Les coniques

I) Approche géométrique :

Une conique est une courbe plane intersection d'un cône de révolution et d'un plan.

On obtient alors deux types de coniques :

- les coniques propres : parabole, ellipse, hyperbole.
- les coniques impropres ou dégénérées : dans certains cas on a un point, une droite, deux droites ou bien l'ensemble vide.

Définition géométrique : Soit F un point du plan, e un réel strictement positif et Δ une droite ne contenant pas F.
On appelle conique de foyer F, d'excentricité e et de directrice Δ l'ensemble des points M tels que :

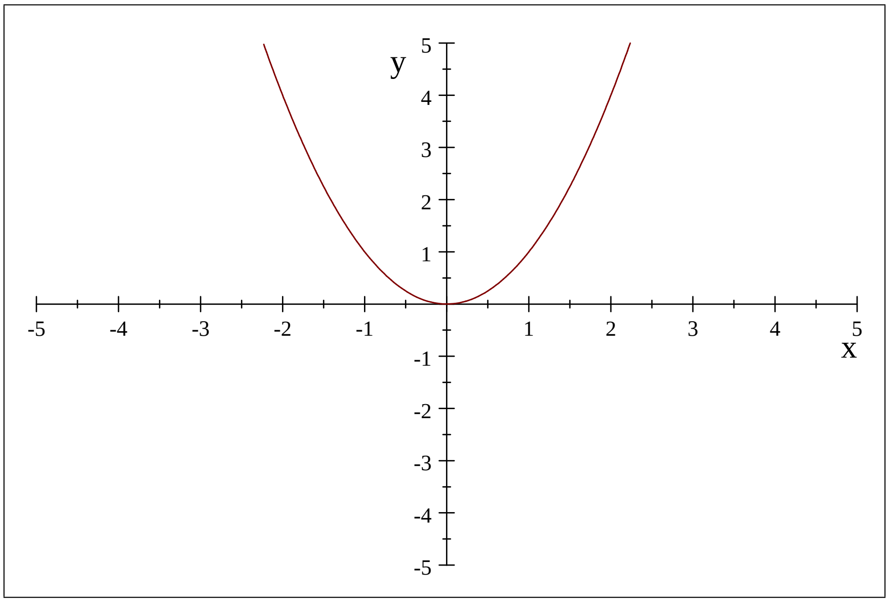
$$\frac{MF}{d(M,\Delta)} = e$$

Soit H la projection orthogonale du point M sur la directrice Δ.
On a alors :

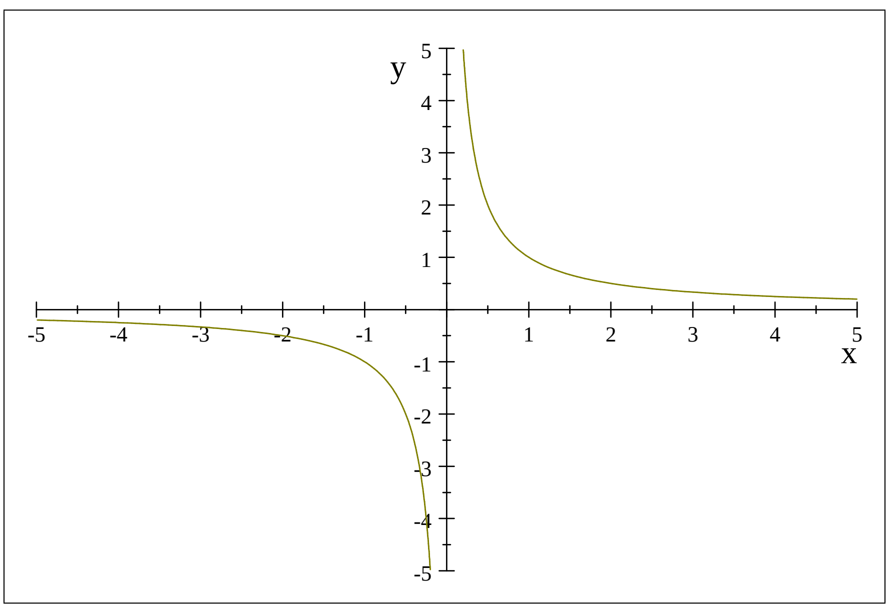
$$\frac{MF}{MH} = e$$

L'axe focal est la droite orthogonale à la directrice Δ , passant par le foyer F.
c'est un **axe de symétrie** pour la conique.

Si $e = 1$, on a une **parabole**,



$0 < e < 1 \Longrightarrow$ on a une **ellipse**
et si $e > 1 \Longrightarrow$ on a une **hyperbole**.



Equation réduite :

Parabole

Soit F un point du plan et Δ une droite ne contenant pas F.
On considère la parabole de foyer F, d'excentricité $e = 1$
et de directrice Δ.
La parabole est l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\boxed{MF = d(M, D)}$$

ou encore : $\boxed{MF = MH}$

où H est le projeté orthogonal de M sur Δ
et K le projeté orthogonal de F sur Δ .
Considérons un repère orthonormé $(O,\ i,\ j)$ où O est le milieu de FK.
l'axe des abscisses (" l'axe des x") est porté par le segment FK
Posons :

$$p = KF$$

p est appelé "le **paramètre"** de la parabole
Alors, dans ce repère, de l'égalité définissant la parabole

$$MF = d(M, D) = MH$$

,

On va déduire une équation réduite de la parabole :
On procède alors comme suit :

$$\boxed{\Longrightarrow \|MF\|^2 = \|MH\|^2}$$

Dans le repère $(O,\ i,\ j)$, on a :

$$\boxed{M(x, y), \quad F(\frac{p}{2}, 0), \quad H(-\frac{p}{2}, y)}$$

$$\Longrightarrow\ \overrightarrow{MF} = \left(\frac{p}{2} - x,\ y\right),\ \overrightarrow{MH} = \left(-\frac{p}{2} - x, 0\right)$$

$$\Longrightarrow \|MF\|^2 = \left(\frac{p}{2} - x\right)^2 + y^2 = \|MH\|^2 = \left(\frac{p}{2} - x\right)^2$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{y^2 = 2px}$$

Dans ce cas , on a comme **équation de la directrice** Δ :

$$\boxed{x = -\frac{p}{2}}$$

et les **coordonnées** de F (foyer) et K (pied de la directrice) :

$$\boxed{F(\frac{p}{2}, 0), \qquad K(-\frac{p}{2}, 0)}$$

Ellipse : $0 < e < 1$

Soit F un point du plan, e un réel $\in]0,1[$, et Δ une droite ne contenant pas F.

On considère l'ellipse Γ de foyer F, d'excentricité e $(e < 1)$ et de directrice Δ.

C'est l'ensemble des points M du plan P tels que :

$$MF = e\ d(M, D)$$

ou encore :

$$MF = e\ MH$$

où H est le projeté orthogonal de M sur Δ
L'ellipse admet deux sommets S et $S\prime$ situés sur l'axe focal
Considérons un repère orthonormal $(O,\ i,\ j)$ où O est le milieu de $SS\prime$.
avec comme axe des abscisses : l'axe focal .
Notations :

$$\boxed{a = OS, \quad c = OF \ \text{ et } \ b = \sqrt{a^2 - c^2}}$$

Montrons que :

$$\boxed{e = \frac{c}{a}}$$

en effet comme $S \in \Gamma \Longrightarrow$

$$\frac{SF}{SK} = e$$

$\Longrightarrow SO - OF = e\ \ (KO - OS)$
$\Longrightarrow a - c = e\,(KO - a)$
Mais, on a aussi pour $M\ ' = \Gamma \cap (y'oy)$

$$KO = M'H \ \text{ avec } \ \frac{M\ 'F}{M\ 'H} = e \Longrightarrow KO = \frac{a}{e}$$

$\Longrightarrow a - c = e\left(\frac{a}{e} - a\right) \Longrightarrow c = ea$
Alors, dans ce repère, de l'égalité définissant l'ellipse :

$$MF = e\ d(M, D) = eMH$$

On a comme coordonnées des points F, M et H.

$$\boxed{M = (x, y)\,,\ F(c, 0) \text{ et } H = \left(\frac{a}{e}, y\right)}$$

$\Longrightarrow \|MF\|^2 = e^2\,\|MH\|^2$
avec $\overrightarrow{MF} = (c - x, -y)\,,\ \ \overrightarrow{MH} = \left(\frac{a}{e} - x, 0\right)$.
On a ainsi :

$$(c - x)^2 + y^2 = e^2\left[\frac{a}{e} - x\right]^2$$

$$\Longrightarrow \quad c^2 - 2cx + x^2 + y^2 = a^2 - 2eax + e^2x^2$$

$$\Longrightarrow \quad c^2 + x^2 + y^2 = a^2 + e^2x^2.$$

$\Longrightarrow \quad \left(1-e^2\right)x^2+y^2=a^2-c^2$

$\Longrightarrow \left(1-\dfrac{c^2}{a^2}\right)x^2+y^2=a^2-c^2 \Longrightarrow \boxed{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2-c^2}=1}$

avec :

$$\boxed{b^2=a^2-c^2}$$

On a l'équation réduite ou canonique de l'ellipse :

