1. Introduction

Pour pouvoir appliquer la méthode du simplexe nous le répétons (puisque nous l'avons déjà dit), qu'il est impératif d'avoir :

- Le système de contraintes sous d'équations
- Une solution de base de départ

2. Expression de la première solution de base

- Choisissons un programme linéaire transformé à **m** contraintes et (**n+m**) variables dont **m** variables sont déjà isolées et donc considérées comme variables de base.
- Dénotons ces **m** variables de base par $x_i*\ \ pour\ \ i=1,m$ et leur coefficient dans la fonction économique par C_i*.

$$Max\ Z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j+\sum_{i=1}^{m}c_{i*}\,x_{i*}$$

$$\text{tel que}\ \begin{cases}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}a_{1j}x_j+x_{1*} & =b_1\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+\qquad x_{i*} & =\ b_i\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n}a_{mj}x_j\qquad\qquad+\ x_{m*} & =\ b_m\\ x_j\geq\ 0\qquad \text{j=1,n} & \\ x_{i*}\geq\ 0\qquad \text{j=1,m} & \end{cases}$$

L'expression des variables de base en fonction des variables hors base devient :

$$x_{1*} = b_1 \quad \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j$$

$$x_{2*} = b_2 \quad \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j$$

……………………………………………………

$$x_{i*} = b_i \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$$

……………………………………………………

$$x_{m*} = {}_m - \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j$$

3. Critère d'optimalité

Utilisons cette solution de base et exprimons la fonction économique en fonction uniquement des variables hors base.

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum c_{i*}[b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$$

$$Z = \sum_{i=1}^{m} c_{i*} b_i - \quad x_j \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j]$$

Posons :

$$Z_0 \quad \sum_{i=1}^{m} c_{i*} b_i \qquad \text{et} \qquad Z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$$

Avec cette notation, l'expression devient :

$$Z = Z_0 - \sum_{j=1}^{n} x_j [Z_j - C_j$$

Énonçons le critère d'optimalité :

Lorsqu'on maximise une fonction économique et que celle-ci a un maximum, la solution de base maximale est obtenue lorsque tous les coefficients $Z_j - C$ des variables hors base sont non négatifs ($Z_j - C_j \geq 0$)

Pour la solution de base :

$$x_j = 0 \qquad \text{pour } j \quad 1, n$$

$$x_{i*} = b \qquad \text{pour } i \quad 1, m$$

la fonction économique a pour valeur Z_0

4. Interprétation générale des coefficients $Z_j - C$

Soit : $$Z = Z_0 - \sum_{j=1}^{n} x_j [Z_j - C_j$$

Dans cette fonction économique, le coefficient $Z_k - C_k$ de la variable hors base x_k est par définition :

$$Z_k - C_k = \sum_{i=1}^{m} C_{i*} \, a_{ik} - C_k$$

Supposons que l'on pose : $$\begin{cases} x_k = 1 \\ x_j = 0 \quad \text{pour } j \neq k,\ j = 1, n \end{cases}$$

Rappelons l'expression de la solution de base :

$$x_{1*} = b_1 \quad \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j$$

$$x_{2*} = b_2 \quad \sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j$$

……………………………………………………………

$$x_{i*} = b_i \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

Nous obtenons une nouvelle solution sans être nécessairement une solution de base $x_k = 1$

$$x_{*i} = b_i - a_{ik} \quad \text{pour } i = 1, m$$

Car les autres variables sont nulles puisque elles sont variables hors base

En considérant l'expression originale de la fonction économique

$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{1} c_{i*} x_{i*}$, sa valeur pour cette solution devient :

$$Z = C_k + \sum_{i=1}^{m} c_{i*} (b_i - a_{ik}$$

$$Z = \sum_{i=1}^{m} c_{i*} b_i + C_k - \sum c_i \; a_{ik}$$

$$Z = Z_0 + C_k - Z_k = Z \;\; - (Z_k - C_k)$$

Nous voyons bien l'effet sur la fonction économique d'un tel accroissement unitaire donné à la variable hors base x_k

Ceci nous permet donc de donner l'interprétation générale suivante aux coefficients $(Z_j - C_j)$ des variables hors base x_j :

Le coefficient $(Z_j - C_j)$ exprime la modification globale apportée à la fonction économique lorsqu'un accroissement unitaire est donné à la variable hors base x_j .

Cette modification sera une diminution de la fonction économique si $(Z_j - C_j)$ est positif tandis qu'elle sera une augmentation de la fonction économique si $(Z_j - C_j)$ est positif.

