pi,-2\pi]$est la suivante: $\mathbf{f}(x)=\dfrac{3\pi+x}{2}$

**iii)** La fonction est paire $\Longrightarrow$ $\mathbf{b}_n\mathbf{=0}$

**Calcul de** $a_0$ : $a_0=\dfrac{2}{\pi}\int_0^\pi\dfrac{\pi-x}{2}dx=\frac{1}{2}\pi$

**Calcul de** $a_n$ :

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\frac{\pi-x}{2}\cos(nx)\,dx\ =\frac{(-1)^n}{\pi}\int_0^\pi x\cos(nx)\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi n^2}\left[1-(-1)^n\right]=\begin{cases}0, & si\ n=2k\\ \dfrac{2}{\pi(2k-1)^2}, & si\ n=2k-1\end{cases}$$

**Ecriture du développement en série de Fourier :**

**Théorème de Dirichlet :** La fonction donnée est monotone par morceaux, bornée, continue elle est donc égale à sa série de **Fourier**, d'où

$$\frac{\pi-x}{2}=\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\left[\cos x+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}-.......+..\right].,\quad x\in\left]0,\pi\right[$$

# EXERCICES

## Exercice 1 :

Donner l'expression du terme général de la série

$$\frac{1}{1}-\frac{2}{5}+\frac{3}{9}-\frac{4}{13}+\frac{5}{17}.....$$

Etudier alors la convergence .
Etudier la convergence des 5 séries numériques suivantes :

$$\sum_{n\succeq 1}\frac{1}{\sqrt{n}},\qquad \sum_{n\succeq 1}\log n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right),$$
$$\sum_{n\succeq 0}\frac{3+n^2}{n!},\qquad \sum_{n\succeq 0}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2},\qquad \sum_{n\succeq 1}\frac{(-1)^n+1}{n}.$$

## Exercice 2 ::

Soit la série de fonctions $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^2(1-x)^n.$, $x\in[0,1]$

1. Calculer la somme $S(x)$ de la série sur $[0,1]$
2. Calculer la norme suivante : $\|f_n\|_\infty=\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)|$
3. Caractériser les types de convergence.

## Exercice 3 :

Soit $f$ la fonction périodique de période $2\pi$ égale à $\cos\frac{x}{2}$ sur $[-\pi,\pi]$

1. Tracer le graphe de $f$ sur l'intervalle $[-3\pi,3\pi]$.
2. Calculer $a_0$ *et* $b_n$
3. Montrer que : $a_n=\dfrac{4(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)}$.
4. Donner le développement de $f$ en série de Fourier .

# SOLUTIONS

## Exercice 1 :

- $u_n = \dfrac{(-1)^n (n+1)}{4n+1}$
  le terme général n'a pas de limite, **la série diverge**
- $\sum\limits_{n\succeq 1} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, série divergente
- $\log n \log\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \log\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right) \approx \dfrac{\log n}{n^3}$ , **série de Bertrand convergente**
- $\dfrac{3+n^2}{n!} \approx u_n = \dfrac{n^2}{n!}$, critère de D'Alembert

$$\underset{n\to\infty}{Lim} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \underset{n\to\infty}{Lim} \frac{(n+1)^2}{(n+1)!} . \frac{n!}{n^2} = \underset{n\to\infty}{Lim} \frac{n+1}{n^2} = 0$$

**La série est convergente** .

- $\sum\limits_{n\succeq 0} \left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{n^2}$ , $u_n = \left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{n^2}$

On applique le critère de Cauchy

$$\underset{n\to\infty}{Lim} \sqrt{u_n} = \underset{n\to\infty}{Lim} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n = \underset{n\to\infty}{Lim} \frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n} = \frac{e}{e^2} = \frac{1}{e} \prec 1$$

**La série est convergente** .

- $\sum\limits_{n\succeq 1} \dfrac{(-1)^n + 1}{n}$.

