Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Introduction à la Topologie

Licence Mathématiques-LMD-Semestre 3

Série 5: Espaces métriques complets

Exercice 1: Parmi les ensembles suivants, indiquez ceux qui sont complets dans l'espace $(\mathbb{R}, |.|)$.
1) $\mathbb{Q}$, **2)** $\complement_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$, **3)** $\mathbb{Q}\cap[5,6]$ **4)** $]1,+\infty[$, **5)** $\{n : n \geqslant 1\}$, **6)** $\{(-1)^n : n \geqslant 1\}$.

Exercice 2: Montrer que tout espace métrique discret est complet.

Exercice 3: $\mathbb{R}$ est-il complet avec les distances suivantes :
1) $d_a(x,y) = |x^3 - y^3|$, **2)** $d_b(x,y) = |e^x - e^y|$, **3)** $d_c(x,y) = |tan^{-1}(x) - tan^{-1}(y)|$.

Exercice 4: Si $(\mathbb{X}, d)$ est un espace métrique complet et $\mathbb{Y} \subset \mathbb{X}$, alors $(\mathbb{Y}, d)$ est complet si et seulement si $\mathbb{Y}$ est fermé dans $\mathbb{X}$.

Exercice 5: Montrer que toute réunion finie de parties complètes de X est une partie complète de X.

Exercice 6: Soient $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ et $(\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$ deux espaces métriques tel que $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ est complet. Soit A un ensemble fermé et $f : A \longrightarrow \mathbb{Y}$ une fonction continue qui satisfait $d_{\mathbb{Y}}(f(x), f(y)) \geqslant d(x,y)$, $\forall\ x, y \in A$. Montrer que $f(A)$ est fermé dans $(\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$.

Exercice 7: Soient $f : (\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}}) \longrightarrow (\mathbb{Y}, d_{\mathbb{Y}})$ uniformément continue et $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{X}$.
1) Montrer que $(f(x_n))$ est de Cauchy dans $\mathbb{Y}$.
2) Si de plus, f est bijective et f^{-1} est continue, montrer que si $\mathbb{Y}$ est complet, alors $\mathbb{X}$ est complet.

Exercice 8: Soit $\mathbb{X} = \{x \in \mathbb{Q} : x \geqslant 1\}$. Considérons la fonction $f : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ définie par $f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{x}$.

1) Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{X}$, $|f(x) - f(y)| \leqslant \dfrac{1}{2}|x - y|$.

2) Montrer que f ne possède aucun point fixe.

3) Pourquoi le résultat de la question précédente ne contredit pas le théorème de point fixe.

Exercice 9:

1) Montrer que pour $x \geqslant 1$ et $t \geqslant 0$, $\sqrt{x+t} - \sqrt{x} \leqslant \dfrac{t}{2}$

2) Montrer que $f(x) = \sqrt{x}$ est une contraction sur $[1, +\infty)$.

3) Trouver le point fixe de f.

Exercice 10: Soit $f : [1, +\infty[\longrightarrow [1, +\infty[$ définie par $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

1) Montrer que $[1, +\infty[$ est complet et que $|f(x) - f(y)| < |x - y|$, pour tout $x, y \in [1, +\infty[$.

2) Montrer que f ne possède aucun point fixe.