Examen du 04 janvier 2016

---

1) Soit **la conique** (Γ) définie par :

$$xy + x + y - 1 = 0$$

a) Trouver, en utilisant deux méthodes différentes, les

asymptotes de (Γ) .

b) Donner la valeur de l'excentricité e.

c) Ecrire l'équation de la conique (Γ) sous sa forme canonique.

d) Donner les équations de l'axe focal et des directrices.

---

2) Soit **la quadrique** (Σ) définie par :

$$x^2 - 4yz + 1 = 0$$

i) Calculer les coefficients de la première forme

fondamentale (E, F, G)

ii) Ecrire l'équation de (Σ) sous sa forme canonique.

iii) Caractériser la nature de la quadrique.

Correction

I) Coniques :

a) Asymptotes :

****On a comme directions asymptotiques :

$$xy = 0 \Longrightarrow \text{ l'axe } x = 0 \text{ et } \text{ l'axe } y = 0$$

Les deux asymptotes passent pas le centre de symétrie :

$\overrightarrow{\text{grad}}\,(xy + x + y - 1) = (y + 1, x + 1) = 0 \Longrightarrow I = (-1, -1)$

d'où les asymptotes : $x = -1,\ y = -1.$

**** L'équation de la conique peut être écrite comme suit

$$xy + x + y - 1 = 0 \Longrightarrow y = \frac{-x + 1}{x + 1}$$

On a ainsi un hyperbole équilatère avec comme asymptotes :

$$x = -1,\ y = -1.$$

et une excentricité $e = \sqrt{2}.$

c) Matrice de passage du changement de repère

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - Y),\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y)$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}(X - Y)(X + Y) + \frac{1}{\sqrt{2}}(X - Y) + \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y) - 1 = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}\left(X^2 - Y^2\right) + \sqrt{2}X - 1 = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}\left(X^2 + 2\sqrt{2}X\right) - \frac{1}{2}Y^2 - 1 = 0$$

$\Longrightarrow$

$$\frac{\left(X + \sqrt{2}\right)^2}{4} - \frac{1}{4}Y^2 = 1$$

L'axe focal a pour équation :

