Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Introduction à la Topologie
Licence Mathématiques-LMD-Semestre 3

Série 6: Espaces compacts

Exercice 1: En utilisant (seulement) la définition de la compacité montrer que $\mathbb{R}$, $[0,+\infty[$ et $]0,1[$ ne sont pas compacts dans $(\mathbb{R},|.|)$.

Exercice 2: L'ensemble A est-il compact dans $\mathbb{X}$ dans les cas suivants:
1) $A=\mathbb{Q}$, $\mathbb{X}=\mathbb{R}$,
2) $A=\left\{\frac{1}{n}: n\in\mathbb{N}^*\right\}$, $\mathbb{X}=\mathbb{R}$
3) A un ensemble infinie dans $(\mathbb{X},\delta)$
4) $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\right\}$, $\mathbb{X}=\mathbb{R}^2$,
5) $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant \frac{1}{x}\right\}$, $\mathbb{X}=\mathbb{R}^2$,
6) $A=\left\{(x, sin\frac{1}{x})\in\mathbb{R}^2 : 0<x\leqslant 1\right\}$, $\mathbb{X}=\mathbb{R}^2$

Exercice 3: Considèrerons l'espace métrique $(\mathbb{Q},d)$ où $d(x,y)=|x-y|$ et $A=\left\{x\in\mathbb{Q}: 2<x^2<3\right\}$. Montrer que A est fermé et borné mais n'est pas compact.

Exercice 4: Soient $(\mathbb{X},\mathcal{T}_{\mathbb{X}})$, $(\mathbb{Y},\mathcal{T}_{\mathbb{Y}})$ deux espaces topologiques tel que $(\mathbb{Y},\mathcal{T}_{\mathbb{Y}})$ est séparé et $f:(\mathbb{X},\mathcal{T}_{\mathbb{X}})\longrightarrow(\mathbb{Y},\mathcal{T}_{\mathbb{Y}})$ une application continue. Montrer que si B est une partie compact de $\mathbb{Y}$, alors $f^{-1}(B)$ est fermé. Trouver un exemple qui montre que $f^{-1}(B)$ n'est pas nécessairement compact.

Exercice 5: Soit $(\mathbb{X},\mathcal{T})$ un espace topologique séparé. Monter que :
1) la réunion finie de parties compactes de $\mathbb{X}$ est compacte.
2) la réunion arbitraire de parties compactes de $\mathbb{X}$ n'est pas nécessairement compacte.

Exercice 6: Montrer que l'espace topologique discret $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{disc})$ est compact si et seulement si $\mathbb{X}$ est fini.

Exercice 7: Soit $(\mathbb{X}, d)$ un espace métrique et $A \subset \mathbb{X}$. Montrer que :

1) Si A est précompact, alors Adh(A) l'est aussi.

2) Si A est précompact, alors A est borné.

Exercice 8: Montrer que tout sous-ensemble fini de $(\mathbb{R}, |.|)$ est compact.

Exercice 9: Soit $(\mathbb{X}, d)$ un espace métrique, $A, B \subset \mathbb{X}$ et $A \cap B = \emptyset$.

1) Montrer que si A est compact et B est fermé, alors $dist(A, B) > 0$.

2) Est ce que $dist(A, B) \neq 0$ si A et B sont fermés ?