5. Critère pour choisir une nouvelle variable de base

L'interprétation donnée à $(Z_j - C_j)$ nous indique que si ce coefficient est négatif et que si l'on donne à la variable correspondante x_j une valeur positive, on augmente ainsi d'autant la valeur de la fonction économique.

Il suffit donc de rendre variable de base la variable hors base x_j dont le coefficient $(Z_j - C_j)$ est négatif, lorsque plus d'un coefficient $(Z_j - C_j)$ est négatif, nous choisirons comme variable de base celle dont le coefficient $(Z_j - C_j)$ est le plus grand en valeur absolue car c'est celle qui donne le plus grand accroissement marginal à la fonction économique.

6. Passage d'une solution de base à une autre

- Supposons donc, que $(Z_k - C_k)$ est négatif et que l'on rende x_k variable de base dans la l[ième] équation, à la place de la variable $x*_l$.
- On avait un premier ensemble de variables de base :

$$(x_{1^*}, \ldots\ldots, x_{i^*}, \ldots\ldots, x_{l-1^*}, x_{l^*}, x_{l+1^*}, \ldots\ldots, x_{m^*})$$

- Et nous considérons un nouvel ensemble de variables de base :

$$(x_{1^*}, \ldots\ldots, x_{i^*}, \ldots\ldots, x_{l-1^*}, x_k, x_{l+1^*}, \ldots\ldots, x_{m^*})$$

- Dont l'expression, en fonction des variables hors base, est obtenue à l'aide de l'expression de la solution de base :

$$x_{1^*} = b_1 \quad \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j$$

$$x_{2^*} = b_2 \quad \sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j$$

....

$$x_{i^*} = b_i \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

....

$$x_{m^*} = b_m \quad \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j$$

On avait :

$$x_{l^*} = b_l \quad \sum_{j=1}^{n} a_{lj} x_j$$

$$x_{l\,*} = b_l - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} a_{lj}x_j - a_{lk}x_k$$

D’où :

$${}_k = \frac{{}_l}{a_{lk}} - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \frac{a_{lj}}{a_{lk}}x_j - \frac{x_{\ *}}{a_{lk}}$$

De même on avait :

$$x_{i\,*} \qquad b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$$

$$x_{i\,*} = b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} a_{ij}x_j - a_{ik}x_k$$

En substituant x_k par sa valeur, on obtient :

$$b_i - \sum_{j\neq k}^{n} a_{ij}x_j - a_{ik}\left[\frac{{}_l}{a_{lk}} - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}} \left(\frac{a_{lj}}{a_{lk}}\right)x_j - \frac{x_{\ *}}{a_{lk}}\right]$$

$$x_{i*} = b_i - a_{ik}\frac{b_l}{a_{lk}} - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} x_j\left[a_{ij} - a_{ik}\frac{a_{lj}}{a_{lk}}\right] + a_{ik}\frac{{}^*}{a_{lk}}$$

Ceci pour i =1, m et i ≠ l

Ces expressions nous permettent d’énoncer les règles de calcul des nouveaux coefficients.

Règles :

Lorsque la variable hors base x_k devient variable de base dans la l^{ième} équation.

1) Les nouveaux coefficients (a_{ij}) de la l^{ième} équation sont obtenus en divisant par le coefficient a_{lk} de x_k dans la l^{ième} équation tous les coefficients a'_{ij} de la l^{ième} équation.

$$a'_{lj} = \frac{a_{lj}}{a_{lk}}$$

Les nouveaux coefficients a'_{ij} de la i^{ième} équation (i≠l) sont obtenus en soustrayant des anciens coefficients a_{ik} le produit obtenu par la multiplication du coefficient a_{ik} de x_k dans la i^{ième} équation et du nouveau coefficient a'_{lj} de la l^{ième} équation

$$a'_{ij} = a_{ij} - a_{ik}.a_{\ \ lj}$$

$a'_{ij} = a_{ij} - a_{ik}.a'_{lj} = a_{ij} - \frac{a_{ik}.a_{lj}}{a_{lk}} = \frac{(a_{ij}.a_{lk} - a_{ik}.a_{lj})}{{}_{lk}}$, ceci est le fameux produit en croix dans la procédure de Gauss-Jordan

2) Les mêmes règles s'appliquent lors du calcul des nouveaux seconds membres b'_i

$b'_l = \frac{b_l}{a_{lk}}$ et $b'_i = b_i - a_{ik}.b'_l$ pour i ≠ l

Ces règles ne sont, en fait, que l'application de la procédure d'élimination de Gauss-Jordan.