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

Excentricité :

$$\boxed{e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}}$$

Coordonnées des foyer F et $F\prime$:

$$\boxed{F=\left(\sqrt{a^2-b^2},0\right),\ \ F'=\left(-\sqrt{a^2-b^2},0\right)}$$

Equation des deux directrices Δ et Δ' :

$$\boxed{x=\frac{a^2}{c},\quad x=-\frac{a^2}{c}}$$

Hyperbole C :
l'hyperbole a pour sommets $S\ (a,0)\,,\ S'\,(-a,0)$
l'origine des axes O est le milieu de SS'
On a deux foyers de coordonnées : $F(c,0),\ F'(-c,0)$
Montrons que l'on a, comme pour l'ellipse $\Longrightarrow$

$$e=\frac{c}{a}$$

$S\in\ C\Longrightarrow$
$$SF=eSK\Longrightarrow OF-OS=e\,(SO-0K)$$
$$c-a=e\,(a-OK)$$
$$\Longrightarrow OK=\frac{ea-c+a}{e}=a-\frac{c}{e}+\frac{a}{e}$$
$S'\in C\Longrightarrow$
$$S'F=eS'K\Longrightarrow a+c=e(a+OK)$$
$$\Longrightarrow OK=\frac{a+c-ea}{e}=\frac{c}{e}-a+\frac{a}{e}$$
Finalement, on en déduit que :

$$a-\frac{c}{e}=\frac{c}{e}-a\Longrightarrow e=\frac{c}{a}$$

avec :

$$OK=\frac{a}{e}=\frac{a^2}{c}$$

Soit $M\in C\Longrightarrow MF=eMH$
$\Longrightarrow\|MF\|^2=e^2\,\|MH\|^2$
les points $M,\ F,\ H$ ont pour coordonnées :

$$\boxed{M=(x,y)\,,\qquad F=(c,0)\,,\quad H=\left(\frac{a^2}{c},y\right)}$$

Ce qui donne : $(x-c)^2+y^2=e^2\left(x-\dfrac{a^2}{c}\right)^2$
$\Longrightarrow x^2-2cx+c^2+y^2=e^2x^2-2\dfrac{e^2a^2}{c}x+\dfrac{e^2a^4}{c^2}$
Avec $e=\dfrac{c}{a}$, on obtient :
$\Longrightarrow x^2-2cx+c^2+y^2=\dfrac{c^2}{a^2}x^2-2cx+a^2$
$\Longrightarrow \dfrac{c^2-a^2}{a^2}x^2-y^2=c^2-a^2$
On pose alors :

$$\boxed{b^2=c^2-a^2\Longrightarrow c=\sqrt{a^2+b^2}}$$

d'où l'équation réduite de l'hyperbole
$\Longrightarrow$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$$

Excentricité : $\boxed{e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}}$

Coordonnées des foyer F et $F\prime$:

$$\boxed{F = \left(\sqrt{a^2+b^2}, 0\right), \ \ F' = \left(-\sqrt{a^2+b^2}, 0\right)}$$

Equation des deux directrices Δ et Δ' :

$$\boxed{x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad x = -\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

II) Approche algébrique :

Une conique Γ est une courbe algébrique plane de degré 2 définie par :

$$f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey - f = 0$$

sachant que les coefficients : a, b, c ne sont pas tous nuls.

Partie quadratique :

$$q\,(X) = q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

Partie linéaire :

$$\varphi\,(X) = \varphi\,(x,y) = dx + ey = (d,e)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B\ .^tX$$

Matrice associée à la conique :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \quad B = (d,e)$$

$\Longrightarrow f(X) = X\ A\ {}^tX + B\ {}^tX = f$

Soit : $X_0 = (x_0, y_0)$, on calcule $f(X + X_0)$

$\Longrightarrow\ f(X+X_0) = (X\ + X_0)\ A\ {}^t(X+X_0) + B\ {}^t(X+X_0)$

$= XA\ {}^tX + X_0A\ {}^tX_0 + XA\ {}^tX_0 + X_0\ A\ {}^tX + B\ {}^tX + B\ {}^tX_0)$

$= q(X) + q(X_0) + B\ {}^tX_0 + XA\ {}^tX_0 + X_0\ A\ {}^tX + B\ {}^tX$

on constate que l'on a les égalités suivantes

i) $B\ {}^tX = (d,e)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = dx + ey, \quad X\ {}^tB = (x,y)\begin{pmatrix} e \\ d \end{pmatrix} = ex + dy$

$\Longrightarrow B\ {}^tX = X\ {}^tB$

ii) $X_0A\ {}^tX = XA\ {}^tX_0$

$\Longrightarrow\quad f(X+X_0)\ = q(X) + q(X_0) + B\ {}^tX_0 + 2X\,(A\ {}^tX_0\ +\ {}^tB)$

Le point (x_0, y_0) est un centre de symétrie $\Longleftrightarrow$

$$2A\ {}^tX_0\ +\ {}^tB\quad = 0$$

Ce qui donne matriciellement :

$$2\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ax_0 + 2bx_0 + e \\ 2bx_0 + 2cy_0 + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ie :

$$\boxed{\overrightarrow{\nabla f(x_0,y_0)} \quad = \quad \overrightarrow{\text{grad}\, f(x_0,y_0)} \ = \ \overrightarrow{0}}$$

Pour que le système de Kramer

$$\boxed{2\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} e \\ d \end{pmatrix}}$$

ait une solution, on doit avoir

$$\boxed{\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow ac - b^2 \neq 0}$$

Ce qui implique deux types de coniques
- les coniques avec un centre de symétrie
- les coniques qui n'ont pas de centre de symétrie

Coniques à centre :

Pour quelle condition, on a une **conique à centre** ou non,
on commence alors par calculer le gradient de la fonction :

$$\nabla f(x,y) = (2ax + 2by + d, 2bx + 2cy + e)$$

Pour $\nabla f(x,y) = 0$, on obtient :

$$2ax + 2by + d = 0,\ 2bx + 2cy + e = 0$$

Le système d'équation à deux inconnues n'a pas de solution si :

$$ac - b^2 = 0$$

Dans ce cas, on a une parabole qui n'est pas alors une conique à centre.
Si

$$ac - b^2 \neq 0$$

la conique (ellipse, hyperbole) a pour centre :

$$\left(\frac{cd - be}{2\left(b^2 - ac\right)},\ \frac{ae - bd}{2\left(b^2 - ac\right)} \right)$$

$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey - f = 0$
On fait le changement de variables suivant

$$\boxed{x = X + \frac{cd - be}{2\left(b^2 - ac\right)},\ y = Y + \frac{ae - bd}{2\left(b^2 - ac\right)}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{aX^2 + 2bXY + cY^2 - \frac{\left(ae^2 + cd^2 - 2bde\right)}{4\left(b^2 - ac\right)} + f = 0}$$

Matrice associée à la conique:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

et $\lambda_1,\ \lambda_2$ les valeurs propres de la matrice M.
Comme la matrice est symétrique, les valeurs sont réelles et non toutes les deux nulles.

i) Supposons que $\lambda_1\ \lambda_2 \neq 0$.
Dans un nouveau repère convenable, l'équation de la conique

devient comme suit

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \alpha = 0$$

on peut supposer que λ_1 est positif :

Cas où $\lambda_2 > 0$

Si $\alpha > 0$,

$$\Gamma = \{\emptyset\}$$

Si $\alpha = 0$

$$\Gamma = \{0\}$$

Si $\alpha < 0$, Γ est une ellipse d'équation canonique

$$\frac{\lambda_1}{-\alpha} X^2 + \frac{\lambda_2}{-\alpha} Y^2 = 1$$

Cas où $\lambda_2 < 0$

Si $\alpha \neq 0$, on a un hyperbole d'équation

$$\frac{\lambda_1}{-\alpha} X^2 + \frac{\lambda_2}{-\alpha} Y^2 = 1$$

Si $\alpha = 0$ on a une conique impropre représentée par
deux droites concourantes passant par l'origine du nouveau repère.

ii) L'une des valeurs propres est nulle, soit λ_2.

L'équation de Γ devient

$$\lambda_1 X^2 + \alpha = 0$$

ou bien :

$$\lambda_1 X^2 + \beta Y = 0, \ \beta \neq 0$$

L'équation : $Y = -\dfrac{\lambda_1}{\beta} X^2$ représente une parabole.

L'équation : $X^2 = -\dfrac{\alpha}{\lambda_1}$.représente ou bien deux droites parallèles, ou une seule droite ou l'ensemble vide $\emptyset$.

