Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Introduction à la Topologie
Licence Mathématiques-LMD-Semestre 3

Série 7: Espaces connexes

Exercice 1: Soient $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{\mathbb{X}})$, $(\mathbb{Y}, \mathcal{T}_{\mathbb{Y}})$ deux espaces topologique et $f : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$. Montrer que si f est continue et X est connexe, alors $f(X)$ est connexe.

Exercice 2: Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ un espace métrique. Montrer que si $\mathbb{X}$ est connexe et $f : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue telle que $|f(x)| = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors f est constante.

Exercice 3: Montrer que tout espace connexe par arc est connexe.

Exercice 4: Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ un espace topologique. Montrer que si $f, g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{X}$ sont, respectivement, deux chemins de $x \longrightarrow y$ et $y \longrightarrow z$, alors :

$$h(t) = \begin{cases} f(2t), \text{ si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2t-1), \text{ si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

est un chemin $x \longrightarrow z$ dans $\mathbb{X}$.

Exercice 5: Montrer que toute fonction continue $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$, admet un point fixe $x \in [a,b]$.

Exercice 6: Soient $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{\mathbb{X}})$, $(\mathbb{Y}, \mathcal{T}_{\mathbb{Y}})$ deux espaces topologique tel que $\mathbb{X}$ est connexe par arcs et $f : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ est continue et surjective. Montrer que $\mathbb{Y}$ est connexe par arcs.

Exercice 7: Montrer que $\mathbb{X} = C([a,b])$ avec $d(f,g) = \sup\limits_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)|$ est connexe par arcs et donc connexe.

Exercice 8: Supposons que A et B sont des parties connexes de $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ tel que $Adh(A) \cap B \neq \emptyset$. Montrer que $A \cup B$ est connexe.