$$Y = 0 \Longrightarrow \quad y = x$$

Avec : $\quad a=2,\ b=2 \Longrightarrow$

$$c = IF = \sqrt{a^2+b^2} = \pm 2\sqrt{2}$$

$$Ik = \frac{a}{e} = \frac{a^2}{c} = \pm\sqrt{2}$$

Ce qui donne les coordonnées des Foyers et des pieds des directrices

On a : $I=(-1,-1),\ F=(x,x) \Longrightarrow \|IF\|^2 = 2\,(x+1)^2 = 8$

$\Longrightarrow x+1=\pm 2 \Longrightarrow$

$$F=(1,1)\,, \qquad F'=(-3,-3)$$

On a aussi : $k=(x,x) \Longrightarrow \|Ik\|^2 = 2\,(x+1)^2 = 2$

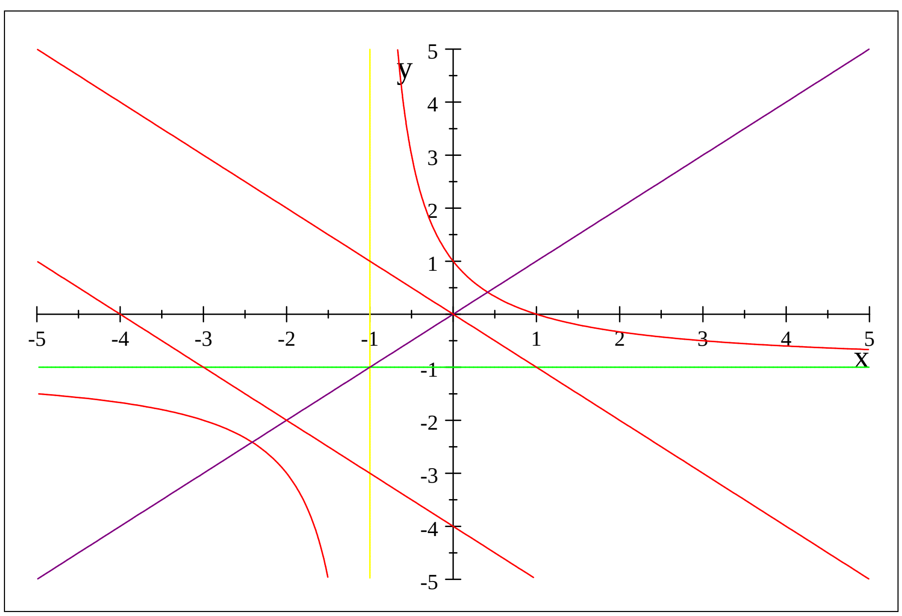
$\Longrightarrow x+1=\pm 1,$

$$k=(0,0)\,, \qquad k'=(-2,-2)$$

.

Ce qui donne comme équation des directrices :

$$y=-x, \qquad y=-x-4$$



2) Quadriques :

I) On a la paramétrisation évidente suivante :

$$M(u,v) = \left\{ \begin{array}{c} x = u \\ y = v \\ z = \dfrac{1+u^2}{4v}, \end{array} \right. \Longrightarrow \frac{\partial M}{\partial u} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \dfrac{u}{2v} \end{array} \right. , \frac{\partial M}{\partial v} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ -\dfrac{1+u^2}{4v^2} \end{array} \right.$$

$\Longrightarrow E = \left\| \dfrac{\partial M}{\partial u} \right\|^2 = 1+\dfrac{u^2}{4v^2},\ F = \dfrac{\partial M}{\partial u}.\dfrac{\partial M}{\partial v} = -\dfrac{u\left(1+u^2\right)}{8v^3}\quad G = \left\| \dfrac{\partial M}{\partial v} \right\|^2 = 1 + \dfrac{\left(1+u^2\right)^2}{16v^4}$

II) Matrice associée à la quadrique

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Valeurs propres : $1, 2, -2$ Matrice de passage :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow x = X,\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(Z - Y\right),\ z = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(Y + Z\right)$

$\Longrightarrow X^2 - 2\left(Z - Y\right)\left(Y + Z\right) + 1 = 0$

$$X^2 + 2Y^2 - 2Z^2 = -1$$

III) Nature de la quadrique : On a une **hyperboloïde à deux nappes**

Jeudi 09/01/2014

Master I. ANS et géométrie
Examen

—

I) Soit la conique $(\mathbf{\Sigma})$ d'équation

$$x^2 - xy + y^2 + x = 0$$

a) En utisant la décomposition de **Goze** d'un point M.du halo

de l'origine, donner une paramétrisation de $(\mathbf{\Sigma})$
b) Déterminer la nature de $(\mathbf{\Sigma})$.
c) Ecrire sous une forme canonique l'équation de $(\mathbf{\Sigma})$.

d) Donner une idée permettant de calculer l'équation de **l'axe focal**.

II) Soit la quadrique d'équation :