III)Approche non standard des coniques

Une conique Σ est une courbe algébrique plane de degré 2
définie par :

$$f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

On utilise une approche non standard pour l'étude des coniques
en utilisant la décomposition d'un point à l'infini.
Soit $M \in \mathcal{V}(\infty)$, le point M se décompose comme suit

$$M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \omega\varepsilon \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix}$$

avec ω un ig et ε un ip.
Ce qui donne : $x = \omega(\alpha - \varepsilon\beta)$, $y = \omega(\beta + \varepsilon\alpha)$
Si $M \in \Sigma \Longrightarrow$

$$a\omega^2(\alpha - \varepsilon\beta)^2 + 2b\omega^2(\alpha - \varepsilon\beta)(\beta + \varepsilon\alpha) + c\omega^2(\beta + \varepsilon\alpha)^2$$
$$+ d\omega(\alpha - \varepsilon\beta) + e\omega(\beta + \varepsilon\alpha) + f = 0$$

En divisant par ω^2 et par passage à l'ombre , on obtient :

$$Q(\alpha,\beta) = a\alpha^2 + 2b\alpha\beta + c\beta^2 = 0$$

Le ou les vecteurs solutions donnent la ou les directions asymtotiques
associées à Σ**.**
Soit $\Delta = b^2 - ac$ le discriminant associé à la forme
quadratique $Q(\alpha,\beta)$.
Ce qui donne les résultats suivants :
si $\Delta > 0$ on a deux directions asymptotiques : Σ est **une Hyperbole**
si $\Delta = 0$ on a une seule directions asymptotique : Σ est **une parabole**
si $\Delta < 0$ pas de direction asymptotique, on a une courbe fermée :
Σ est **une ellipse**.

Etude d'une hyperbole

Discriminant : $b^2 - ac > 0$
on suppose que : $ac \neq 0$
Racines : $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$
d'où la factorisation suivante de $Q(x,y)$

$$\begin{aligned} Q(x,y) &= ax^2 + 2bxy + cy^2 \\ &= a\left(x + \left(\frac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{a}\right)y\right)\left(x + \left(\frac{b - \sqrt{b^2 - ac}}{a}\right)y\right) \end{aligned}$$

ce qui donne les pentes des asymptotes de l'hyperbole

$$\alpha_1 = -\frac{a}{b + \sqrt{b^2 - ac}}, \alpha_2 = -\frac{a}{b - \sqrt{b^2 - ac}}$$

avec comme produit $\alpha_1\alpha_2 = \dfrac{a}{c}$
Remarque : Si l'on a

$$a = \alpha_1\alpha_2 = \frac{a}{c} = -1$$

les asymptotes sont orthogonales, on a alors une hyperbole équilatère avec une excentricité égale à $\sqrt{2}$.

Calcul des équations des asymptotes
Pour cela on utilise le théorème suivant
Soit une courbe algébrique Γ ayant pour direction asymptotique

$$\overrightarrow{V}_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

et M un point illimité de Γ avec comme décomposition

$$M = \omega \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \omega\varepsilon \begin{pmatrix} \beta \\ -\alpha \end{pmatrix}$$

Pour que la courbe Γ ait une asymptote oblique Δ dans la direction $\overrightarrow{V}_1$ il faut et suffit que $\omega\varepsilon$ soit un réel limité, Δ admettant alors comme équation

$$\alpha y - \beta x +^0 (\omega\varepsilon) = 0$$

Soit $\boxed{\overrightarrow{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\dfrac{a}{b+\sqrt{b^2-ac}} \end{pmatrix}}$ une des deux directions asymptotiques associées à l'hyperbole.
On a alors comme décomposition

$$M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} 1 \\ -\dfrac{a}{b+\sqrt{b^2-ac}} \end{pmatrix} + \omega\varepsilon \begin{pmatrix} \dfrac{a}{b+\sqrt{b^2-ac}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour simplifier les calculs, on pose : $\rho = \dfrac{a}{b+\sqrt{b^2-ac}}$
Ce qui donne : $x = \omega(1 + a\rho)$ et $y = \omega(-\rho + \varepsilon)$
Si $M \in \Gamma \Longrightarrow$

$$\begin{aligned} a\omega^2 (\rho\varepsilon + 1)^2 + c\omega^2 (\varepsilon - \rho)^2 + 2b\omega^2 (\varepsilon - \rho)(\rho\varepsilon + 1) \\ +d\omega (1 + \rho\varepsilon) + e\omega (\varepsilon - \rho) + f = 0 \end{aligned}$$

En divisant par ω, on a :

$$\left[a (\rho\varepsilon + 1)^2 + c (\varepsilon - \rho)^2 + 2b (\varepsilon - \rho)(\rho\varepsilon + 1)\right] \omega + d (1 + \rho\varepsilon) + e (\varepsilon - \rho) + \frac{f}{\omega} = 0$$

$\left[2b\varepsilon + c\varepsilon^2 + a\varepsilon^2\rho^2 + 2a\varepsilon\rho - 2c\varepsilon\rho - 2b\varepsilon\rho^2 + 2b\varepsilon^2\rho\right]\omega + d\left(1+\rho\varepsilon\right) + e\left(\varepsilon - \rho\right) + \frac{f}{\omega} = 0$

Par passage à l'ombre, on obtient :

$$2\left(b + a\rho - c\rho - b\rho^2\right)^0 (\omega\varepsilon) + d - e\rho = 0$$

$b + \dfrac{a^2 - ac}{b + \sqrt{b^2 - ac}} - b\left(\dfrac{a}{b + \sqrt{b^2 - ac}}\right)^2 =$

Etude matricielle

$$M = \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{pmatrix}$$

Déterminant :

$$\lambda^2 - (c+a)\lambda + ac - b^2 = 0$$

Discriminant :

$$(c+a)^2 - 4\left(ac - b^2\right) = a^2 - 2ac + 4b^2 + c^2 = (a-c)^2 + 4b^2$$

Valeur propres :

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(a + c + \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}\right)$$
$$\lambda_2 = \frac{1}{2}\left(a + c - \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}\right)$$

Vecteurs propres :

$\left\{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2b}\left(c - a + \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}\right) \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow \frac{1}{2}\left(a + c - \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}\right)$,

$\left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{2b}\left(a - c + \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}\right) \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow \frac{1}{2}\left(a + c + \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}\right)$

Etude de la parabole $b^2 - ac = 0$

Si l'on suppose que $a \neq 0$, l'équation de la parabole peut alors s'écrire comme suit :

$$f(x,y) = a\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 + dx + ey + f = 0,$$

La parabole a une seule direction asymptotique suivant le vecteur unitaire

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$$

On utilise alors le changement de variables suivant :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{pmatrix} b & a \\ -a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

ie :

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} (bX + aY) \\ y &= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} (-aX + bY) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \frac{Y^2}{a}\left(a^2+b^2\right) + \frac{ad+be}{\sqrt{a^2+b^2}} Y = \frac{ae-bd}{\sqrt{a^2+b^2}} X - f$$

$$\left(Y^2 + \frac{a\,(ad+be)}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} Y\right) = \frac{a\,(ae-bd)}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} X - \frac{a\ f}{a^2+b^2}$$

Ce qui donne :

$$\left(Y + \frac{a\,(ad+be)}{2\,(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}\right)^2 = \frac{a\,(ae-bd)}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} X - \frac{af}{a^2+b^2} + \frac{a^2\,(ad+be)^2}{(a^2+b^2)^3}$$

1) Si $ae - bd \neq 0 \Longrightarrow$

$$\left(Y + \frac{ad+be}{2\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = \frac{a\,(ae-bd)}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} \left(X - f\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ae-bd} + \frac{(ad+be)^2}{a\,(ae-bd)\sqrt{a^2+b^2}}\right) \Longrightarrow$$

$$\left(Y + \frac{ad+be}{2\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = \frac{a\,(ae-bd)}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} \left(X - f\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ae-bd} + \frac{a\,(ad+be)^2}{(ae-bd)\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

On a alors l'expression de la parabole sous sa forme canonique
ie :

$$Y'^{\,2} = 2pX\,'$$

avec comme paramètre:

$$p = \frac{a\,(ae-bd)}{2\,(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Le sommet de la parabole a pour coordonnées :

$$S = \left(f\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ea-db} - \frac{a\,(ad+eb)^2}{(ea-db)\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{ad+eb}{2\sqrt{a^2+b^2}},\right)$$

Pour simplifier les écritures,on pose :

$$\frac{ad+eb}{2\sqrt{a^2+b^2}} = q$$

d'où une écriture plus simple des coordonnées du sommet

$$S = \left(\frac{f}{2p} - \frac{q^2}{2p}, -q \right)$$

2) Si $ea - db = 0 \Longrightarrow$

$$Y^2 + \frac{ad + eb}{\sqrt{a^2 + b^2}} Y + f = 0$$

On a une conique dégénérée

Autre méthode :