7. Critère pour choisir l'équation recevant la nouvelle variable de base

Nous avions décidé de rendre x_k variable de base dans la i$^{\text{ième}}$ équation. La solution de base obtenue donne aux variables de base les valeurs suivantes :

$$x_k = \frac{b_l}{a_{lk}}$$

$$x_{i^*} = \; b_i \quad a_{ik}\frac{b_l}{a_{lk}}$$ pour i=1, m ; i ≠ l

Cette solution est de base si toutes les variables sont non négatives. Examinons à quelles conditions ceci est vérifié.

1. La nouvelle variable de base $x_k = \frac{b_l}{a_{lk}}$ est non négative si $a_{lk} > 0$, car par convention tous les b_i sont positif.
2. Examinons les nouvelles valeurs des anciennes variables de base qui sont restées variables de base $x_{i^*} \; = \; b_i \quad a_{ik}\frac{b_l}{a_{lk}}$.

   a) Si $a_{ik} < 0$, alors $x_{i^*} = \; b_i \quad a_{ik}(\frac{b_l}{a_{lk}})$ est toujours non négatif.

   b) Si $a_{ik} > 0$, alors $x_{i^*} = \; b_i \; - a_{ik}\frac{b_l}{a_{lk}} \geq 0$ si $b_i \quad a_{ik}\frac{b_l}{a_{lk}} \geq 0$

   C'est-à-dire : $\frac{b_i}{a_{ik}} \geq \frac{\;\;l}{\;\;lk}$.

Si ces conditions sont vérifiées, on est assuré que la nouvelle solution est de base d'où le critère suivant assurant que la nouvelle solution est de base :

Si l'on décide de rendre la variable hors base x_k variable de base dans la i^ième^ équation, on est assuré d'obtenir une nouvelle solution de base respectant toutes les contraintes si :

1) $a_{lk} > 0$
2) $\frac{b_i}{a_{ik}} \geq \frac{b_l}{a_{lk}} \quad \equiv \quad \frac{b_l}{a_{lk}} = \min_i \left\{ \frac{b_i}{a_{ik}} \;; a_{ik} > 0 \right\}$

8. Valeur de la fonction économique pour cette nouvelle solution de base

La valeur de la fonction économique est donc :

$$Z = Z_0 - \sum_{j=1}^{n} x_j [Z_j - C_j$$

$$Z = Z_0 - x_k (Z_K - C_K) \quad \text{où} \quad \left| \begin{array}{l} -C_k < 0 \\ x_k = \frac{b_l}{a_{lk}} \end{array} \right.$$

Vérifications : Puisque toutes les variables hors base seront nulles et par conséquent les nouvelles variables de base seront :

$$x_k = \frac{b_l}{a_{lk}}$$

$$x_{i^*} = b_i - a_{ik} \frac{b_l}{a_{lk}} \text{ pour } i = 1, m \;; \; i \neq l$$

$$Z = C_k \frac{b_l}{a_{lk}} + \sum_{i \neq l}^{m} c_{i^*}\, b_i - a_{ik} \frac{}{lk}]$$

Puisque $bl \quad a_{lk} \frac{b_l}{a_{lk}} = 0$ nous pouvons aussi écrire :

$$Z = C_k \frac{b_l}{a_{lk}} + \sum_{i \neq l}^{m} c_{i^*} [b_i - a_{ik} \frac{b}{lk}$$

$$Z = \sum_{i=1}^{m} c_{i^*} b_i - \frac{b_l}{a_{lk}} [\ \overset{m}{\underset{1}{}} \ c_i \quad a_{ik} - c_k$$

$$Z = Z_0 - \frac{}{a_{lk}} [Z_k - C_k] \quad \text{où} \quad \left| \frac{b_l}{lk} = x_k \right.$$

9. Tableaux du simplexe

Afin d'accélérer le calcul le calcul, nous utilisons des tableaux où n'apparaissent que les coefficients

Tableau du simplexe		c_1	c_2	…	c_k	…	c_j	…	c_n	…	c_{1^*}	…	c_{m^*}	b
c^*	x^*	x_1	x_2	…	x_k	…	x_j	…	x_n	…	x_{1^*}	…	x_{m^*}	
c_{1^*}	x_{1^*}	a_{11}	a_{12}	…	a_{1k}	…	a_{1j}	…	a_{1n}	…	1	…	0	b_1
…	…	…												…
c_{i^*}	x_{i^*}	a_{i1}	a_i	…	a_{ik}	…	a_{ij}	…	a_{in}		0	.1.	0	b_i
…	…	…												…
c_{l^*}	x_{l^*}	a_{l1}	a_{l2}	…	a_{lk}	…	a_{lj}	…	a_{ln}	…	0	…	0	b_l
…	…	…												…
c_{m^*}	x_{m^*}	a_{m1}	a_m	…	a_{mk}	…	a_{mj}	…	a_{mn}		0	…	1	b_m
Z_j		Z_1	Z_2	…	Z_k	…	Z_j	…	Z_n	…	Z_{1^*}	…	Z_{m^*}	Z_0
$Z_j - C$		$Z_1 - C_1$	$Z_2 - C_2$	…	$Z_k - C_k$	.	$Z_j - C_j$	.	$Z_n - C_n$	.	0	.	0	