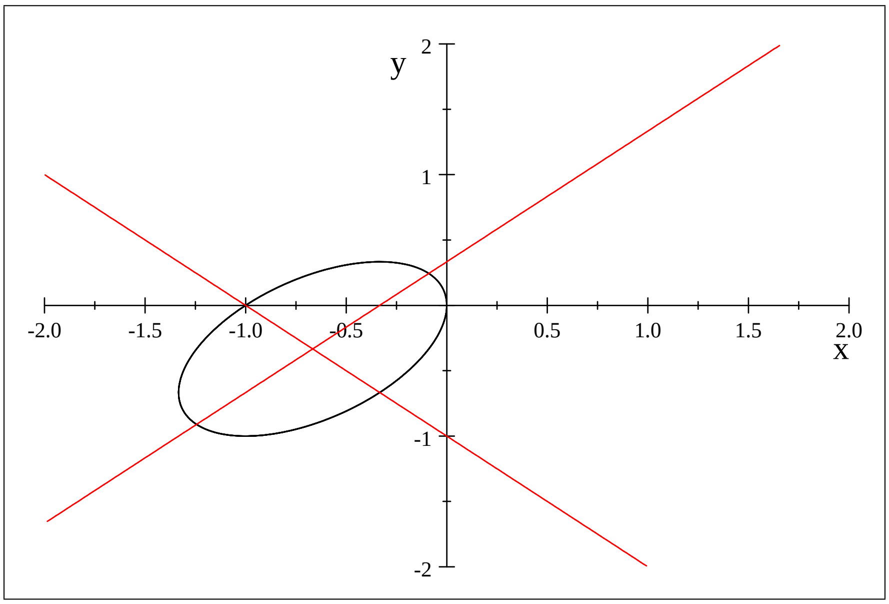
$$\mathbf{xz + yz = 1}$$

i) Déterminer sa nature.
ii) Déterminer l'équation du plan tangent à la quadrique au point $M_0(1, 0, 1)$.
iii) Donner l'expression de la première forme fondamentale en M_0.

Correction

1) Coniques

Graphe de la conique



a) Soit $M \in hal(o)$, l'origine étant un point de $(\mathbf{\Sigma})$.
On a la décomposition de **Goze**

$$M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \varepsilon_1 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \varepsilon_1\varepsilon_2 \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

avec : $x = \varepsilon_1 (a - \varepsilon_2 b)$, $y = \varepsilon_1 (b + \varepsilon_2 a)$.

Si $M \in (\mathbf{\Sigma}) \Longrightarrow$ les coordonnées de M vérifient l'équation de $(\mathbf{\Sigma}) \Longrightarrow$

$$\varepsilon_1^2 (a - \varepsilon_2 b)^2 - \varepsilon_1^2 (a - \varepsilon_2 b)(b + \varepsilon_2 a) + \varepsilon_1^2 (b + \varepsilon_2 a)^2 + \varepsilon_1 (a - \varepsilon_2 b) = 0$$

Aprés simplification par ε_1,et passage à l'ombre, on obtient : $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Ce qui donne la décomposition suivante :

$$M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \varepsilon_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \varepsilon_1\varepsilon_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1\varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 \end{pmatrix}$$

$M \in (\mathbf{\Sigma}) \Longrightarrow$

$$(\varepsilon_1\varepsilon_2)^2 - \varepsilon_1^2\varepsilon_2 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 = 0$$

Aprés simplification par ε_1, on a :

$$\varepsilon_1 = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2^2 - \varepsilon_2 + 1}$$

On a alors

$$\begin{aligned} x &= -\frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_2^2 - \varepsilon_2 + 1} \\ y &= -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2^2 - \varepsilon_2 + 1} \end{aligned}$$

Par permanence, on a une paramétrisation rationnelle de $(\mathbf{\Sigma})$:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{t^2}{t^2 - t + 1} \\ y &= -\frac{t}{t^2 - t + 1} \end{aligned}$$

b) $(\mathbf{\Sigma})$ est une **ellipse**, en effet le discriminant $\Delta = -3$ est négatif.

c) Matrice associée à la partie quadratique de (Σ) : $x^2 - xy + y^2 + x = 0$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Valeurs propres : $\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}$

Vecteurs propres $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} \leftrightarrow \dfrac{1}{2}, \left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} \leftrightarrow \dfrac{3}{2}$

Matrice de passage : $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

D'où : $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - Y)$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y)$.