On a la somme de deux séries, l'une est convergente ( série harmonique alternée), l'autre est divergente ( série harmonique),la somme est divergente**.**

## Exercice 2 :

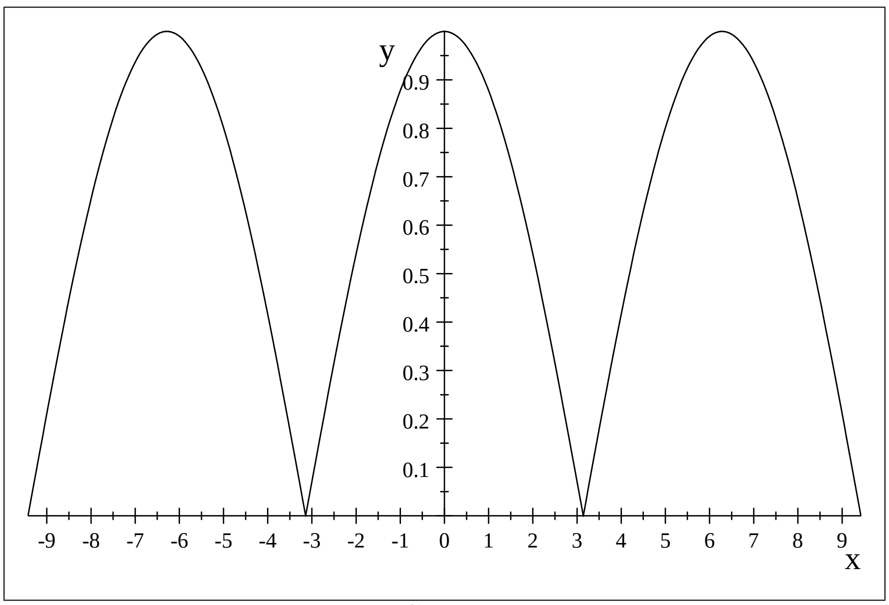
On a une série géométrique de raison $(1-x) \Longrightarrow s(x) = x$

1. avec $s(0) = 0$ et $s(1) = 1$ donc $s(x) = x$ sur $[0,1]$ .( 2 points )

2. $\|f_n\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = \dfrac{4}{(2+n)^2} \cdot \dfrac{1}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n} \approx \dfrac{A}{n^2}$,terme général d'une série convergente. On a alors tous les types de convergence: normale, uniforme, absolue et simple sur $[0,1]$ (1 point ).

# Exercice 3 :

**Graphe de la fonction périodique et de période 2$\pi$** : $f(x) = \cos\dfrac{x}{2}$




Graphe

1. ( 4 points ) La fonction est paire, les $b_n$ sont tous nuls .Calcul de $a_0$ : $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos\frac{x}{2}dx = \frac{2}{\pi}\left[2\sin\frac{x}{2}\right]_0^\pi = \frac{4}{\pi}$

**Calcul de $a_n$** :

$$\begin{array}{rcl} a_n & = & \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \cos\frac{x}{2}\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left[\cos\frac{2n+1}{2}x + \cos\frac{2n-1}{2}x\right]dx \\ & = & \dfrac{2}{\pi}\left[\dfrac{1}{2n+1}\sin(2n+1)\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{2n-1}\sin(2n-1)\dfrac{\pi}{2}\right] \\ \text{Si } n \textit{ est pair} & \Longrightarrow & a_n = \dfrac{2}{\pi}\left[\dfrac{1}{2n+1}\sin\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{2n-1}\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right] = \\ & = & \dfrac{2}{\pi}\left[\dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n-1}\right] = -\dfrac{4}{\pi(4n^2-1)} \\ \text{Si } n \textit{ est impair} & \Longrightarrow & a_n = \dfrac{4}{\pi(4n^2-1)} \end{array}$$

Donc :

$$a_n = \frac{4\,(-1)^{n+1}}{\pi\,(4n^2-1)}$$

Développement en série de Fourier

$$\cos\frac{x}{2} = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\,(-1)^{n+1}}{\pi\,(4n^2-1)} \cos nx, \quad x \in [-\pi, \pi]$$

EXAMEN DE MARS 2010

# Exercice 1 :

Etudier la convergence des 5 séries numériques suivantes :

$$\sum_{n\succeq 1}\frac{1}{\sqrt{25n}},\ \sum_{n\succeq 1}\sin\frac{1}{n^2}\cos\left(\frac{1}{n^2}\right),\sum_{n\succeq 0}\frac{n^n}{n!},$$
$$\sum_{n\succeq 0}\left(\frac{n-1}{n+6}\right)^{n^2},\ \sum_{n\succeq 1}\frac{23\left(-1\right)^n+5}{n}.$$

