Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Introduction à la Topologie

Licence Mathématiques-LMD-Semestre 3

Série 4: Continuité dans les espaces métriques

Exercice 1:

1) Trouver $d(3,]3,5[)$, $d(\sqrt{2}, \mathbb{Q})$.
2) Soient $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\right\}$ et $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\right\}$, calculer $d(A,B)$.
3) Calculer $diam([1,2[\cap\mathbb{Q})$ et $diam([-2,1[\cap\mathbb{R}-\mathbb{Q})$.

Exercice 2:

1) Montrer que $]a,b[$ et $]c,d[$ tels que $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ sont homéomorphes.
2) Montrer que $\mathbb{R}$ et $]-1,1[$ sont homéomorphes.
3) $\mathbb{R}$ est-il homéomorphe à tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$?

Exercice 3: Soit $(\mathbb{X}, d)$ un espace métrique et $f : (\mathbb{X}, d) \longrightarrow (\mathbb{R}, |.|)$. Montrer que f est continue si et seulement si pour tout $a \in \mathbb{R}$ les ensembles $f^{-1}(]a,+\infty[)$ et $f^{-1}(]-\infty,a[)$ sont des ouverts dans $\mathbb{X}$.

Exercice 4: Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(x) = 0$, pour tout $x \in \mathbb{Q}$. Montrer que $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 5: Soient $f : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ et $g : \mathbb{Y} \longrightarrow \mathbb{Z}$ continues. Montrer que si $g \circ f$ est un homéomorphisme et si f est surjective alors f et g sont des homéomorphismes.

Exercice 6: Soient $(\mathbb{X}, d)$ un espace métrique et A, B deux parties non vides et fermées de $\mathbb{X}$ telles que $A \cap B = \emptyset$. Soient $f, g : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définies par $f(x) = \dfrac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)}$, $g(x) = d(x,A)$.
1) Montrer que pour toute application $h : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, l'ensemble $K = \{x \in \mathbb{X} : h(x) = 0\}$ est fermé.
2) Montrer que g est continue.
3) En déduire que la fonction f est continue.
4) Trouver $f^{-1}(\{0\})$ et $f^{-1}(\{1\})$.