$\Longrightarrow \frac{1}{2}(X-Y)^2 - \frac{1}{2}(X-Y)(X+Y) + \frac{1}{2}(X+Y)^2$

$+\frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y) = \frac{1}{2}X^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}X + \frac{3}{2}Y^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}Y = 0$

On a alors :

$$\frac{\left(X + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2} + \frac{\left(Y - \frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2} = 1$$

$a = \sqrt{\frac{2}{3}},\ b = \frac{\sqrt{2}}{3} \Longrightarrow c = \frac{2}{3},\ \ e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{2}{3}},\quad Ok = 1$

Centre de l'ellipse dans le nouveau repère : $O = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{6}\right)$

Ce qui donne dans l'ancien repère

$x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{6}\right) = -\frac{2}{3}$

$y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{6}\right) = -\frac{1}{3}$

Autre méthode : on a : $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + x$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - y + 1 = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x + 2y = 0 \Longrightarrow x = 2y$

$\Longrightarrow$

$$y = -\frac{1}{3},\ x = -\frac{2}{3}.$$

L'axe focal dans le nouveau repère, c'est l'axe des $X \Longrightarrow Y - \frac{\sqrt{2}}{6} = 0$

Sachant que : $Y = \frac{-x+y}{\sqrt{2}} \Longrightarrow \frac{-x+y}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{6} = 0 \Longrightarrow$

$$y = x + \frac{1}{3}$$

II)Quadriques .

i) Nature de la quadrique : $xz + yz = 1$

Matrice associée à la quadrique

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Valeurs propres: $\left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow -\frac{1}{2}\sqrt{2}, \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow$
0

Valeurs propres : $\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0$

Vecteurs propres: $\left\{ \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}, \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}, \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 0,$

Matrice de passage :

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

On a : $\quad x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(X - Y - Z), y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(X - Y + Z), \ z = (X + Y)$

On obtient l'expression suivante :

$$\sqrt{2}X^2 - \sqrt{2}Y^2 = \frac{2}{3}$$

La quadrique donnée est un **cylindre hyperbolique**.

ii) Equation du plan tangent au point $M_0(1, 0, 1)$ **:**

le vecteur normal à la quadrique : $\overrightarrow{N} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Soit $M \in T_g(M_0) \Longrightarrow \overrightarrow{M_0M} \perp \overrightarrow{N} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z-1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$x + y + z = 2$$

iii) On a la paramétrisation évidente de la quadrique

$\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \dfrac{1}{u+v} \end{pmatrix} \Longrightarrow \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{(u+v)^2} \end{pmatrix}, \ \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{(u+v)^2} \end{pmatrix}$

$E = \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right\|^2 = 1 + \frac{1}{(u+v)^4},\ F = \frac{\partial\varphi}{\partial u}.\frac{\partial\varphi}{\partial v} = \frac{1}{(u+v)^4}, G = \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right\|^2 = 1 + \frac{1}{(u+v)^4}$

Au point $M_0(1,0,1) \Longrightarrow E = 2,\ F = 1,\ G = 2$

$\Longrightarrow \Phi_1(M_0) = 2\lambda^2 + 2\lambda\mu + 2\mu^2$

Mardi 10 Janvier 2017

Master1. Algèbre et géométrie

Examen ANS et Géométrie

1) Soit la conique d'équation

$$(x + y + 1)(x - y + 4) - 3 = 0$$

a) Sans faire "trop" de calcul, donner la nature de la conique les équations des asymptotes et les coordonnées du centre de symétrie.
b) Ecrire l'équation de la conique sous sa forme réduite.
c) Donner les équations de l'axe focal et des directrices ainsi que les coordonnées des foyers.

2) Soit la conique d'équation

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 - 8x + 8y + 6 = 0$$

i) Sans "faire trop" de calculs, écrire l'équation de la conique sous sa forme canonique.
ii) Donner les éléments caractéristiques.
iii) Faire un schéma de la conique.

