

UFA Sétif 1, Département de Mathématiques, Faculté des Sciences.
Master I: Option : Optimisation et contrôle. Module : Analyse
Matricielle. Enseignant : M. ACHACHE. 2018/2019.

Série d'exercices N°1

Exercice 1 Soit $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ une application linéaire. Montrer que :

- 1- f est injective $\Leftrightarrow \text{Ker } f = \{0\}$.
- 2- f est surjective $\Leftrightarrow \text{Im } f = \mathbb{K}^n$.
- 3- f bijective $\Leftrightarrow f$ injective $\Leftrightarrow f$ surjective.
- 4- Montrer que l'application inverse f^{-1} de f est une application linéaire.

Exercice 2 Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

- 1- Montrer que $(AB)^* = B^*A^*$.
- 2- $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.

Exercice 3 Soit $T = (t_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $U = (u_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ deux matrices triangulaires inférieures (respectivement supérieures)

Montrer que la matrice $A = TU$ est également triangulaire inférieure (respectivement supérieure).

Exercice 4 Soit $T = (t_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice régulière et triangulaire inférieure.

- 1- Soit $b = (b_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$ vérifiant :

$$\exists k, 2 \leq k \leq n, \text{ tel que } b_i = 0 \text{ pour } i < k.$$

On considère le système linéaire $(S) : Tx = b$.

Trouver un algorithme pour calculer la solution $x = (x_i)_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{R}^n$ du système (S) en fonction de b et de T .

- 2- En déduire que T^{-1} est triangulaire inférieure. Quels sont ses éléments diagonaux?

Exercice 5 On considère, $\mathbb{R}^{n \times n}$ l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre n et les ensembles suivantes de $\mathbb{R}^{n \times n}$:

$$S^n = \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} : X = X^T\}$$

et

$$AS^n = \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} : X = -X^T\},$$

des matrices symétriques et antisymétriques, respectivement. Montrer que :

1- $\dim \mathbb{R}^{n \times n} = n^2$.

2- \mathbb{S}^n et \mathbb{AS}^n sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{n \times n}$.

3- $\mathbb{R}^{n \times n} = \mathbb{S}^n \oplus \mathbb{AS}^n$.

4- $\dim \mathbb{S}^n = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\dim \mathbb{AS}^n = \frac{n(n-1)}{2}$.

Exercice 6 Soit $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Montrer que :

1- $\forall x \in \mathbb{C}^n, \forall y \in \mathbb{C}^m : \langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle$.

2- $\text{Im } A^* = (\text{Ker } A)^\perp$ et $\text{Ker } A^* = (\text{Im } A)^\perp$.

3- $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*)$.

Exercice 7 Soit σ une permutation de $\{1, 2, 3, 4\}$ dans lui même définie par :

i	1	2	3	4
$\sigma(i)$	2	3	4	1

1- Déterminer la matrice de permutation P_σ associée à σ .

2- Déterminer σ^{-1} la permutation inverse de σ .

3- Montrer que $P_{\sigma^{-1}} = P_\sigma^{-1} = P_\sigma^T$.

4- Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1- Montrer que A et B sont des matrices de permutations et déduire les permutations associées.

2- Déduire les matrices inverses de A et B ainsi leurs permutations inverses σ^{-1} .

3- Étant donnée une matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, montrer que :

$$(P_\sigma A P_\sigma^T)_{ij} = a_{\sigma(i)\sigma(j)}$$

où P_σ est une matrice de permutation associée à σ .

Exercice 8 Considérons les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Etudier l'irréductibilité de ces matrices.

Exercice 9 Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 10 & 10 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1- Montrer que la matrice A est réductible.

2- Déterminer toutes les matrices de permutations P_σ telles que A se réduit à la forme (matrice bloc) :

$$P_\sigma^T A P_\sigma = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Exercice 10 Soit A une matrice hermitienne définie positive ($A \in \mathbb{C}^{n \times n}$). Montrer que :

1- A est régulière. (Donner un contre exemple pour montrer que si A est régulière elle n'est pas forcément définie positive).

2- Les sous matrices principales A_k ($k = 1, \dots, n-1$) de A sont hermitiennes et définies positives et de plus $a_{ii} > 0$ pour tout i (a_{ii} sont les éléments diagonaux de A).

3- Considérons les matrices A^2 et A^3 . Montrer qu'elles sont hermitiennes et définies positives.

3- Si B est aussi une matrice hermitienne définie positive. Que peut-on dire pour les matrices suivantes : $A + B$, $A - B$?

Exercice 11 Soit $u \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ et $y^*x = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$ désigne le produit scalaire hermitien dans \mathbb{C}^n .

1- Soit $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ la matrice définie par $P = uu^*$. Montrer que :

a. P est une matrice hermitienne semi-définie positive.

b. $\text{rg}(P) = 1$ et déduire que P n'est pas régulière.

c. Si u est choisi tel que $u^*u = 1$ (unitaire), alors P est une matrice de projection.

2- Considérons maintenant la matrice $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ donnée par : $H = I - \alpha P$ où $P = uu^T$.

d. Pour quelle valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$, la matrice H est-elle orthogonale?

e. Déduire que H est régulière et puis sans calcul déduire son inverse.

f. Calculer $\text{Sp}(H)$ et $\det H$.