# Exercice 2 :

Soit la série de fonctions :

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{x}\left(1-x\right)^n.,\quad x\in[0,1]$$

1. Calculer la somme $S(x)$ de la série sur $[0,1]$ .Est ce que la convergence est uniforme.
2. Calculer la norme suivante : $\|f_n\|_\infty=\sup\limits_{x\in[0,1]}|f_n(x)|$.Etudier la série de terme général $\|f_n\|_\infty$ .
3. Calculer la somme de la série alternée $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n\sqrt{x}\left(1-x\right)^n$sur $[0,1]$

# Exercice 3 :

On définit une fonction périodique de période $2\pi$ comme suit

$$f(x)=\begin{cases}-1, & pour\ -\pi\preceq x\preceq 0\\ +1, & pour\ 0\preceq x\preceq \pi\end{cases}$$

1. Tracer le graphe de $f$ sur l'intervalle $[-5\pi,5\pi]$
2. Calculer les coefficients de Fourier
3. Ecrire le développement de $f$ en série de Fourier
4. En déduire la somme de la série numérique

$$A=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+....+\frac{\left(-1\right)^n}{2n+1}+.....$$

# SOLUTIONS

## Exercice 1 :

$\sum\limits_{n\succeq 1}\dfrac{1}{\sqrt{25n}}$, série de Riemann divergente

$\sin\dfrac{1}{n^2}\cos\dfrac{1}{n^2}\approx\dfrac{1}{n^2}$ , série de de Riemann convergente.

$u_n=\dfrac{n^n}{n!}$, critère de D'Alembert :

$$\underset{n\to\infty}{Lim}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\underset{n\to\infty}{Lim}\frac{(n+1)^n}{(n+1)!}.\frac{n!}{n^n}=\underset{n\to\infty}{Lim}\frac{(n+1)^n}{n^n}=\underset{n\to\infty}{Lim}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

La série est divergente .

$\sum\limits_{n\succeq 0}\left(\dfrac{n-1}{n+6}\right)^{n^2}$ , $u_n=\left(\dfrac{n-1}{n+6}\right)^{n^2}$ On applique le critère de Cauchy

$$\underset{n\to\infty}{Lim}\sqrt{u_n}=\underset{n\to\infty}{Lim}\left(\frac{n-1}{n+6}\right)^n=\underset{n\to\infty}{Lim}\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{6}{n}\right)^n}=\frac{e^{-1}}{e^6}=\frac{1}{e^7}\prec 1$$

La série est convergente .

$\sum\limits_{n\succeq 1}\dfrac{23\,(-1)^n+5}{n}$, on a la somme de deux séries, l'une est convergente ( série harmonique alternée), l'autre est divergente ( série harmonique),la somme est divergente .

## Exercice 2 :

- $$\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{x}\,(1-x)^n=\sqrt{x}\left(1+(1-x)+(1-x)^2+.....\right),$$

ainsi : $s(0)=0$, $s(1)=1$.On a une série géométrique de raison $(1-x)\Longrightarrow$ $s(x)=\sqrt{x}\left[\dfrac{1}{1-(1-x)}\right]=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0,1[$.

- La convergence est simple sur $[0,1]$ ,les fonctions $f_n(x)=\sqrt{x}\,(1-x)$ sont continues sur $[0,1]$ , mais la fonction somme de la série n'est pas continue sur $[0,1]$ ,la convergence n'est pas uniforme.

On a :

$$f_n(x) = \sqrt{x}\,(1-x)^n \Longrightarrow {f_n}'(x) = \frac{(1-x)^{n-1}}{2\sqrt{x}}\,[1 - x\,(1+2n)]$$