Correction

---

1)

a) En posant : $x + y + 1 = X$
$x - y + 4 = Y$

On a :

$$XY = 3$$

La conique est donc une hyperbole avec comme asymptotes

$$x + y + 1 = 0, \quad x - y + 4 = 0$$

Comme les asymptotes sont orthogonales, on a une hyperbole équilatère donc **l'exentricité** est égale à $\sqrt{2}$.
L' intersection des deux asymptotes donne le centre de symétrie de la conique

$$I = \left(-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

b) On a :
$(x + y + 1)(x - y + 4) - 3 = x^2 + 5x - y^2 + 3y + 1 = 0$
$\Longrightarrow$

$$\frac{\left(x + \frac{5}{2}\right)^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2} - \frac{\left(y - \frac{3}{2}\right)^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = 1$$

c) L'axe focal a pour équation :

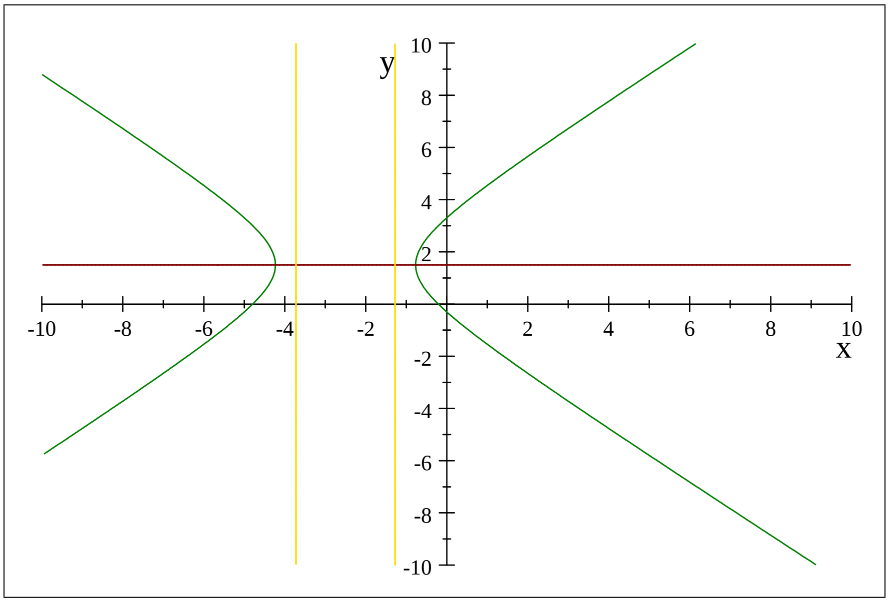
$$y = \frac{3}{2}$$

Avec : $a = b = \sqrt{3} \Longrightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{6}$
Coordonnées des foyer F et $F\prime$:

$$F = (c, 0) = \left(\sqrt{6} + \frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right), \quad F' = (-c, 0) = \left(-\sqrt{6} - \frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

Equation de deux directrices Δ et Δ' :

$$x = \frac{3}{\sqrt{6}} - \frac{5}{2}, \quad x = -\frac{3}{\sqrt{6}} - \frac{5}{2}$$



2)

i) Comme $a = c = 3$, le nouveau repère est obtenu par rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$, ce qui donne directement :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

on a donc :

$\frac{3}{2}(X-Y)^2 - (X-Y)(X+Y) + \frac{3}{2}(X+Y)^2 - \frac{8}{\sqrt{2}}(X-Y) + \frac{8}{\sqrt{2}}(X+Y) + 6 = 0$

$X^2 + 2Y^2 + 4\sqrt{2}Y + 3 = X^2 + 2\left(Y^2 + 2\sqrt{2}Y\right) + 3 \Longrightarrow$