En utilisant la décomposition d'un point à l'infini suivant la direction asymptotique de la parabole, on a alors :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\varepsilon_1 \sqrt{a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 \sqrt{a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Ce qui donne : $x = \dfrac{(b + \varepsilon_2 a)}{\varepsilon_1 \sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad y = \dfrac{(-a + \varepsilon_2 b)}{\varepsilon_1 \sqrt{a^2 + b^2}}$

En reportant ces valeurs de x et y dans l'équation de la parabole, on a :

$$f(x,y) = a \left(x + \frac{b}{a} y \right)^2 + dx + ey + f = 0$$

$$f(x,y) = a \left(\frac{(b + \varepsilon_2 a)}{\varepsilon_1 \sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{a} \frac{(-a + \varepsilon_2 b)}{\varepsilon_1 \sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + d \frac{(b + \varepsilon_2 a)}{\varepsilon_1 \sqrt{a^2 + b^2}} + e \frac{(-a + \varepsilon_2 b)}{\varepsilon_1 \sqrt{a^2 + b^2}} + f$$

$$f(x,y) = \frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1^2} \left(\frac{a^2 + b^2}{a} \right) + \frac{db - ea + \varepsilon_2 (ad + eb)}{\varepsilon_1 \sqrt{a^2 + b^2}} + f = 0$$

$$\frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1^2} \left(\frac{a^2 + b^2}{a} \right) - \frac{2p}{\varepsilon_1} + \frac{2\varepsilon_2 q}{\varepsilon_1} + f = 0$$

$$\varepsilon_2^2 \left(\frac{a^2 + b^2}{a} \right) - 2p\varepsilon_1 + 2q\varepsilon_1\varepsilon_2 + f\varepsilon_1^2 = 0$$

Par permanence, le point de coordonnées $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ se trouve sur la conique d'équation :

$$fx^2 + 2qxy + (a + c)\, y^2 - 2px = 0$$

La conique obtenue passe par l'origine, on utilise la décomposition de Goze

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha\beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\beta \\ \alpha \end{pmatrix}$$

D'où :

$$f\alpha^2\beta^2 + 2q\alpha^2\beta + (a + c)\, \alpha^2 - 2p\alpha\beta = 0$$

on simplifie par $\alpha \Longrightarrow$

$$f\alpha\beta^2 + 2q\alpha\beta + (a + c)\, \alpha - 2p\beta = 0$$

on a alors :

$$\alpha = \frac{2p\beta}{f\beta^2 + 2q\beta + a + c}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} \dfrac{2p\beta^2}{f\beta^2 + 2q\beta + a + c} \\ \dfrac{2p\beta}{f\beta^2 + 2q\beta + a + c} \end{pmatrix}$$

Par permanence, ou en utilisant le principe de Cauchy, on a une paramétrisation de la nouvelle conique

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} \dfrac{2pt^2}{ft^2 + 2qt + a + c} \\ \dfrac{2pt}{ft^2 + 2qt + a + c} \end{pmatrix}$$

d'où une paramétrisation de la parabole :

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{(b + a\ y(t))}{\sqrt{a^2 + b^2} x(t)} \\ \dfrac{(-a + b\ y(t))}{\sqrt{a^2 + b^2}\ x(t)} \end{pmatrix}$$

Matrice associée à une parabole

$\begin{pmatrix} a & b \\ b & \dfrac{b^2}{a} \end{pmatrix}$, vecteurs propres :

$$\left\{ \begin{pmatrix} -\dfrac{b}{a} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 0, \left\{ \begin{pmatrix} \frac{a}{b} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow \frac{1}{a}\left(a^2 + b^2\right)$$

Application :
Soit la parabole d'équation

$$x^2 + 2xy + y^2 + 3x - 2y + 1 = 0$$

avec comme coefficients

$$a = 1,\ b = 1,\ c = 1,\ d = 3,\ e = -2,\ f = 1$$

$$p = \frac{a\left(ae - bd\right)}{2\left(a^2 + b^2\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{5\sqrt{2}}{8}$$

$x^2 + 2xy + y^2 + 3x - 2y + 1 = 0$
$\left(x + y\right)^2 + 3x - 2y + 1 = 0$
Changement de variables
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$
ie :

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}\left(bX + aY\right) \\ y &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}\left(-aX + bY\right) \end{aligned}$$

ie :

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(X + Y\right) \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-X + Y\right) \end{aligned}$$

Ce qui donne :
$2Y^2 + \dfrac{3}{\sqrt{2}}\left(X + Y\right) - \dfrac{2}{\sqrt{2}}\left(-X + Y\right) + 1$
$= 2Y^2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}Y + \frac{5}{2}\sqrt{2}X + 1 = 0$
$Y^2 + \frac{\sqrt{2}}{4}Y = -\frac{5\sqrt{2}}{4}X - \frac{1}{2}$

$$\left(Y + \frac{\sqrt{2}}{8}\right)^2 = -\frac{5\sqrt{2}}{4}\left(X + \frac{3\sqrt{2}}{16}\right)$$

Mardi 10 Janvier 2017

Examen ANS et Géométrie

1) Soit la conique d'équation

$$(x + y + 1)(x - y + 4) - 3 = 0$$

a) Sans faire "trop" de calcul, donner la nature de la conique les équations des asymptotes et les coordonnées du centre de symétrie.
b) Ecrire l'équation de la conique sous sa forme réduite.
c) Donner les équations de l'axe focal et des directrices ainsi que les coordonnées des foyers.

2) Soit la conique d'équation

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 - 8x + 8y + 6 = 0$$

i) Sans "faire trop" de calculs, écrire l'équation de la conique sous sa forme canonique.
ii) Donner les éléments caractéristiques.
iii) Faire un schéma de la conique.

Correction

---

1) a) En posant : $x+y+1=X$
$$x-y+4=Y$$
On a :
$$XY=3$$
La conique est donc une hyperbole avec comme asymptotes
$$x+y+1=0,\quad x-y+4=0$$
Comme les asymptotes sont orthogonales, on a une hyperbole équilatère donc **l'exentricité** est égale à $\sqrt{2}$.
L' intersection des deux asymptotes donne le centre de symétrie de la conique
$$I=\left(-\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$$

b) On a :
$$\boxed{(x+y+1)(x-y+4)-3=x^2+5x-y^2+3y+1=0}$$
$$\Longrightarrow \boxed{\frac{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2}-\frac{\left(y-\frac{3}{2}\right)^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2}=1}$$

c) L'axe focal a pour équation :
$$y=\frac{3}{2}$$
Avec : $a=b=\sqrt{3}\Longrightarrow c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{6}$
Coordonnées des foyer F et $F\prime$:
$$F=(c,0)=\left(\sqrt{6}+\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right),\quad F'=(-c,0)=\left(-\sqrt{6}-\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$$

Equation de deux directrices Δ et Δ' :
$$x=\frac{3}{\sqrt{6}}-\frac{5}{2},\quad x=-\frac{3}{\sqrt{6}}-\frac{5}{2}$$

-

2) i) Comme $a=c=3$, le nouveau repère est obtenu par rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$, ce qui donne directement :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

on a donc :
$\frac{3}{2}(X-Y)^2 - (X-Y)(X+Y) + \frac{3}{2}(X+Y)^2 - \frac{8}{\sqrt{2}}(X-Y) + \frac{8}{\sqrt{2}}(X+Y) + 6 = 0$
$X^2 + 2Y^2 + 4\sqrt{2}Y + 3 = X^2 + 2\left(Y^2 + 2\sqrt{2}Y\right) + 3 \Longrightarrow$

$$X^2 + 2\left(Y + \sqrt{2}\right)^2 = 1$$

On a ainsi une ellipse (conique à centre) avec comme **axe focal**

$$Y = -\sqrt{2} \Longrightarrow y = x - 2$$

ii) On a ainsi :

$$a = 1,\ b = \frac{\sqrt{2}}{2},\ c = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Exercices

I) **Soit la conique ($\mathbf{\Sigma}$) d'équation**

$$\boxed{x^2 - xy + y^2 + x = 0}$$

a) Déterminer la nature de ($\mathbf{\Sigma}$) .
b) Ecrire sous une forme canonique l'équation de ($\mathbf{\Sigma}$) .
c) Donner la valeur de **l'excentricité** et l'équation de
la **directrice** avec les coordonnées des foyers F et F'.

d) Donner une idée permettant de calculer
l'équation de **l'axe focal**.

II) **Soit la conique ($\mathbf{\Sigma}$) d'équation**

$$\boxed{x^2 + 2xy + y^2 + 3x - 2y + 1 = 0}$$

a) Est ce qu l'on a une conique à centre. En déduire sa nature.
b) Ecrire sous une forme canonique l'équation de ($\mathbf{\Sigma}$) .
c) Calculer les coordonnées du sommet de ($\mathbf{\Sigma}$) .
d) Donner une paramétrisation rationelle de ($\mathbf{\Sigma}$)
e) Donner l'équation de l'axe focal.