Après avoir construit ce tableau, il suffit de vérifier le signe des coefficients $Z_j - C$. Si aucun de ces coefficients n'est négatif, le maximum est trouvé et la solution optimale est :

$$x^{*} \quad b_i \ pour \quad i = 1, m$$

$$x_j = 0 \quad pour \ j \quad 1, n$$

10.Exemple

Une entreprise vend quatre produits liquides, dénotés L_1, L_2, L_3et L_4, dont le profit est 0.75 da, 0.80 da, 0.80 da et 1.5da du gallon. Pour remplir son camion-citerne dont la capacité est de 320 gallons, elle utilise quatre vielles machines à pression, chacune affectée à l'un des produits. L'inconvénient de ses machines est que le nombre de gallons propulsés à chaque jet diffère d'une machine à l'autre. Ainsi, la machine affectée au liquide L_1 propulse un gallon par jet, tout comme d'ailleurs celle affectée au liquide L_4. Par contre les machines affectées aux liquides L_2et L_3 propulsent à chaque jet 2 et 3 gallons de ces liquides.

L'un des clients de l'entreprise exige qu'elle lui livre toutes les semaines un camion d'un liquide composé d'autant de gallons de l3 que de gallon de L4 et d'au moins 20 gallons de plus de L_1 que de gallons de L_2.

L'entreprise désire connaitre le nombre de jets que devra faire chaque machine lors du remplissage du camion pour que chaque livraison à ce client lui rapporte un profit maximal.

A) **Formulation**

1)*Les variables* :

Soit x_j *: le nombre de jets effectués par la machine affectée au liquide* L_j *, pour* $j = 1, 2, 3, 4$.

2)*La fonction objective* :

$$MaxZ = 0.75x_1 + 1.6x_2 + 2.4x_3 + 1.5x_4$$

3)*Les contraintes* :
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 320 \\ 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 \geq 20 \\ x_j \geq 0 \text{ pour } j = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

4)*Le PL*

$$MaxZ = 0.75x_1 + 1.6x_2 + 2.4x_3 + 1.5x_4$$

Tel que :
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 320 \\ 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 \geq 20 \\ x_j \geq 0 \text{ pour } j = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

Aprés transformation à l'aide des variables d'écart (x_6), d'excédent (x_5) et artificielles (x_7 et x_8), le PL devient :

$$MaxZ = 0.75x_1 + 1.6x_2 + 2.4x_3 + 1.5x_4 - Mx_7 - Mx_8$$

Tel que :
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_6 = 320 \\ 3x_3 - x_4 + x_7 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_5 + x_8 = 20 \\ x_j \geq 0 \text{ pour } j = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

Nous pouvons maintenant résoudre ce programme linéaire à l'aide de l'algorithme du simplexe.

Pour cela nous utilisons système de tableaux .

B) Résolution à l'aide des tableaux du simplexe

Une fois le pivot déterminé le passage d'un tableau à l'autre se fait en appliquant la procédure de Gauss-Jordan (vue dans le cours N°4)

	C_j	0.75	1.6	2.4	1.5	0	0	-M	-M	
C_i^*	x_i^*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	b_i
0	x_6	1	2	3	1	0	1	0	0	320
-M	x_7	0	0	3	-1	0	0	1	0	0
-M	x_8	1	-2	0	0	-1	0	0	1	20
Z_j		-M	2M	-3M	M	M	0	-M	-M	Z=-20M
Z_j-C_j		-M-0.75	2M-1.6	-3M-2.4	M-1.5	M	0	0	0	

1) La 1[ière] Solution de base est :

x_6=320 (variable de base)
x_7=0 (variable de base)
x_8=20 (variable de base)
X_j=0 Pour j=1,5 (variables hors base)
Z=-20M

2) Puisqu'il existe des coefficients Z_j-C_j négatifs, le maximum n'est pas atteint.
3) Puisque Z_3-C_3 est le plus grand négatif, la variable hors base x_3 deviendra variable de base
4) Puisque min[320/3,0/3]=0 , la variable de base x_7 quitte la base (deviendra variable hors base) et remplacée par la variable x_3