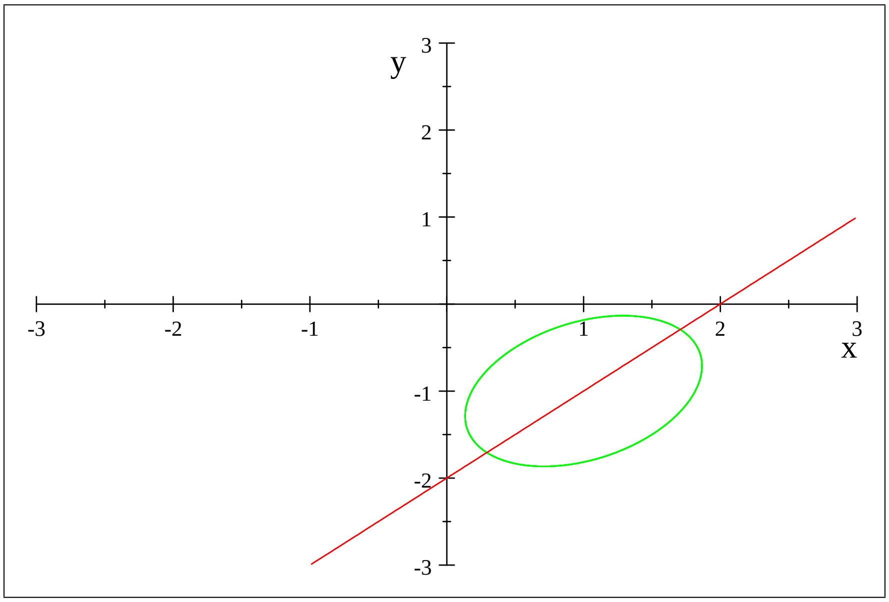
$$X^2 + 2\left(Y + \sqrt{2}\right)^2 = 1$$

On a ainsi une ellipse (conique à centre) avec comme **axe focal**

$$Y = -\sqrt{2} \Longrightarrow y = x - 2$$

ii) On a ainsi :

$$a = 1,\ b = \frac{\sqrt{2}}{2},\ c = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



Master 1 ANS et géométrie

17 mars 2018

I) Soit la conique $(\boldsymbol{\Sigma})$ d'équation :

$$\boxed{x^2 - xy + y^2 + x = 0}$$

a) En utisant la décomposition de **Goze** d'un point M du halo de l'origine, donner une paramétrisation rationnelle de $(\boldsymbol{\Sigma})$

b) Déterminer la nature de $(\boldsymbol{\Sigma})$.

c) Ecrire sous une forme canonique l'équation de $(\boldsymbol{\Sigma})$.

d) Donner une idée permettant de calculer l'équation de **l'axe focal.**

e) Faire une esquisse du graphe de $(\boldsymbol{\Sigma})$.

I) Soit la conique $(\boldsymbol{\Sigma})$ d'équation :

$$\boxed{x^2 + 2xy + y^2 + 3x - 2y + 1 = 0}$$

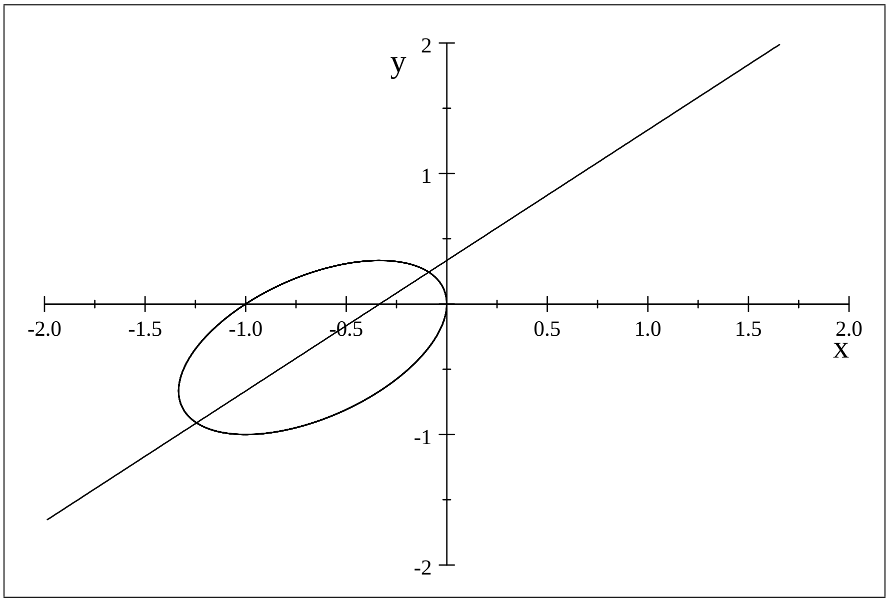
a) Est ce qu l'on a une conique à centre. En déduire sa nature.