III) **Soit la conique (S) d'équation**

$$\boxed{x^2 + xy + y^2 + 2x + y + 1 = 0}$$

i) Déterminer **I** le centre de la conique.
ii) Soit la droite (Δ) passant par **I** et de pente a.

Que représente l'intersection (**S**) $\cap (\Delta)$
iii) En **déduire** la nature de la conique..

IV) Soit la conique Δ d'équation

$$\boxed{16x^2 - 24xy + 9y^2 + 25x - 50y = 0}$$

a) Ecrire l'équation de Δ sous **sa forme canonique**.
b) En déduire les coordonnées du sommet S.
c) Donner l' équation de **l'axe focal** .

d) Calculer les coordonnées de F et K .
e) Faire un schéma.

V) Soit la conique $\mathcal{C}$ d'équation

$$\boxed{2x^2 + 3xy + y^2 - 2x - y + 1 = 0}$$

1) Donner la nature de $\mathcal{C}$.
2) Donner les coordonnées du centre de symétrie.
3) Calculer les équations de deux asymptotes obliques.
4) Donner les équations de l'axe focal et des directrices.

VI) **Soit la conique ($\boldsymbol{\Gamma}$) d'équation**

$$\boxed{2x^2 - 3xy - 2y^2 - 2x - y + 1 = 0}$$

1) Donner la nature de Γ.
2) Donner les coordonnées du centre de symétrie.
3) Calculer les équations de deux asymptotes obliques.
4) Donner les équations de l'axe focal et des directrices.

VII) **Soit la conique ($\boldsymbol{\Gamma}$) d'équation**

$$\boxed{xy + x + y - 1 = 0}$$

i) Déterminer la nature de Γ.
ii) Déterminer les asymptotes de Γ.
ii) Déterminer l'équation de l'axe focal.
iii) Donner 3 paramétrisations différentes de la conique.
iv) Déterminer les équations des directrices.

VIII) Soit (C) la conique d'équation

$$\boxed{\mathbf{x^2 + 2\boldsymbol{\alpha} xy + y^2 + 4x - \boldsymbol{\alpha}^2 = 0}}$$

1) Donner la nature de (C) suivant les valeurs de α.

2) Dans le cas où (C) est une parabole, déterminer le **paramètre p**, les coordonées du **foyer** F et l'équation de la **directrice** (Γ).

Corrections

I) *Graphe de la conique*

a) $(\mathbf{\Sigma})$ est une **ellipse**, en effet le discriminant $\Delta = -3$ est négatif.

b) Matrice associée

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Valeurs propres : $\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}$

Vecteurs propres normalisés : $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Matrice de passage : $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right]$

D'où : $\quad x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(X - Y\right), \qquad y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(X + Y\right)$

On obtient alors :

$$\frac{1}{2}\left(X-Y\right)^2 - \frac{1}{2}\left(X-Y\right)\left(X+Y\right) + \frac{1}{2}\left(X+Y\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(X-Y\right)$$

$$= \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}X + \frac{3}{2}Y^2 - \frac{1}{2}\sqrt{2}Y = 0$$

$$= \frac{1}{2}\left(X^2 + \sqrt{2}X\right) + \frac{3}{2}\left(Y^2 - \frac{\sqrt{2}}{3}\right) = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}\left(X + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(Y - \frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\left(X + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2} + \frac{\left(Y - \frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2} = 1$$

On a donc : $a = \sqrt{\dfrac{2}{3}},\ b = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$

$\Longrightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\dfrac{2}{3} - \dfrac{2}{9}} = \dfrac{2}{3}$

$\Longrightarrow e = \dfrac{c}{a} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$

On a aussi les coordonnées du centre de symétrie de l'ellipse

dans le nouveau repère :

$$O = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{6}\right)$$

.

ce qui donne les coordonnées dans l'ancien repère :

$$I = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

c) L'axe focal est l'axe des X du nouveau repère qui est une

parallèle à la première bissectrice de l'ancien repère et en plus

l'axe focal passe nécessairement par le centre de symétrie

de l'ellipse, ce qui donne comme équation

$$y = x + \frac{1}{3}$$

II) *Graphe de la conique*

a) On a une fonction à deux variables :

$$f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 + 3x - 2y + 1 = 0$$

$\Longrightarrow$ grad $f(x,y) = (2x + 2y + 3,\ 2x + 2y - 2)$

Le système d'équations :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x + 2y + 3 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2x + 2y - 2 = 0 \end{aligned}$$

n'a pas de solution $\Longrightarrow$ La conique n'a pas de centre symétrie

on a donc une parabole.

b) Matrice associée à la partie quadratique de (Σ) : $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Valeurs propres : $2, 0$

Vecteurs propres : $\left\{\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right\} \leftrightarrow 0, \left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\} \leftrightarrow 2.$

Matrice de passage : $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}$

D'où : $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(X-Y), \quad y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(X+Y).$

On a alors :

$\dfrac{1}{2}(X-Y)^2 + (X-Y)(X+Y) + \dfrac{1}{2}(X+Y)^2 + \dfrac{3}{\sqrt{2}}(X-Y) - \dfrac{2}{\sqrt{2}}(X+Y) +$
1

$= 2X^2 + \dfrac{1}{2}\sqrt{2}X - \dfrac{5}{2}\sqrt{2}Y + 1 = 0$

$\Longrightarrow \; X^2 + \dfrac{\sqrt{2}}{4}X = \dfrac{5\sqrt{2}}{4}Y - \dfrac{1}{2}$

$\Longrightarrow \left(X + \dfrac{\sqrt{2}}{8}\right)^2 = \dfrac{5\sqrt{2}}{4}Y - \dfrac{15}{32}$

$$\left(X + \frac{\sqrt{2}}{8}\right)^2 = \frac{5\sqrt{2}}{4}\left(Y - \frac{3\sqrt{2}}{16}\right)$$

c) Coordonnées du Sommet :

Dans le nouveau système, on a : $\boxed{S = \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{8}, \dfrac{3\sqrt{2}}{16}\right)}$

ce qui donne avec les anciennes coordonnées :

$x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{8} - \dfrac{3\sqrt{2}}{16}\right) = -\dfrac{5}{16}$

$y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{8} + \dfrac{3\sqrt{2}}{16}\right) = \dfrac{1}{16}$

$\Longrightarrow S = \left(-\dfrac{5}{16}, \dfrac{1}{16}\right)$

d) Paramétrisation de la parabole Γ

$\boxed{x^2 + 2xy + y^2 + 3x - 2y + 1 = 0}$

La parabole passe par le point : $\boxed{M_0 = (0,1)}$

On utilise alors la décomposition de **Goze** d'un point $M \in hal(M_0)$

$$M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \varepsilon_1 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \varepsilon_1\varepsilon_2 \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$$

Ce qui donne : $x = \varepsilon_1 (a + \varepsilon_2 b)\,,\ y = 1 + \varepsilon_1 (b - \varepsilon_2 a)\,.$
Pour $M \in \Gamma$

$\varepsilon_1^2 (a + \varepsilon_2 b)^2 + 2\varepsilon_1 (a + \varepsilon_2 b)(1 + \varepsilon_1 (b - \varepsilon_2 a)) + (1 + \varepsilon_1 (b - \varepsilon_2 a))^2$
$+ 3\varepsilon_1 (a + \varepsilon_2 b) - 2(1 + \varepsilon_1 (b - \varepsilon_2 a)) + 1 = 0$
Aprés calcul et par passage à l'ombre, on a :

$$a = 0$$

Soit : $\boxed{M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \varepsilon_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \varepsilon_1\varepsilon_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1\varepsilon_2 \\ 1 + \varepsilon_1 \end{pmatrix}}$

Pour $M \in \Gamma \Longrightarrow$
$(\varepsilon_1\varepsilon_2)^2 + 2(\varepsilon_1\varepsilon_2)(1 + \varepsilon_1) + (1 + \varepsilon_1)^2 + 3\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2(1 + \varepsilon_1) + 1 = 0$
$(\varepsilon_1\varepsilon_2)^2 + 2\varepsilon_1\varepsilon_2 (1 + \varepsilon_1) + \varepsilon_1^2 + 3\varepsilon_1\varepsilon_2 = 0$
$\varepsilon_1\varepsilon_2^2 + 2\varepsilon_2\varepsilon_1 + \varepsilon_1 + 5\varepsilon_2 = 0 \Longrightarrow$

$$\varepsilon_1 = -\frac{5\varepsilon_2}{\varepsilon_2^2 + 2\varepsilon_2 + 1}$$

d'où les coordonnées du point M

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{5\varepsilon_2^2}{\varepsilon_2^2 + 2\varepsilon_2 + 1} \\ \dfrac{\varepsilon_2^2 - 3\varepsilon_2 + 1}{\varepsilon_2^2 + 2\varepsilon_2 + 1} \end{pmatrix}$$

et en utilisant le principe de permanence, on obtient une paramétrisation rationelle de la parabole