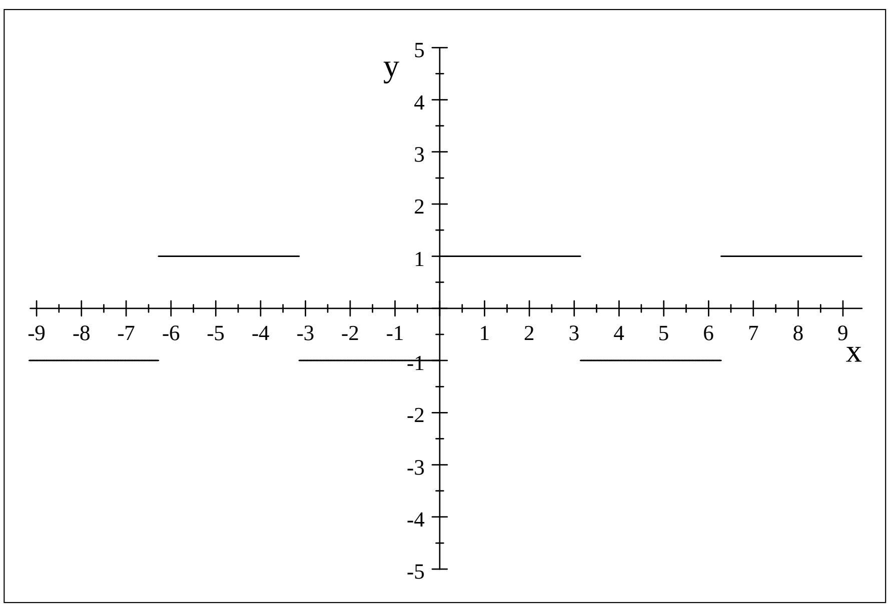
$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = \frac{4}{\sqrt{2+n}}.\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{\mathbf{n}}} \approx \frac{A}{\sqrt{n}}$$

terme général d'une série divergente.

- $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sqrt{x}\,(1-x)^n = \sqrt{x}\left(1-(1-x)+(1-x)^2+...\right)$ ,d'où : $S(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1-(x-1)} = \dfrac{\sqrt{x}}{2-x}$ avec $S(0)=0$ et $S(1)=1$ .

# Exercice 3 :

- **Graphe**




Graphe

- La fonction est impaire, : $a_0 = a_n = 0$

**Calcul de $b_n$ :**

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} = \\ &= \frac{2}{n\pi}\left[1-\cos n\pi\right] = \left\{ \begin{array}{c} 0, \text{ si } n \text{ est pair} \\ \dfrac{4}{n\pi}, \text{ si } n \text{ est impair} \end{array} \right. \end{aligned}$$

- Ecriture du développement en série de Fourier

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + .... + \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} + ..\right]$$

- Pour $x = \dfrac{\pi}{2}$, la fonction est continue, elle est donc égale à sa série de Fourier **( Dirichlet ),**on a :

$$f(x) = +1 = \frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + .... + \frac{(-1)^n}{2n+1} + ..\right] \Longrightarrow A = \frac{\pi}{4}.$$

# EXAMEN DU 6 FEVRIER 2011

## Exercice 1 :

Etudier la convergence des séries numériques suivantes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln\left(n^2+n+1\right)} \ ,\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n}}, \sum_{n\succeq 1} \left(\frac{2n}{1+2n}\right)^{2n} \ ,$$

$$\sum_{n\succeq 0} \frac{n^2+n+1}{n!}, \sum_{n\succeq 0} \left[3\ln\left(n^2+1\right) - 2\ln\left(n^3+1\right)\right] .,$$

## Exercice 2 :

Soit la série de fonctions

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n\left(x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} x\left(1-x\right)x^n \ , \quad x \in [0,1]$$

1. Calculer la somme $S(x)$ de la série sur $[0,1]$
2. Calculer la norme : $\|f_n\|_{\infty} = \sup\limits_{x\ \in\ [0,1]} |f_n(x)|$
3. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\|$, est ce que la convergence est normale ?

## Exercice 3 :

Soit $f$ la fonction paire, périodique de période $2\pi$, définie par $f(x) = |\pi - x|\,, \quad x \in\ [0,\pi]$.

