Université Ferhat Abbas | Année universitaire 2017/2018

Faculté des Sciences | LMD Science de la Matière

Département de Physique | 1^{ere} Année Semestre1

Examen de Maths1

Exercice N°1 :

1) Soit A := $\left\{\frac{1}{n} + (-1)^n,\ \forall n \in \mathbb{N}^*\right\}$.Déterminer $supA$ et $infA$.

2) Démontrer par récurrence la relation suivante: $\forall n \geq 2$

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots . (n-1) \times n = \frac{1}{3} n(n-1)(n+1)$$

3)Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\text{Arctg}\left(\frac{x-1}{x-2}\right) + \text{arctg}\frac{x+1}{x+2}\Big) = \frac{\pi}{4}$$

Exercice N°2 :

1- Déterminer le domaine de définition D_f de la fonction suivante puis calculer les limites sur les bornes de D_f :

$$f(x) = \sqrt{\frac{2x+3}{5-2x}}$$

2-Déterminer a et b de manière à ce que la fonction suivante soit de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & si :\ 0 \leq x \leq 1 \\ a(x^2-1) + b & si: \quad x > 1 \end{cases}$$

3-Calculer f'(x)

Exercice N °3:

1- Déterminer si l'application suivante est linéaire :

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$; $\quad f(x,y,z) = (2y+z, x+z, x+y)$

2-Déterminer $kerf$ et imf . En déduire si f est injective , surjective ou bijective.

3-Donner une base de $kerf$ et imf puis en déduire leurs dimensions .

Le 18/01/2018.

Corrigé de l'examen
Maths 1

Exercice N°1 . (6 pts)

1) $A = \left\{\frac{1}{n} + (-1)^n,\ \forall n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

$\sup A = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$ (0,5)

$\inf A = -1$ (0,5)

2) $P_n : 1\times 2 + 2\times 3 + \cdots + (n-1)n = \frac{1}{3}n(n-1)(n+1),\ \forall n \geq 2$.

i) $n=2$ on a : $P_2 = 1\times 2 = \frac{1}{3}\cdot 2\times 1\times 3 = 2 \Rightarrow$ la relation est vraie pour $n=2$. (0,5)

ii) On suppose que P_n est vraie et on montre que (0,5)

$P_{n+1} = 1\times 2 + 2\times 3 + \cdots + (n-1)n + n(n+1) = \frac{1}{3}(n+1)n(n+2)$?

on a :

iii) $\underbrace{1\times 2 + 2\times 3 + \cdots + (n-1)n}_{P_n} + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n-1)(n+1) + n(n+1)$

$= \frac{1}{3}n(n+1)[n-1+3] = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$. (1)

$\Rightarrow P_{n+1}$ est vraie $\Rightarrow \forall n \geq 2$ on a : $1\times 2 + 2\times 3 + \cdots + (n-1)n = \frac{1}{3}n(n-1)(n+1)$ (0,5)

3) $\operatorname{Arctg}\frac{x-1}{x-2} + \operatorname{arctg}\frac{x+1}{x+2} = \frac{\pi}{4}$.

on a : $\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tg}a + \operatorname{tg}b}{1 - \operatorname{tg}a\cdot\operatorname{tg}b}$. $\Rightarrow$

$\operatorname{tg}\Big(\underbrace{\operatorname{arctg}\frac{x-1}{x-2}}_{a} + \underbrace{\operatorname{arctg}\frac{x+1}{x+2}}_{b}\Big) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1 = \dfrac{\frac{x-1}{x-2} + \frac{x+1}{x+2}}{1 - \frac{x-1}{x-2}\cdot\frac{x+1}{x+2}} =$ (0,5)

$\operatorname{tg}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{x-2} = \frac{x-1}{x-2}$, $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{x+1}{x-2}\right) = \frac{x+1}{x-2}$

$= \dfrac{\frac{(x-1)(x+2)+(x+1)(x-2)}{(x-2)(x+2)}}{\frac{(x-2)(x+2)-(x-1)(x+1)}{(x-2)(x+2)}} = \dfrac{x^2+x-2+x^2-x-2}{x^2-4-(x^2-1)} = \dfrac{2x^2-4}{-3} = 1$ (2)

$\Rightarrow 2x^2 - 4 = -3 \Rightarrow 2x^2 - 1 = 0 = (\sqrt{2}x-1)(\sqrt{2}x+1) \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice N°2 : 7 pts

I $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x+3}{5-2x}}$, $D_f=?$

On a : $\dfrac{2x+3}{5-2x}\geq 0$ et $5-2x\neq 0$.

$(2x+3)(5-2x)=0 \Rightarrow x=\frac{-3}{2}$ et $x=\frac{5}{2}$.

et $(2x+3)(5-2x)\geq 0 \Rightarrow x\in\left[-\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right[=D_f$ 0,5

$\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-\frac{3}{2}}\sqrt{\dfrac{2x+3}{5-2x}}=0$ 0,5 et $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}\frac{5}{2}}\sqrt{\dfrac{2x+3}{5-2x}}=+\infty$ 0,5

II $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & \text{si } 0\leq x\leq 1\\ a(x^2-1)+b & \text{si } x>1\end{cases}$.

- f continue en $x=1$.

$\lim\limits_{x\overset{<}{\to}1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x}=1$ 0,5 ; $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1}f(x)=\lim a(x^2-1)+b=b$. $\cancel{0}$

1) f continue en $x=1$ ssi $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}1}f(x)=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1}f(x)=1=b$. 0,5

- $\sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc sa restriction à $[0,1[$ reste continue .

