1. Introduction

Outre son intérêt théorique, le problème dual possède de très intéressantes applications économiques.

2. Programme Primal

Tous les programmes linéaires peuvent s'écrire sous cette forme

$$\text{Max } Z_p = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

$$\text{tel que}\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \ldots & +a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \ldots & +a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + & \ldots & +a_{mn}x_n & \leq & b_m \\ x_j \geq 0 \quad \forall_j = 1,n;\ b_i \text{ étant de signe quelconque} \quad \forall i = 1,m \end{cases}$$

On désigne cette représentation sous le terme de *forme primale.*

Par définition, un programme primal est un programme linéaire consistant à maximiser une fonction économique dans un domaine défini par des contraintes sous forme d'inéquations de type inférieures ou égales ($\leq$).

3. Programme Dual

On désigne alors sous le terme de *forme duale* le problème suivant:

$$\text{Min} Z_d = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m$$

$$\text{tel que}\begin{cases} a_{11}y_1 + & a_{21}y_2 + & \ldots & +a_{m1}y_n & \geq & c_1 \\ a_{12}y_1 + & a_{22}y_2 + & \ldots & +a_{m2}y_n & \geq & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n}y_1 + & a_{2n}y_2 + & \ldots & +a_{mn}y_n & \geq & c_n \\ y_j \geq 0 \quad \forall_i = 1,m \end{cases}$$

Par définition, le programme dual est un programme linéaire consistant à minimiser une fonction économique dans un domaine défini par des contraintes sous forme d'inéquations de type inférieures ou égales ($\geq$).

Les deux problèmes sont très fortement liés. Si l'un d'entre eux possède une solution optimale, alors l'autre aussi. De plus, les deux solutions ont alors la même valeur (Zp*=Zd*). Si l'un d'entre eux est non-borné, l'autre ne possède pas de solution.

4. Remarques

Il faut remarquer que :

a) Le nombre de variables duales est égal au nombre de contraintes du programme primal
b) Le nombre de contraintes du programme dual est égal au nombre de variables du programme primal
c) Les coefficients de **Zd** sont les seconds membres des contraintes du primal.
d) Les seconds membres des contraintes du dual sont les coefficients de **Zp**
e) Pour, les premiers membres des contraintes, les lignes du dual sont formées par les colonnes du primal.

5. Exemple

Programme original :

$$MaxZ = 0.75x_1 + 1.6x_2 + 2.4x_3 + 1.5x_4$$

$$tel\ que \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 320 \\ 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 \geq 20 \\ x_j \geq 0 \ \ pour\ j = 1,4 \end{cases}$$

Programme primal :

$$MaxZ_p = 0.75x_1 + 1.6x_2 + 2.4x_3 + 1.5x_4$$

$$tel\ que \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 320 \\ 3x_3 - x_4 \leq 0 \\ -3x_3 + x_4 \leq 0 \\ -x_1 + 2x_2 \leq -20 \\ x_j \geq 0 \ \ pour\ j = 1,4 \end{cases}$$

Programme dual :

Dénotons la variable duale associé à la 1ière contrainte par y_1
Dénotons la variable duale associé à la 2ième contrainte par y_2
Dénotons la variable duale associé à la 3ième contrainte par y_3
Dénotons la variable duale associé à la 4ième contrainte par y_4

$$MinZd = 320y_1 + 0y_2 + 0y_3 - 20y_4$$

$$tel\ \ que \begin{cases} y_1 + 0y_2 + 0y_3 - y_4 \geq 0.75 \\ 2y_1 + 0y_2 + 0y_3 + y_4 \geq 1.6 \\ 3y_1 + 3y_2 - 3y_3 + 0y_4 \geq 2.4 \\ y_1 - y_2 + y_3 + 0y_4 \geq 1.5 \\ y_i \geq 0\ pour\ \ i = 1,4 \end{cases}$$

$$MinZd = 320y_1 - 20y_4$$

$$tel\ \ que \begin{cases} y_1 - y_4 \geq 0.75 \\ 2y_1 + y_4 \geq 1.6 \\ 3y_1 + 3y_2 - 3y_3 \geq 2.4 \\ y_1 - y_2 + y_3 \geq 1.5 \\ y_i \geq 0\ pour\ \ i = 1,4 \end{cases}$$

6. Propriétés du programme dual

Soit un programme primal à n variables originales $(x_1, \quad x_2, \quad \ldots \quad x_j, \quad \ldots \quad x_n)$ et m contraintes,

Et un programme dual correspondant, à m variables originales $(y_1, \quad y_2, \quad \ldots \quad y_i, \quad \ldots \quad y_m)$ et n contraintes.

Dénotons par $x_{n+i} \quad (i = 1, m)$ les variables d'écart dans le primal

Et par $y_{m+j} \quad (j = 1, n)$ les variables d'excédent dans le dual.

a) S'il existe une solution finie au programme primal
   1) Cette relation est vraie pour toute solution des programmes primal et dual :

$$Z_p \leq Z_d \quad et\ à\ l'optimum \quad Z_p = Z_d$$

   2) La solution optimale du programme dual est :

$$y_i = Z_{n+i} - C_{n+i} \quad \forall i = 1, m \qquad (Z_{n+i} - C_{n+i} \text{ des v.d'écarts})$$
$$y_{m+j} = Z_j - C_j \quad \forall j = 1, n \qquad (Z_j - C_j \text{ des v.originales})$$

b) En liaison avec le programme primal,
   1) La variable originale y_i ,associé à la i^{ième} contrainte du primal, indique l'accroissement marginal de la fonction économique du primal correspondant à un accroissement marginal du second membre de la i^{ème} contrainte du primal
   2) La variable d'excédent y_{m+j} indique la diminution marginale de la fonction économique du primal si l'on oblige à rendre positive la variable originale x_j du primal.

c) Si dans le modèle original,
   1) La i^{ème} contrainte, est une inéquation de forme ($\leq$), à l'optimum, la valeur de la variable duale y_i est égale au coefficient $Z_j - C_j$ de la variable d'écart utilisée dans cette contrainte.
   2) La i^{ème} contrainte, est une équation (=), à l'optimum, la valeur de la variable duale y_i est égale au coefficient $Z_j - C_j \quad (où\ C_j = 0\ et\ non\ à\ \text{-}M)$ de la variable artificielle utilisée dans cette contrainte.
   3) La i^{ème} contrainte, est une inéquation de forme ($\geq$), à l'optimum, la valeur de la variable duale y_i est égale au coefficient $Z_j - C_j$ de la variable d'excédent utilisée dans cette contrainte.