1. Donner l'expression de $\mathbf{f}$ dans l'intervalle $[-\pi, 0]$.
2. Tracer le graphe de $\mathbf{f}$ sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$.
3. Calculer les coefficients de **Fourier**
4. Ecrire la série de Fourier de $\mathbf{f}$ .
5. Etudier le cas $\mathbf{x} = \boldsymbol{\pi}$

# SOLUTIONS

## Exercice 1 :

$\frac{1}{\ln(n^2+n+1)} \approx \frac{1}{2\ln(n)}$ série divergente ( série de **Bertrand** )

$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n}}$ série convergente ( série alternée, critère de **Leibniz** )

$\left(\frac{2n}{1+2n}\right)^{2n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}} \to \frac{1}{e} \neq 0$ série divergente

$\frac{n^2+n+1}{n!} \approx \frac{n^2}{n!}$ série convergente ( critère de **D/Alembert** )

$$\begin{aligned}
u_n &= \left[3\ln\left(n^2+1\right) - 2\ln\left(n^3+1\right)\right] \\
&= 3\ln\left(n^2\right) + 3\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) - 2\ln\left(n^3\right) - 2\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right) \\
&= 3\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) - 2\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right) \\
&\approx \frac{3}{n^2} \text{ série convergente ( série de } \textbf{Riemann} \text{ ).}
\end{aligned}$$

## Exercice 2 :

- $s(x) = \begin{cases} x, & si \;\; x \in [0,1[ \\ 0, & si \; x = 1 \end{cases}$
- $f_n(x) = x(1-x)x^n \implies f_n'(x) = \left[(n+1)-(n+2)\,x\right]x^n$

$$\begin{array}{c|ccccc}
x & 0 & & \frac{n+1}{n+2} & & 1 \\
\hline
f'_n(x) & & + & 0 & - & \\
\hline
f_n(x) & 0 & \nearrow & \frac{n+1}{(n+2)^2}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n & \searrow & 0
\end{array}$$

$$\|f_n\|_\infty = \frac{n+1}{(n+2)^2}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$$

- $\|f_n\|_\infty = \dfrac{n+1}{(n+2)^2}\dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}$

Sachant que $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n = e^a$

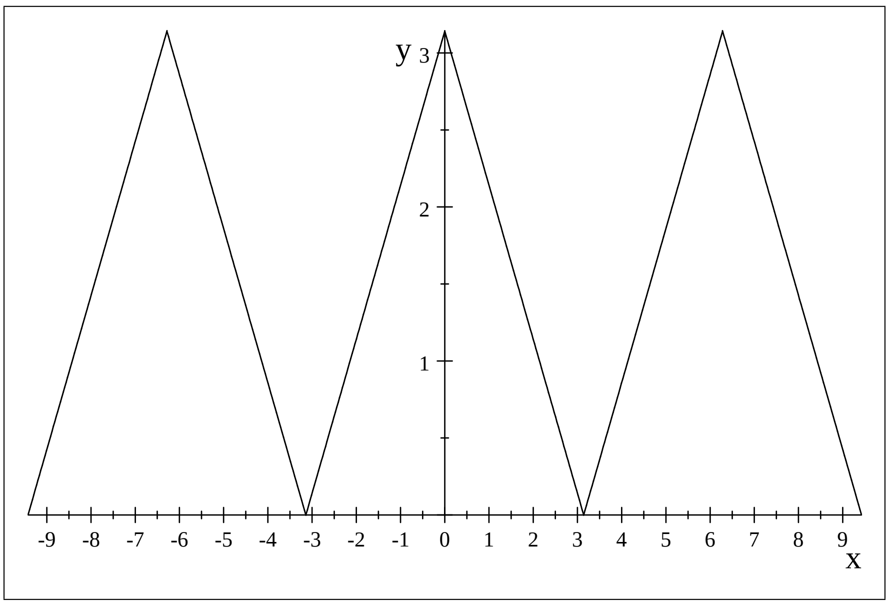
$\Longrightarrow \|f_n\|_\infty \approx \dfrac{1}{ne} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\|f_n\| = 0$

Comme la série numérique de terme général $\left(u_n = \dfrac{1}{ne}\right)$ diverge

La convergence n'est pas normale.