$a(x^2-1)+b$ est continue sur $\mathbb{R}\Rightarrow$ sa restriction à $]1,+\infty[$ est continue .

$\Rightarrow$ f est continue sur $[0,1[\cup]1,+\infty[$. 0,5

$\Rightarrow$ f est continue sur $[0,+\infty[$.

2) f est derivable en $x=1$. 0,5

$f'_d(1)=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{a(x^2-1)+\cancel{1}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}a(x+1)=2a$.

$f'_g(1)=\lim\limits_{x\overset{<}{\to}1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1}\cdot\dfrac{1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{1}{2}$ 0,5

f est derivable en $x=1$ si $f'_g(1)=f'_d(1)=2a=\frac{1}{2} \Rightarrow a=\frac{1}{4}$. 0,5

* $\sqrt{x}$ est derivable sur $]0,+\infty[\Rightarrow$ sa restriction à $]0,1[$ est derivable.

$a(x^2-1)+b$ est derivable sur $\mathbb{R} \Rightarrow$ sa restriction à $]1,+\infty[$ est derivable.

$\Rightarrow f$ est derivable sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ 0,5

$\Rightarrow f$ est derivable sur $]0,+\infty[$.

3- $$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } x\in]0,1[\\ \frac{1}{2} & \text{si } x=1 \\ \frac{1}{2}x & \text{si } x\in]1,+\infty[\end{cases}$$ 1

on a : $$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & \text{si } x\in[0,1] \\ \frac{1}{4}(x^2-1)+1 & \text{si } x\in]1,+\infty[\end{cases}$$ 0,5

* f' est continue sur $\mathbb{R}_+^*$?

- $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ est continue sur $]0,+\infty[\Rightarrow$ sa restriction à $]0,1[$ est continue

- $\frac{1}{2}x$ est continue sur $\mathbb{R} \Rightarrow$ sa restriction à $]1,+\infty[$ est continue.

* au pt $x=1$: $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1} f'(x)=\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}$.

$\lim\limits_{x\overset{<}{\to}1} f'(x)=\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2}$;

$\Rightarrow \lim\limits_{x\overset{<}{\to}1} f'(x)=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1} f'(x)=\frac{1}{2}=f'(1) \Rightarrow f'$ est continue en $x=1$ et on déduit que $f'(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ 0,5

Exercice N° 3 7 pts

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 ; f(x,y,z) = (2y+z, x+z, x+y)$.

I- f est linéaire si :

1) $\forall (x,y,z), (x',y',z') \in \mathbb{R}^3 : f((x,y,z)+(x',y',z')) \stackrel{?}{=} f(x,y,z) + f(x',y',z')$.

$f((x,y,z)+(x',y',z')) = f((x+x', y+y', z+z')) = (2(y+y')+(z+z'), (x+x')+(z+z'), (x+x')+(y+y'))$

$= (2y+z, x+z, x+y) + (2y'+z', x'+z', x'+y') = f(x,y,z) + f(x',y',z')$ 0,5

2) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(\alpha(x,y,z)) \stackrel{?}{=} \alpha f(x,y,z)$ 0,5

$f(\alpha(x,y,z)) = f((\alpha x, \alpha y, \alpha z)) = (2\alpha y + \alpha z, \alpha x + \alpha z, \alpha x + \alpha y)$

$= (\alpha(2y+z), \alpha(x+z), \alpha(x+y)) = \alpha(2y+z, x+z, x+y) = \alpha f(x,y,z)$.

de 1 et 2 on déduit que f est linéaire.

II - * $\ker f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / f(x,y,z) = (0,0,0)\}$ 0,5

$f(x,y,z) = (2y+z, x+z, x+y) = (0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} 2y+z = 0 & (1) \\ x+z = 0 & (2) \\ x+y = 0 & (3) \end{cases}$

(2) - (3) $= z - y = 0 \Rightarrow z = y$. On substitue dans 1.

$2y + y = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow z = 0 \Rightarrow x = 0$. de (3) 0,5

$\Rightarrow \ker f = \{(0,0,0)\}$ 0,5 $\Rightarrow f$ est injective 0,5 et $\dim \ker f = 0$ 0,5

* $\operatorname{Im} f = ?$

$f(x,y,z) = (2y+z, x+z, x+y) = (0,x,x) + (2y,0,y) + (z,z,0)$

$= x(0,1,1) + y(2,0,1) + z(1,1,0) \Rightarrow \operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\{(0,1,1),(2,0,1),(1,1,0)\}$ 1

Les vecteurs $(0,1,1),(2,0,1),(1,1,0)$ sont-ils libres ?

$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} : \alpha(0,1,1) + \beta(2,0,1) + \gamma(1,1,0) = (0,0,0) \Rightarrow$

$\underset{(1)}{2\beta + \gamma = 0}, \underset{(2)}{\alpha + \gamma = 0}, \underset{(3)}{\alpha + \beta = 0}$.

② ③ $= \gamma - \beta = 0 \Rightarrow \gamma = \beta$ on substitue dans ① : $2\beta + \beta = 3\beta = 0$

$\Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow \gamma = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ de ③. 0,5

$\Rightarrow$ la famille $\{(0,1,1),(2,0,1),(1,1,0)\}$ est libre

$\Rightarrow \{(0,1,1),(2,0,1),(1,1,0)\}$ 1 est une base de $\operatorname{Im} f$.

$\Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = 3$. et $\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^3 \Rightarrow f(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^3$ 0,5

$\Rightarrow f$ est surjective 0,5

$\Rightarrow f$ est bijective.