Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Introduction à la Topologie

Licence Mathématiques-LMD-Semestre 3

Série 3: Espaces métriques

Exercice 1:

1) Montrer que les applications suivantes définissent des distances sur $\mathbb{R}^n$.

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|, \quad d_\infty(x,y) = \sup_{i=1,\dots,n} (|x_i - y_i|),$$

et dessiner les boules unitaires ouvertes $B((0,0),1)$ dans $\mathbb{R}^2$ pour d_1 et d_∞.
2) Montrer que les applications suivantes sont des distances sur $C[a,b]$.

$$d_1(f,g) = \int_a^b |f(t) - g(t)|dt, d_\infty(f,g) = \sup_{t\in[a,b]} (|f(t) - g(t)|)$$

Exercice 2:

Soit $(\mathbb{X}, d)$ un espace métrique et f une fonction réelle croissante définie sur $\mathbb{R}_+$ et satisfaisant à :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x+y) \leqslant f(x) + f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}_+. \end{cases}$$

1) Montrer que l'application $d_1 = f \circ d$ est une distance sur $\mathbb{X}$.
2) En déduire que les applications suivantes sont des distances sur $\mathbb{X}$.

$$d_2 = \frac{d}{1+d}, \quad d_3 = inf(1,d), \quad d_4 = ln(1+d).$$

Exercice 3:

Soit $\mathbb{X}$ un ensemble quelconque. Montrer que :

1) $\delta(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \neq y \\ 0 \text{ si } x = y \end{cases}$ est une distance sur $\mathbb{X}$.

2) $B(x_0, r) = \begin{cases} \{x_0\} & \text{si } r \leqslant 1 \\ \mathbb{X} & \text{si } r > 1 \end{cases}$

Exercice 4: Soit $(\mathbb{X}, d)$ un espace métrique et A une partie de $\mathbb{X}$. Montrer que les propositions suivantes son équivalentes :

1) x est un point d'accumulation de A.

2) Tout voisinage V de x contient une infinité de points de A.

3) $x \in Adh(A - \{x\})$.

Exercice 5: Montrer qu'une intersection finie d'ouverts denses de X est un ouvert dense de X.

Exercice 6: Soit $(\mathbb{X}, d)$ un espace métrique et A une partie de $\mathbb{X}$. Montrer que $Adh(A) = \{x \in \mathbb{X} : d(x, A) = 0\}$.

Exercice 7: Soient A et B deux parties bornées d'un espace métrique $(\mathbb{X}, d)$.

1) Montrer que $diam(A) = diam(Adh(A))$.

2) Montrer que $diam(A \cup B) \leqslant diam(A) + diam(B) + d(A, B)$.

Exercice 8: Soient d_1 et d_2 deux distances définies sur un ensemble $\mathbb{X}$ telles que pour toute boule ouverte B_{d_1} de centre $x \in \mathbb{X}$ il existe une boule ouverte B_{d_2} de centre x également, telle que $B_{d_2} \subset B_{d_1}$. Montrer que la topologie $\mathcal{T}_{d_1}$ induite par d_1 est moins fine que la topologie $\mathcal{T}_{d_2}$ induite par d_2, c'est-à-dire $\mathcal{T}_{d_1} \subset \mathcal{T}_{d_2}$.

Exercice 9: Soient d_1 et d_∞ les deux distances définies sur $C[a, b]$ (voir Exercice 1(2)). Montrer que la topologie $\mathcal{T}_{d_1}$ induite par d_1 est moins fine que la topologie $\mathcal{T}_{d_\infty}$ induite par d_∞, c'est-à-dire $\mathcal{T}_{d_1} \subset \mathcal{T}_{d_\infty}$.