# Exercice 3 :

- $\mathbf{f}(x) = x+\pi, \quad x \in [-\pi, 0]$
- Graphe




Graphe

- ( 3 points ) **Calcul des coefficients de Fourier**

la fonction est paire $\Longrightarrow$ $\mathbf{b}_n = \mathbf{0}$

$a_0 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi (\pi - x)\,dx = \dfrac{2}{\pi}\left[-\dfrac{(\pi-x)^2}{2}\right]_0^\pi = \pi$

$a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi (\pi - x)\cos nx dx$

On fait une intégration par parties en posant :

$u = \pi - x, \quad dv = \cos nx dx$

$du = -dx; \quad v = \dfrac{\sin(nx)}{n}$

Ce qui nous donne : $a_n = \dfrac{2}{\pi}\left[(\pi - x)\dfrac{\sin(nx)}{n}\right]_0^\pi + \dfrac{2}{\pi}\int_0^\pi \dfrac{\sin(nx)}{n}dx =$ $-\dfrac{2}{\pi}\left[\dfrac{\cos nx}{n^2}\right]_0^\pi$

$$a_n = -\frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos n\pi - 1}{n^2}\right] = \frac{2}{\pi n^2}\left[1 - (-1)^n\right]$$

- La fonction est continue, monotone, bornée sur $\mathbb{R}$, elle est égale à sa série de Fourier :
  $\boldsymbol{f(x)} = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{4}{\pi}\left[\cos x + \dfrac{\cos 3x}{3^2} + \dfrac{\cos 5x}{5^2} + ..... + \dfrac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} + ...\right].$

ou encore :
$\pi - x = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{4}{\pi}\left[\cos x + \dfrac{\cos 3x}{3^2} + \dfrac{\cos 5x}{5^2} + ..... + \dfrac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} + ...\right], \; x \in [0, \pi]$

- Pour $x = \pi$, on a ( Théorème de **Dirichlet** $0 = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{4}{\pi}\left[-1 - \dfrac{1}{3^2} - \dfrac{1}{5^2} - ........ - \dfrac{1}{(2n+1)^2} - ....\right] \Longrightarrow$
  $1 + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{5^2} + ........ + \dfrac{1}{(2n+1)^2} + .... = \dfrac{\pi^2}{8}$

# EXAMEN DE JANVIER 2015

## Exercice 1 :

Etudier la nature des séries numériques suivantes :

$$\textbf{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)-1}{n\sqrt{n}} \quad \textbf{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

$$\textbf{c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{2n}}, \quad \textbf{d)} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n^4+2n+1}-\sqrt{n^4+an} \ (a>0)$$

$$\textbf{e)} \sum_{n\succeq 1} \frac{n^p}{a^n} \ (p \in \mathbb{Z},\ a>0\ )$$

## Exercice 2 :

Soit la série de fonctions :

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n}, \quad x \in \mathbb{R}^+$$

**a)** Calculer la somme $\mathbf{S(x)}$ de la série sur $\mathbb{R}^+$.

**b)** Est ce que la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}^+$.

**c)** Calculer : $\|f_n\|_\infty = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^+} \dfrac{x}{(1+x)^n}$.

**d)** Etudier la convergence normale sur $[a,\ +\infty[,\ a>0$.

## Exercice 3 :

Soit la série entière :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} = S(x)$$

**i)** Trouver son domaine de convergence .

**ii)** Calculer $S(x)$.

**iii)** Calculer la somme de la série entière : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{2^n}$.

**iv)** En déduire la somme de la série numérique : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

# SOLUTIONS

## Exercice 1 :

**a)** $\dfrac{\ln(n)-1}{n\sqrt{n}} \approxeq \dfrac{\ln(n)}{n\sqrt{n}} = \dfrac{\ln(n)}{n^{\frac{3}{2}}}$, série de **Bertrand** avec $\alpha = \dfrac{3}{2}$

**La série est convergente.**

**b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ :

Critère de **D'Alembert**

$$\begin{aligned} l = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} \\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} &= \frac{1}{e} < 1 \end{aligned}$$

**La série est convergente.**

**c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{2n}}$,on a la majoration : $\quad 0 < \dfrac{n!}{n^{2n}} < \dfrac{n!}{n^n}$

la série majorante est convergente $\Longrightarrow$ **La série est convergente.**

Autre méthode en utilisant la règle de **D'Alembert** :

$l = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{2n+2}} \cdot \frac{n^{2n}}{n!}$

$= \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}(n+1)} = 0 < 1.$

La série est convergente.