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{5t^2}{t^2 + 2t + 1} \\ \dfrac{t^2 - 3t + 1}{t^2 + 2t + 1} \end{pmatrix}$$

e) La direction asymptotique est déterminée en annulant la partie quadratique de l'équation de la parabole
$\Longrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2 = 0 \Longrightarrow$

$$y = -x$$

On a ainsi une direction asymptotique suivant le vecteur $(1, -1)\,.$
L'axe focal Δ de la parabole est parallèle au vecteur $(1, -1)$

et il passe par le sommet $S\ \left(-\frac{5}{16}, \frac{1}{16}\right)$ de la parabole
d'où l'équation de Δ :

$$y = -x - \frac{1}{4}$$

Autre méthode :
L'axe focal Δ est parallèle au vecteur $(1, -1)$
et il est porté par la normale au sommet de la parabole
ie : le gradient et le vecteur $(1, -1)$ sont liés, d'où

$$\begin{vmatrix} 2x + 2y + 3 & , & 1 \\ 2x + 2y - 2 & , & -1 \end{vmatrix}$$

$\Longrightarrow 2x + 2y + 3 + 2x + 2y - 2 = 0$

$$x + y + \frac{1}{4} = 0$$

III) i) On a une fonction à deux variables :

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + y + 1 = 0$$

$\Longrightarrow$ grad $f(x, y) = (2x + y + 2,\ x + 2y + 1)$

Le système d'équations :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x + y + 2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= x + 2y + 1 = 0 \end{aligned}$$

a pour solution le centre de symétrie de la conique :

$$\boxed{\mathbf{I} = (-1, 0)}$$

ii) La droite Δ a pour équation :

$$y = a\,(x + 1)$$

Pour l'intersection de la droite et de la conique , on obtient l'équation

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

donc : $\mathbf{S}\ \cap \boldsymbol{\Delta} = (-1, 0)$.

iii) En conclusion, on a : $S = (-1, 0) = I$.

la conique se réduit à un seul point.

Autre méthode : **matrice associée**

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}\right)$$

Valeurs propres : $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$

Vecteurs propres normalisés : $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Matrice de passage : $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

D'où : $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - Y)$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y)$

On obtient alors par changement de variables :

$\frac{1}{2}(X - Y)^2 + \frac{1}{2}(X - Y)(X + Y) + \frac{1}{2}(X + Y)^2 + \frac{2}{\sqrt{2}}(X - Y) + \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y) + 1 = 0$

$\Longrightarrow \frac{3}{2}X^2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}X + \frac{1}{2}Y^2 - \frac{1}{2}\sqrt{2}Y + 1 = 0$

$\Longrightarrow$

$$\frac{3}{2}\left(X + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(Y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0$$

On a donc une conique impropre ou dégénérée en un seul point.

de coordonnées dans le nouveau repère $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
ou encore:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - Y) = -1, \; y = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y) = 0$$

Autre méthode : on peut écrire l'équation de la conique comme suit

$$\begin{aligned} & x^2+xy+y^2+2x+y+1 \\ = \quad & \frac{3}{4}(x+y+1)^2+\frac{1}{4}(y-x-1)^2=0 \end{aligned}$$

La conique est impropre, elle se réduit en un seul point, intersection de deux droites d'équations : $\boxed{x+y+1=0 \quad , \quad y-x-1}$

Ce qui donne le point de coordonnées : $(-1,0)$

IV) Matrice associée à la partie quadratique

$$\begin{bmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{bmatrix}$$

Polynôme caractéristique :

$$x^2-25x=0$$

Valeurs propres : 0 et 25

Vecteurs propres : $\overrightarrow{V_1}=\begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{V_2}=\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

On normalise les vecteurs propres :

$\left\|\overrightarrow{V_1}\right\|=\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2+1}=\sqrt{\frac{25}{16}}=\frac{5}{4}$

$\left\|\overrightarrow{V_2}\right\|=\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2+1}=\sqrt{\frac{25}{9}}=\frac{5}{3}$

D'où l'on obtient la matrice de passage :

$$\left(\frac{\overrightarrow{V_1}}{\left\|\overrightarrow{V_1}\right\|}, \frac{\overrightarrow{V_2}}{\left\|\overrightarrow{V_2}\right\|}\right)=\begin{pmatrix} \frac{3}{5}, & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5}, & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

On a ainsi les formules de passage :

$$\begin{aligned} x &= \frac{3}{5}X-\frac{4}{5}Y \\ y &= \frac{4}{5}X+\frac{3}{5}Y \end{aligned}$$

On effectue le changement de variables

$16\left(\frac{3}{5}X-\frac{4}{5}Y\right)^2-24\left(\frac{3}{5}X-\frac{4}{5}Y\right)\left(\frac{4}{5}X+\frac{3}{5}Y\right)+9\left(\frac{4}{5}X+\frac{3}{5}Y\right)^2=25Y^2$

$25\left(\frac{3}{5}X-\frac{4}{5}Y\right)-50\left(\frac{4}{5}X+\frac{3}{5}Y\right)=-25X-50Y$

on obtient donc :

$$(Y-1)^2 = X+1 \Longrightarrow Y\ '\ ^2 = X\ '$$

On a alors comme paramètre :

$$p = \frac{1}{2}$$

avec les coordonnées du sommet dans le nouveau repère

$$S = (-1, 1)$$

et dans l'ancien repère :

$$S = (-\frac{7}{5}, -\frac{1}{5})$$

2) L'équation de l'axe focal Γ

$$Y = 1 \Longleftrightarrow 3y - 4x - 5 = 0 \Longleftrightarrow y = \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$$

Le foyer F et le pied de la directrice K sur Γ, ont pour coordonnées $\left(x_0,\ \frac{4}{3}x_0 + \frac{5}{3}\right)$ avec $\Longrightarrow$

$$\|FS\| = \|KS\| = \frac{1}{2}$$

$\Longrightarrow \overrightarrow{FS} = \left(x_0 + \frac{7}{5}, \frac{4}{3}x_0 + \frac{5}{3} + \frac{1}{5}\right)$
$\Longrightarrow \left\|\overrightarrow{FS}\right\|^2 = \frac{25}{9}x_0^2 + \frac{70}{9}x_0 + \frac{49}{9} = \frac{1}{4}$
on a donc deux solutions :

$$x_0 = -\frac{11}{10} \text{ et } \ x_0 = -\frac{17}{10}$$

ce qui donne comme coordonnées de F et K :

$$F = \left(-\frac{11}{10}, \frac{2}{10}\right), \quad K = \left(-\frac{17}{10},\ -\frac{3}{5}\right)$$

La directrice est orthogonale à l'axe focal $\Longrightarrow$
on a donc comme équation

$$y = -\frac{3}{4}x + b$$

et elle passe par le point $K \Longrightarrow$

$$y = -\frac{3}{4}x - \frac{13}{8}$$

V)

1) Nature de la conique :

$$2x^2+3xy+y^2-2x-y+1=0$$

On a comme coefficients de la partie quadratique

$$a=2,\ b=\frac{3}{2},c=1$$

d'où :

$$\Delta\ ' \ =b^2-ac=\frac{9}{4}-2=\frac{1}{4}$$

La conique est une hyperbole.

2) Centre de symétrie

On a comme gradient :

$\overrightarrow{\nabla f(x,y)}=\overrightarrow{\text{grad}\, f(x,y)}=(4x+3y-2,\ 3x+2y-1)=(0,0)$

Ce qui donne comme coordonnées du centre de symétrie :

$$O'=(-1,2)$$

3) Pour avoir les directions asymptotiques, il suffit d'annuler la partie quadratique de l'équation de la conique

ie :

$$2x^2+3xy+y^2=0$$

Par factorisation :

$$(2x+y)\,(x+y)=0$$

on obtient les deux directions :

$$y=-x,\quad y=-2x$$

Sachant que les asymptotes passent par le centre de symétrie

$$O'=(-1,2)$$

on obtient les deux équations cherchées :

$$\Delta_1:\ y=-2x \qquad , \qquad \Delta_2\ :\ y=-x+1$$

4) Equation de l'axe focal

On a les équations des deux asymptotes obliques

l'axe focal est la bissectrice interne de l'angle formé par les deux asymptotes

Tout point de l'axe focal est à égale distance des asymptotes d'où :

$$\frac{|2x+y|}{\sqrt{5}} = \frac{|x+y-1|}{\sqrt{2}}$$

$\Longrightarrow$ On a deux possibilités, l'axe focal a une pente négative
on obtient alors l'équation suivante

$$\left(2\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)x + \left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)y - \sqrt{5} = 0$$

Forme réduite de la conique :
matrice associée à la partie quadratique:

$$\begin{pmatrix} 2 & , & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & , & 1 \end{pmatrix}$$

Valeur propres : $\dfrac{3}{2} - \dfrac{\sqrt{10}}{2}, \dfrac{\sqrt{10}}{2} + \dfrac{3}{2},$

Vecteurs propres : $\begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} - \dfrac{\sqrt{10}}{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{10}}{3} + \dfrac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

VI)

$$\boxed{2x^2 - 3xy - 2y^2 - 2x - y + 1 = 0}$$

1) **Nature de la conique :**

On a : $a = 2,\ b = -\dfrac{3}{2},\ c = -2 \Longrightarrow \Delta' = b^2 - ac = \dfrac{25}{4} > 0$
On a donc une hyperbole.