	C_j	0.75	1.6	2.4	1.5	0	0	-M	-M	
C_i^*	x_i^*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	b_i
0	x_6	1	2	0	2	0	1	-1	0	320
2.4	X_3	0	0	1	-1/3	0	0	1/3	0	0
-M	x_8	1	-2	0	0	-1	0	0	1	20
Z_j		-M	2M	2.4	-0.8	M	0	0.8	-M	Z=-20
Z_j-C_j		-M-0.75	2M-1.6	0	-2.3	M	0	M+0.8	0	

1) Cette 2[ième] solution de base est :

x_6=320 (variable de base)
x_3=0 (variable de base)
x_8=20 (variable de base)
x_1=x_2=x_4=x_5=x_7=0 (variables hors base)
Z=-20M

2) Puisqu'il existe des coefficients Zj-Cj négatifs, le maximum n'est pas atteint.
3) Puisque Z_1-C_1 est le plus grand négatif, la variable hors base x_1 deviendra variable de base
4) Puisque min[320/1,20/1]=20 , la variable de base x_8 quitte la base (deviendra variable hors base) et, est remplacée par la nouvelle variable de base x_1

	Cj	0.75	1.6	2.4	1.5	0	0	-M	-M	
Ci*	xi*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	bi
0	x_6	0	4	0	2	1	1	-1	-1	300
2.4	X_3	0	0	1	-1/3	0	0	1/3	0	0
0.75	X_1	1	-2	0	0	-1	0	0	1	20
Zj		0.75	-1.5	2.4	-0.8	-0.75	0	0.8	0.75	2=15
Zj-Cj		0	-3.1	0	-2.3	-0.75	0	M+0.8	M+0.75	

1) Cette 3[ième] solution de base est :

x_6=300 (variable de base)
x_3=0 (variable de base)
x_1=20 (variable de base)
x_8=x_2=x_4=x_5=x_7=0 (variables hors base)
Z=-15

2) Puisqu'il existe des coefficients Z_j-C_j négatifs, le maximum n'est pas atteint.
3) Puisque Z_2-C_2 est le plus grand négatif, la variable hors base x_2 deviendra variable de base
4) Puisque min[300/4]=75 , la variable de base x_6 quitte la base (deviendra variable hors base) et, est remplacée par la nouvelle variable de base x_2

	Cj	0.75	1.6	2.4	1.5	0	0	-M	-M	
C_i^*	x_i^*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	b_i
1.6	x_2	0	1	0	0.5	0.25	0.25	-0.25	-0.25	75
2.4	x_3	0	0	1	-1/3	0	0	1/3	0	0
0.75	x_1	1	0	0	1	-0.5	0.5	-0.5	0.5	170
Z_j		0.75	1.6	2.4	0.75	0.025	0.775	0.025	-0.025	Z=247.5
Z_j-C_j		0	0	0	-0.75	0.025	0.775	M+0.025	M-0.025	

1) Cette 4ième solution de base est :

x_2=75 (variable de base)
x_3=0 (variable de base)
x_1=170 (variable de base)
x_8=x_6=x_4=x_5=x_7=0 (variables hors base)
Z=-247.5

2) Puisqu'il existe des coefficients Z_j-C_j négatifs, le maximum n'est pas atteint.
3) Puisque Z_4-C_4 est l'unique coefficient négatif, la variable hors base x_4 deviendra variable de base
4) Puisque min[75/0.5,170/1]=75/0.5=150 , la variable de base x_2 quitte la base (deviendra variable hors base) et, est remplacée par la nouvelle variable de base x_4

	Cj	0.75	1.6	2.4	1.5	0	0	-M	-M	
Ci*	x_i^*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	b_i
1.6	x_4	0	2	0	1	0.5	0.5	-0.5	-0.5	150
2.4	x_3	0	2/3	1	0	1/6	1/6	1/6	-1/6	50
0.75	x_1	1	-2	0	0	-1	0	0	1	20
Z_j		0.75	3.1	2.4	1.5	0.4	1.15	-0.35	-0.4	Z=360
Z_j-C_j		0	1.5	0	0	0.4	1.15	M-0.35	M-0.4	

Tous les coefficients Z_j-C_j sont non négatifs, donc le maximum est atteint !

La solution de base maximale est :

Variables de base		Variables hors base	
	x_4=150		x_2=0
	x_3=50		x_5=0
	x_1=20		x_6=0
			x_7=0
	MaxZ=360		x_8=0

Donc le profit maximum est de 360 DA si, pour remplir le camion on utilise :

- 20 jets de la machine affectée à L_1
- 50 jets de la machine affectée à L_3
- 150 jets de la machine affectée à L_4