d) $u_n = \sqrt{= n^4 + 2n + 1} - \sqrt{n^4 + an}$

$= \dfrac{(2-a)\,n + 1}{\sqrt{n^4+2n+1} + \sqrt{n^4+an}} \approxeq \dfrac{(2-a)}{2n}$ si $a \neq 2$ **La série est divergente.**

Si $a = 2,\ u_n \approxeq \dfrac{1}{2n^2}$, **la série converge.**

**e)** $\displaystyle\sum_{n\succeq 1} \frac{n^p}{a^n} \quad (\ p \in \mathbb{Z},\ a > 0\ )$

On utilise la règle de **D'Alembert**

$l = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{(n+1)^p}{\underset{n\to\infty}{a^{n+1}}} \frac{a^n}{n^p} = \frac{1}{a}$

Si $a > 1$, la série converge .
Si $a < 1$, la série diverge .
Si $a = 1$, on a une série de **Riemann** : $\sum\limits_{n \succeq 1} \frac{1}{n^{-p}}$.
Si $p < -1$ : la série converge .
Si $p \succeq -1$ : la série diverge.

# Exercice 2 :

**a)** Si $x > 0$ :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n} = x + \frac{x}{(1+x)} + \frac{x}{(1+x)^2} + \frac{x}{(1+x)^3} + ......$$
$$= x\left[1 + \frac{1}{(1+x)} + \frac{1}{(1+x^2)^2} + ......\right]$$

On a ainsi une progression géométrique de raison : $r = \frac{1}{(1+x)} < 1$.

Ce qui donne :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n} = x\frac{1}{1-\frac{1}{(1+x)}} = 1+x$$

d'où : $S(x) = \begin{cases} 1+x, \text{ si } x \in \mathbb{R}^+. \\ 0, \text{ si } x = 0 \end{cases}$

**b)** Les fonctions $f_n(x)$ sont continues sur l'intervalle $[0,1]$, mais la fonction somme $S(x)$ est discontinue en 0, donc la convergence n′est pas uniforme sur $\mathbb{R}^+$

**c)** Calcul de la norme de la fonction $f_n$.

$$f\,'_n(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{(1+x)^n}\right) = \frac{1}{(x+1)^n} - n\frac{x}{(x+1)^{n+1}}$$
$$= \frac{(1+x)^n - nx(1+x)^{n-1}}{(1+x)^{2n}} = \frac{1-x(n-1)}{(1+x)^{n+1}}$$

La borne supérieure de la fonction $f_n$ est atteinte pour : $x = \frac{1}{n-1}$

Ce qui donne :

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x)| = \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{(n-1)}$$

avec l'équivalence : $\|f_n\|_\infty \approx \frac{1}{e\ n}$

**d)** Sur $[a,\ +\infty[$, $a > 0$.

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in[a,\ +\infty[} |f_n(x)| = \frac{a}{(1+a)^n}$$

La série numérique de terme général $\dfrac{a}{(1+a)^n}$ est convergente
( série géométrique de raison $r = \dfrac{1}{1+a} < 1$)
On a alors une convergence normale sur $[a,\ +\infty[$.

# Exercice 3 :

$\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{2^n}$

**i) Calcul du rayon de convergence :** On a $a_n = \dfrac{1}{2^n}$,et $r = \underset{n\to\infty}{Lim} \dfrac{a_n}{a_{n+1}} = 2$

Pour $x = \pm 2$, on a une série numérique divergente.
Le domaine de convergence est l'intervalle ouvert : $]-2,\ +2[$.
**ii)** On a une progression géométrique de raison $r = \dfrac{x}{2} \Longrightarrow S(x) = \dfrac{2}{2-x}$.
**iii)** Calcul de la somme : $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx^{n-1}}{2^n}$.
D'aprés **ii)** on a :

$$1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{2^3}...... + \frac{x^n}{2^n} + ...... = \frac{2}{2-x},\ x \in ]-2,\ +2[$$

On peut alors dériver la série entière terme à terme dans son intervalle de convergence.D'où :

$$\frac{1}{2} + \frac{2x}{2^2} + \frac{3x^2}{2^3} + ...... + \frac{nx^{n-1}}{2^n} + ..... = \frac{2}{(2-x)^2}, x \in ]-2,\ +2[$$

Pour $x = 1$,on a : $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2^n} = 2$ .

**FIN**