2) **Coordonnées du centre de symétrie :**
$\overrightarrow{\nabla f(x,y)} = \overrightarrow{\text{grad}\, f(x,y)} = (4x - 3y - 2,\ -3x - 4y - 1) = (0,0)$
Ce qui donne comme coordonnées du centre de symétrie :

$$O' = \left(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}\right)$$

3) Equations des asymptotes obliques :

On commence par factoriser la partie quadratique

$$2x^2 - 3xy - 2y^2 = (2x + y)(x - 2y)$$

Ce qui donne comme directions asymptotiques :

$$\boxed{y = -2x, \quad y = \frac{x}{2}}$$

sachant que les deux asymptotes passent par le centre de symétrie on a alors comme équations

$$\boxed{2x + y = 0, \qquad x - 2y - 1 = 0}$$

Les deux directions sont orthogonales, on a donc une **hyperbole équilatère** d'où une excentricité égale à :

$$e = \sqrt{2}$$

4) **Approche matricielle et forme canonique :**

$$\begin{pmatrix} 2 & , & -\dfrac{3}{2} \\ -\dfrac{3}{2} & , & -2 \end{pmatrix}$$

Valeurs propres : $\dfrac{5}{2}, -\dfrac{5}{2}$
Vecteurs propres : $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

D'où le changement de variables :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -3 & , & 1 \\ 1 & , & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

avec : $x = \dfrac{\sqrt{10}}{10}(-3X+Y)$ et $y = \dfrac{\sqrt{10}}{10}(X+3Y)$
Et en faisant le changement de variable, on obtient :

$$\boxed{\frac{5}{2}X^2 - \frac{5}{2}Y^2 + \frac{1}{2}\sqrt{10}X - \frac{1}{2}\sqrt{10}Y + 1 = 0}$$

On a ainsi la forme canonique de l'hyperbole :

$$\boxed{-\frac{\left(X+\frac{\sqrt{10}}{10}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2} + \frac{\left(Y+\frac{\sqrt{10}}{10}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2} = 1}$$

avec : $a = b = \sqrt{\dfrac{2}{5}}$

Equation de l'axe focal de l'hyperbole :
Dans le nouveau repère, l'axe focal est défini par

$$\boxed{X + \frac{\sqrt{10}}{10} = 0}$$

Comme : $X = \dfrac{\sqrt{10}}{10}(y-3x) \Longrightarrow \boxed{3x - y - 1 = 0}$
Coordonnées des foyers et équations des directrices
On commence par calculer **c** :

$$e = \frac{c}{b} \Longrightarrow \quad c = eb = \sqrt{2}.\sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Les foyers ont pour coordonnées dans le nouveau repère

$$F = (0, c) = \left(0, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right), \; F' = (0, -c) = \left(0, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$$

d'où :

$$\boxed{F = (\frac{2\sqrt{50}}{50} + \tfrac{1}{5}, \frac{6\sqrt{50}}{50} - \frac{2}{5}), \quad F' = \left(-\frac{2\sqrt{50}}{50}, -\frac{6\sqrt{50}}{50}\right)}$$

Les directrices ont pour équations :

$$\boxed{Y = \frac{b^2}{c} = \frac{\sqrt{5}}{5} \;\text{ et }\; Y = -\frac{b^2}{c} = -\frac{\sqrt{5}}{5}}$$

Sachant que : $Y = \dfrac{\sqrt{10}}{10}(x+3y)$

On a donc :

$$\Delta_1 : x+3y-\sqrt{2}=0, \qquad \Delta_2 \ : x+3y+\sqrt{2}=0$$

Les équations obtenues sont dans le repère centré au centre de symétrie $O'=\left(\frac{1}{5},-\frac{2}{5}\right)$, avec $X'=x-\frac{1}{5}$, $Y'\ =y+\frac{2}{5}$

Ce qui donne : $\boxed{x-\frac{1}{5}+3y+\frac{6}{5}-\sqrt{2}=0 \Longrightarrow x+3y+1-\sqrt{2}=0}$

$$\boxed{x-\frac{1}{5}+3y+\frac{6}{5}+\sqrt{2}=0 \Longrightarrow x+3y+1+\sqrt{2}=0}$$

Autre méthode pour trouver l'équation de l'axe focal

L'axe focal (Δ) est l'une des deux bissectrices de l'angle formé par les deux asymptotes obliques d'équations

$$\boxed{2x+y=0, \quad x-2y-1=0}$$

Pour tout point $M(x,y)\in\Delta$, on a :

$$\boxed{\frac{|2x+y|}{5}=\frac{|x-2y-1|}{5}}$$

On a alors deux possibilités :

* Les deux valeurs ont le même signe $\Longrightarrow$

$$\boxed{2x+y=x-2y-1 \Longrightarrow x+3y+1=0 \quad (\Delta_1)}$$

* Les deux valeurs ont des signes différents $\Longrightarrow$

$$\boxed{2x+y=-x+2y+1 \Longrightarrow 3x-y-1=0 \quad (\Delta_2)}$$

Et comme seule la droite (Δ_2) intersecte l'hyperbole, c'est alors l'axe focal.

VII)

$$f(x,y) = xy + x + y - 1 = 0 \quad (\Gamma)$$

i) On a : $a = 0, b = 1, c = 0 \Longrightarrow$

$$b^2 - ac = 1$$

on a donc l'équation d'une hyperbole.
ii) On peut écrire l'équation de l'hperbole comme suit

$$y = \frac{-x+1}{x+1}$$

on a alors une hyperbole équilatère (excentricité $e = \sqrt{2}$) avec comme asymptotes les droites d'équations

$$x = -1,\ y = -1$$

iii) L'axe focal est l'axe de symétrie de l'hyperbole
comme :

$$f(x,y) = f(y,x)$$

donc son équation est la suivante

$$y = x$$

iv) Paramétrisations de l'hyperbole
Comme l'hyperbole est définie explicitement, avec comme relation

$$f(x,y) = f(y,x)$$

on a alors deux paramétrisations évidentes

$$\begin{aligned} x &= t, \quad y = \frac{-t+1}{t+1} \\ y &= t, \quad x = \frac{-t+1}{t+1} \end{aligned}$$

Et pour trouver une troisième paramétrisation, on utilise la décomposition de **Goze**
Le point $M_0 = (1,0)$ est un point de l'hyperbole
Soit $M \in hal\,(M_0)$, il se décompose alors comme suit

$$M = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \alpha\beta \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \alpha\,(a+ip) \\ \alpha\,(b+ip) \end{pmatrix}$$

Si $M \in \Gamma \Longrightarrow (1 + \alpha\,(a+ip))\,\alpha\,(b+ip) + 1 + \alpha\,(a+ip) + \alpha\,(b+ip) - 1 = 0$
$\Longrightarrow (1 + \alpha\,(a+ip))\,\alpha\,(b+ip) + \alpha\,(a+ip) + \alpha\,(b+ip) = 0$

On simplifie par $\alpha \Longrightarrow$
$(1+\alpha\,(a+ip))\,(b+ip)+(a+ip)+(b+ip)=0$
Par passage à l'ombre, on a :

$$2b+a=0$$

On peut alors prendre comme vecteur tangentiel au point M_0

$$\overrightarrow{V_1}=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ce qui donne comme décomposition

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\frac{\alpha}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}+\frac{\alpha\beta}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1+\dfrac{\alpha\,(\beta+2)}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{\alpha\,(2\beta-1)}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si $M\in\Gamma$, on obtient :
$\left(1+\dfrac{\alpha\,(\beta+2)}{\sqrt{5}}\right)\dfrac{\alpha\,(2\beta-1)}{\sqrt{5}}+\dfrac{\alpha\,(2\beta-1)}{\sqrt{5}}+1+\dfrac{\alpha\,(\beta+2)}{\sqrt{5}}-1$
$=\frac{2}{5}\alpha^2\beta^2+\frac{3}{5}\alpha^2\beta-\frac{2}{5}\alpha^2+\sqrt{5}\alpha\beta=0$
On simplifie par $\alpha \Longrightarrow \frac{2}{5}\alpha\beta^2+\frac{3}{5}\alpha\beta-\frac{2}{5}\alpha+\sqrt{5}\beta=0=0$
$\Longrightarrow$

$$\alpha=-\frac{5\sqrt{5}\beta}{2\beta^2+3\beta-2}=$$

Ce qui donne :

$$M=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+\dfrac{\alpha\,(\beta+2)}{\sqrt{5}} \\ \alpha\,(2\beta-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\dfrac{3\beta+1}{2\beta-1} \\ -\dfrac{5\beta}{\beta+2} \end{pmatrix}$$