c) Ecrire sous une forme canonique l'équation de $(\boldsymbol{\Sigma})$.

d) Calculer les coordonnées du sommet de $(\boldsymbol{\Sigma})$.

---

1) **Graphe de la conique**



a) Soit $M \in hal(o)$, l'origine étant un point de $(\mathbf{\Sigma})$.
On a la décomposition de **Goze**

$$M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \varepsilon_1 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \varepsilon_1\varepsilon_2 \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

avec : $x = \varepsilon_1 (a - \varepsilon_2 b)\,,\ y = \varepsilon_1 (b + \varepsilon_2 a)\,.$

Si $M \in (\mathbf{\Sigma})$
$\Longrightarrow$ les coordonnées de M vérifient l'équation de $(\mathbf{\Sigma})$
$\Longrightarrow$

$$\varepsilon_1^2 (a - \varepsilon_2 b)^2 - \varepsilon_1^2 (a - \varepsilon_2 b)(b + \varepsilon_2 a) + \varepsilon_1^2 (b + \varepsilon_2 a)^2 + \varepsilon_1 (a - \varepsilon_2 b) = 0$$

Aprés simplification par ε_1,et passage à l'ombre, on obtient : $\mathbf{a = 0}$.
Ce qui donne la décomposition suivante :

$$M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \varepsilon_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \varepsilon_1\varepsilon_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1\varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 \end{pmatrix}$$

$M \in (\mathbf{\Sigma}) \Longrightarrow$

$$(\varepsilon_1\varepsilon_2)^2 - \varepsilon_1^2\varepsilon_2 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 = 0$$

Aprés simplification par ε_1, on a :

$$\varepsilon_1 = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2^2 - \varepsilon_2 + 1}$$

On a alors

$$\begin{aligned} x &= -\frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_2^2 - \varepsilon_2 + 1} \\ y &= -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2^2 - \varepsilon_2 + 1} \end{aligned}$$

Par permanence, on a une paramétrisation rationnelle de $(\boldsymbol{\Sigma})$:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{t^2}{t^2 - t + 1} \\ y &= -\frac{t}{t^2 - t + 1} \end{aligned}$$

b) $(\boldsymbol{\Sigma})$ est une **ellipse**, en effet le discriminant $\Delta = -3$ est négatif.

c) Matrice associée à la partie quadratique de (Σ) :
$x^2 - xy + y^2 + x = 0$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Valeurs propres : $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$

Vecteurs propres $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow \frac{1}{2}, \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow \frac{3}{2}$

Matrice de passage :$\dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

D'où : $\quad x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} (X - Y), \; y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} (X + Y).$

On a alors :

$$\frac{\left(X + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2} + \frac{\left(Y - \frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2} = 1$$

II) **Graphe de la conique**

a) On a une fonction à deux variables :

$f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 + 3x - 2y + 1 = 0$

$\Longrightarrow$ grad $f(x,y) = (2x+2y+3,\ 2x+2y-2)$

Le système d'équations :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x+2y+3=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2x+2y-2=0 \end{aligned}$$

n'a pas de solution $\Longrightarrow$ La conique n'a pas de centre

on a donc une parabole.
b) Soit $M \in hal(o,1)$
On a la décomposition de **Goze**

$$M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \varepsilon_1 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \varepsilon_1\varepsilon_2 \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

avec :

$$x = \varepsilon_1 (a - \varepsilon_2 b),\ y = 1 + \varepsilon_1 (b + \varepsilon_2 a)$$

.