Exercice 12 Soit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ et $Sp(A)$ désigne son spectre. Montrer que :

1. $Sp(A - \mu I) = \{(\lambda - \mu) : \lambda \in Sp(A) \text{ et } \mu \in \mathbb{C}\}$.
2. $Sp(A^k) = \{\lambda^k : \lambda \in Sp(A)\}$, $A^k = \underbrace{A \times A \dots \times A}_{k \text{ fois}}$.
3. $Sp(A^{-1}) = \{\frac{1}{\lambda} : \lambda \in Sp(A)\}$ si A est régulière.
4. Si A est semblable à B alors $Sp(A) = Sp(B)$.
5. $Sp(AB) = Sp(BA)$, $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

Exercice 13 Montrer que :

1. Toute matrice hermitienne (symétrique réelle), est diagonalisable et ses valeurs propres sont réelles et les vecteurs propres associés à des différentes valeurs propres sont orthogonaux.
2. Toute matrice hermitienne (symétrique réelle) est définie positive si et seulement ces valeurs propres sont strictement positives et si et seulement si ces déterminants principaux sont strictement positives.
- 3.

$$Sp(A^*) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in Sp(A)\}.$$

4. Si A est unitaire, alors $Sp(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ et $|\det A| = 1$.

Exercice 14 Soit $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Montrer que :

1. Si A est à diagonale strictement dominante, alors elle est inversible.
2. Supposons maintenant que A est une matrice symétrique réelle et à diagonale strictement dominante. Alors A est définie positive si et seulement si ces éléments diagonaux $a_{ii} > 0, \forall i = 1, \dots, n$. (L'inverse est fausse, donner un contre exemple).
3. Soit la matrice réelle

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

- a. Montrer que A est à diagonale strictement dominante.
- b. Déterminer les 3 disques \mathcal{D}_k ($k = 1, 2, 3$) de Guershgorin pour localiser les valeurs propres de la matrice A .

Exercice 15 Soient $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, B \in \mathbb{R}^{p \times q}$, le produit de Kronecker (tensoriel) des deux matrices A et B est défini comme la matrice :

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{mp \times nq}.$$

1- Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

2- Calculer $A \otimes B$ et $B \otimes A$. Dédurre que $A \otimes B \neq B \otimes A$. (L'opération \otimes n'est pas commutatif).

3- Pour toute matrice $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Calculer $I \otimes A$ où I est la matrice identité d'ordre n .

4- Soit $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ et I_2 la matrice identité d'ordre 2. Calculer $A \otimes I_2$. L'extension pour toutes matrices A et I est triviale.

5- Soient $x \in \mathbb{R}^m$ et $y \in \mathbb{R}^n$. Calculer

$$x \otimes y \text{ et } x \otimes y^T.$$

Exercice 16 1- Soient $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{r \times s}$, $C \in \mathbb{R}^{n \times p}$, et $D \in \mathbb{R}^{s \times t}$. Montrer que :

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD \in \mathbb{R}^{qm \times pt}.$$

2- Pour toutes matrices A et B , montrer que :

$$(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T.$$

3-

a) Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ sont symétriques. Montrer que $A \otimes B$ est symétrique.

b) Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ sont inversibles. Montrer que $A \otimes B$ est inversible.

c) Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ sont normales. Montrer que $A \otimes B$ est normale.

Exercice 17 Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, on définit l'opération vec qui à une matrice associe le vecteur constitué par ses colonnes empilées les unes sur les autres dans l'ordre

$$\text{vec}(A) = (a_{11}, \dots, a_{m1}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{mn}) \in \mathbb{R}^{mn}.$$

Calculer $\text{vec}(A)$ pour la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 14 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 10 & -101 \end{pmatrix}.$$

Exercice 18 *Considérons l'équation matricielle suivante :*

$$AXB = C$$

avec A , B et C sont des matrices d'ordre n . Alors en utilisant l'opérateur vec à l'équation $AXB = C$, on, obtient un système linéaire suivant :

$$(A \otimes B^T)\text{vec}(X) = \text{vec}(C).$$

Ici la matrice de coefficients $A \otimes B^T$ est d'ordre n^2 .

Application :

Soit les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1- *Montrer que la matrice $A \otimes B^T$ est inversible. Dédurre que $\text{vec}(X)$ est une solution unique du système $(A \otimes B^T)\text{vec}(X) = \text{vec}(C)$.*

2- *Calculer cette solution par la méthode de Gauss et puis déduire la matrice X la solution du système matriciel $AXB = C$.*

Exercice 19 *Soit $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, une matrice de projection. Montrer que :*

1- *La matrice $(I - P)$ est une matrice de projection et que*

$$\mathbb{R}^n = \text{Im}P \oplus \text{Im}(I - P).$$

2- *Soit la matrice suivante :*

$$P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Montrer que P est une matrice de projection non orthogonale diagonalisable et à diagonale fortement dominante et réductible.

Exercice 20 *Soit la matrice $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ donnée par :*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

- 1- Etudier l'irréductibilité de la matrice A suivant le paramètre réel α .
- 2- Donner les disques de Gershgorin-Hadamard de A pour $\alpha = 2$.
- 3- Pour quelles valeurs de α , A est à diagonale fortement dominante et irréductible. Dédurre dans ce cas que la matrice A est inversible.

Exercice 21 Soit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, une matrice inversible. Notons par $A^* = (\bar{A})^T$ la matrice adjointe de A . Montrer que :

- 1- $\text{Ker}(A^*) = (\text{Im}(A))^\perp$.
- 2- $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(A^*A)$.
- 3- A^*A est définie positive.

Exercice 22 Soit A une matrice hermitienne ($A = A^*$). Montrer que :

- 1- A est diagonalisable et son $\text{Sp}(A) \subseteq \mathbb{R}$.
- 2- Dédurre que la matrice $(A - iI)$ est inversible.
- 3- On pose

$$U = (A + iI)(A - iI)^{-1}$$

montrer que :

$$\mu = \frac{\lambda + i}{\lambda - i}$$

avec $\lambda \in \text{Sp}(A)$, est une valeur propre de U .

- 4- Montrer que U est une matrice unitaire.