Par permanence, on obtient une paramétrisation rationnelle de l'hyperbole :

$$\begin{aligned} x &= x(t)=-\frac{3t+1}{2t-1} \\ y &= y(t)=-\frac{5t}{t+2} \end{aligned}$$

v) **Equations des directrices :**

Comme les coefficients de x^2 et y^2 sont nuls on a ainsi comme matrice de passage

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

avec les changements de variables

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(X - Y\right),\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(X + Y\right)$$

On obtient alors la forme canonique de l'hyperbole

$$\frac{\left(X + \sqrt{2}\right)^2}{4} - \frac{Y^2}{4} = 1$$

On a ainsi : $a = b = 2 \Longrightarrow c = 2\sqrt{2}$
Les coordonnées des foyers :

$$F = (1, 1)\,,\ F' = (-3, -3)$$

Les coordonnées des pieds des directrices sur l'axe focal

$$K = (0, 0)\,,\quad K' = (-2, -2)$$

Ce qui permet d'avoir les équations des deux directrices

$$\Delta_1 :\ y = -x,\ \Delta_2 :\ y = -x - 4$$

1) Nature de la conique :

$$\boxed{f(x,y) = 2x^2 - 3xy - 2y^2 - 2x - y + 1 = 0}$$

On a comme coefficients de la partie quadratique

$$a = 2,\ b = -\frac{3}{2}, c = -2$$

d'où :

$$\Delta\ ' \ = b^2 - ac = \frac{9}{4} + 4 = \frac{25}{4} > 0$$

La conique est une hyperbole.

2) Coordonnées du centre de symétrie.
On commence par calculer le gradient de la fonction f

$$\boxed{\overrightarrow{\nabla f(x,y)} = \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x},\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) = (4x - 3y - 2,\ -3x - 4y - 1)}$$

En annulant le gradient, on a le système d'équations à deux inconnues

$$\boxed{4x - 3y - 2 = 0,\quad 3x + 4y + 1 = 0}$$

Les solutions du système d'équations représentent les coordonnées du centre de symétrie de l'hyperbole

$$\boxed{I = \left(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}\right)}$$

3) Equations de deux asymptotes obliques.
On commence par factoriser la partie quadratique

$$2x^2 - 3xy - 2y^2 = (2x + y)(x - 2y)$$

Ce qui donne deux directions asymptotiques :

$$y = -2x,\ y = \frac{x}{2}$$

Sachant que les deux asymptotes de l'hyperpole passent par le centre de symétrie, on obtient alors leur équation.

$$y = -2x, \qquad y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$$

Les deux directions sont orthogonales, on a donc une hyperbole équilatère avec une excentricité égale à :

$$e = \sqrt{2}$$

4) Equations de l'axe focal et des directrices.

Approche matricielle et forme canonique :

$$\begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}$$

Valeurs propres : $\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}$

Vecteurs propres : $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

D'où le changement de variables :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

On a ainsi la **forme canonique de l'hyperbole :**

$$\frac{\left(Y + \frac{\sqrt{10}}{10}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2} - \frac{\left(X + \frac{\sqrt{10}}{10}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2} = 1$$

Equation de l'axe focal de l'hyperbole :

Dans le nouveau repère, l'axe focal de l'hyperbole a pour équation

$$\boxed{X + \frac{\sqrt{10}}{10} = 0 \implies X = -\frac{\sqrt{10}}{10}}$$

En utilisant les formules de passage

$$\boxed{x = \frac{1}{\sqrt{10}}(-3X + Y), \qquad y = \frac{1}{\sqrt{10}}(X + 3Y)}$$

$$\boxed{X = \frac{\sqrt{10}}{10}(y - 3x)\ ,\ Y = \frac{\sqrt{10}}{10}(3y + x)}$$

On a alors l'équation de l''axe focal dans l'ancien repère :

$$\boxed{3x - y - 1 = 0}$$

Coordonnées des foyers et équations des directrices :

On commence par calculer **c**

$$e = \frac{c}{a} \implies c = ea = \sqrt{2}.\sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Les foyers ont pour coordonnées dans le nouveau repère

$$F = (c, 0) = \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, 0\right),\ F' = (-c, 0) = \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, 0\right)$$

d'où :

$$F = (-\frac{6}{\sqrt{50}}, \frac{2}{\sqrt{50}}),$$

Les directrices ont pour équations :

$$y = -\frac{x}{3} + b$$

Les pieds des directrices ont pour coordonnées

$$K = \left(-\frac{3\sqrt{2}}{5}, \frac{\sqrt{2}}{5}\right),\ K' = \left(\frac{3\sqrt{2}}{5}, \frac{\sqrt{2}}{5}\right)$$

Ce qui donne :

$$\boxed{\Delta_1 :\ y = -\frac{x}{3}, \qquad \Delta_2\ :\ y = -\frac{x}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{5}}$$

VIII)

1) Le discriminant réduit de la conique vaut :

$$\boxed{\Delta\ ' = b^2 - ac = \alpha^2 - 1}$$

Si $|\alpha| > 1$, on a une hyperbole
Si $|\alpha| < 1$, on a une ellipse
Si $|\alpha| = 1$, on a une parabole

2) i) Pour $\alpha = 1$, on a comme équation :

$$\boxed{\mathbf{x^2{+}2xy + y^2{+}4x - 1 = 0}}$$

Pour $\mathbf{a} = \mathbf{c} = \mathbf{1}$, on utilise comme matrice de passage

$$\boxed{P = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1\ , -1 \\ 1\ ,\ \ 1 \end{pmatrix}}$$

Ce qui donne :

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1\ , -1 \\ 1\ ,\ \ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}}$$

On a :

$$\boxed{x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y), \qquad y = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y)}$$

ou :

$$\boxed{X = \frac{\sqrt{2}\ (x + y)}{2}, \qquad Y = -\frac{\sqrt{2}\,(x - y)}{2}}$$

$\Longrightarrow$

$$2X^2 + 2\sqrt{2}X - 2\sqrt{2}Y - 1 = 0$$

$\Longrightarrow$

$$\boxed{\left(X + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \sqrt{2}\left(Y + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \Longrightarrow \quad X\ '^{\,2} = \sqrt{2}Y\ '}$$

On en déduit le **paramètre** : $\boxed{p = \frac{\sqrt{2}}{2}}$

les coordonnées du **foyer** : $F = \left(0,\ \frac{p}{2}\right)$

$\Longrightarrow \quad X\ '_F = 0,\ \ Y\ '_f = \frac{\sqrt{2}}{4}$

$\Longrightarrow X_F = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \quad Y_F = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

$\Longrightarrow x_F = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right) = -\dfrac{1}{4}$

$y_F = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right) = -\dfrac{3}{4}$

$$\boxed{F = \left(-\frac{1}{4}, \ -\frac{3}{4}\right)}$$

L'équation de la **directrice** :

$$\boxed{Y\,' = -\frac{p}{2}}$$

$\Longrightarrow \ Y + \dfrac{\sqrt{2}}{2} = -\dfrac{\sqrt{2}}{4} \Longrightarrow \quad \boxed{Y = -\dfrac{3\sqrt{2}}{4}}$

Sachant que : $\quad x - y = -\sqrt{2}Y \Longrightarrow \quad \boxed{x - y = \dfrac{3}{2}}$

ii) Pour $\boldsymbol{\alpha = -1}$, on a comme équation :

$$\boxed{x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 1 = 0}$$

En utilisant le même changement de variables, on a :

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \ , -1 \\ 1 \ , \quad 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}}$$

$(x-y)^2 + 4x - 1 = 0 \Longrightarrow Y^2 + \sqrt{2}X - \sqrt{2}Y - \dfrac{1}{2} = 0 \Longrightarrow$

$$\boxed{\left(Y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = -\sqrt{2}\left(X - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Longrightarrow \quad Y\,'^{\,2} = -\sqrt{2}X\,'}$$

On en déduit le **paramètre** p : $\quad \boxed{p = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

les coordonnées du **foyer** : $F = \left(\dfrac{p}{2}, 0\right) = \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{4}, 0\right)$

$\Longrightarrow \quad X\,'_F = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}, \quad Y\,'_f = 0 \Longrightarrow X_F = \dfrac{\sqrt{2}}{4}, \quad Y_F = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Longrightarrow x_F = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\dfrac{1}{4}, \ y_F = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right) = \dfrac{3}{4}$

$$\boxed{F = \left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)}$$

et l'équation de la **directrice** : $\quad \boxed{X\,' = -\dfrac{p}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}}$

$X\,' = \ X - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

$\Longrightarrow X = \frac{3\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}\ (x+y)}{2}$

Finalement, la directrice a pour équation :

$$\boxed{\mathbf{x} + \mathbf{y} = \frac{3}{2}}$$