Si $M \in (\mathbf{\Sigma}) \Longrightarrow$ les coordonnées de M vérifient l'équation de $(\mathbf{\Sigma}) \Longrightarrow$

$$\begin{aligned} & \varepsilon_1^2 (a-\varepsilon_2 b)^2 + 2\varepsilon_1 (a-\varepsilon_2 b)(1+\varepsilon_1(b+\varepsilon_2 a)) \\ (1+\varepsilon_1(b+\varepsilon_2 a))^2 + 3\varepsilon_1(a-\varepsilon_2 b) - 2(1+\varepsilon_1(b+\varepsilon_2 a)) + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Aprés simplification par ε_1,et passage à l'ombre, on obtient : $\mathbf{a = 0}$.

Ce qui donne la décomposition suivante :

$$M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \varepsilon_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \varepsilon_1\varepsilon_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1\varepsilon_2 \\ 1+\varepsilon_1 \end{pmatrix}$$

$M \in (\boldsymbol{\Sigma}) \Longrightarrow$

$$\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2 + 2\varepsilon_1\varepsilon_2\,(1+\varepsilon_1) + (1+\varepsilon_1)^2 + 3\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\,(1+\varepsilon_1) + 1 = 0$$

Aprés calcul et simplification par ε_1, on a :

$$\varepsilon_1 + 5\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2^2 = 0 \Longrightarrow \varepsilon_1 = -\frac{5\varepsilon_2}{(\varepsilon_2+1)^2}$$

On a alors

$$\begin{aligned} x &= -\frac{5\varepsilon_2^2}{(\varepsilon_2+1)^2} \\ y &= \frac{\varepsilon_2^2 - 3\varepsilon_2 + 1}{(\varepsilon_2+1)^2} \end{aligned}$$

Par permanence, on a une **paramétrisation rationnelle** de $(\boldsymbol{\Sigma})$:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{5t^2}{(t+1)^2} \\ y &= \frac{t^2 - 3t + 1}{(t+1)^2} \end{aligned}$$

c) Matrice associée à la partie quadratique de (Σ) : $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Valeurs propres : $2, 0$

Vecteurs propres : $\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} \leftrightarrow 0, \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} \leftrightarrow 2.$

Matrice de passage : $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

D'où : $x = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(X-Y)\,,\;\; y = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(X+Y)\,.$

On a alors :

$\frac{1}{2}\,(X-Y)^2 + (X-Y)\,(X+Y) + \frac{1}{2}\,(X+Y)^2 + \frac{3}{\sqrt{2}}\,(X-Y) - \frac{2}{\sqrt{2}}\,(X+Y) +$
1

$= 2X^2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}X - \frac{5}{2}\sqrt{2}Y + 1 = 0$

$$\Longrightarrow \quad X^2 + \frac{\sqrt{2}}{4}X = \frac{5\sqrt{2}}{4}Y - \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \left(X + \frac{\sqrt{2}}{8}\right)^2 = \frac{5\sqrt{2}}{4}Y - \frac{15}{32}$$

$$\left(X + \frac{\sqrt{2}}{8}\right)^2 = \frac{5\sqrt{2}}{4}\left(Y - \frac{3\sqrt{2}}{16}\right)$$

d) **Coordonnées du Sommet :**

Dans le nouveau système, on a : $S = \left(-\frac{\sqrt{2}}{8}, \frac{3\sqrt{2}}{16}\right)$

ce qui donne avec les anciennes coordonnées :

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{8} - \frac{3\sqrt{2}}{16}\right) = -\frac{5}{16},$$
$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{3\sqrt{2}}{16}\right) = \frac{1}{16}$$