Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Introduction à la Topologie

Licence Mathématiques-LMD-Semestre 3

Série 2: Espaces Topologiques

Exercice 1:

1) Déterminer toutes les topologies possibles sur un ensemble de deux éléments.
2) Même question pour un ensemble de trois éléments.

Exercice 2: Soient $\mathbb{X} = \{1, 2, 3, 4\}$
et $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{X}, \{3\}, \{4\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$ et $A = \{1, 3\}, B = \{2, 4\}$ deux parties de $\mathbb{X}$.
1) Vérifier que $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ est un espace topologique.
2) Trouver $Adh(A)$, $Adh(B)$, $Int(A)$, $Int(B)$, A', B'.
3) Trouver $Fr(A)$, $Fr(B)$, $Ext(A)$, $Ext(B)$.
4) Déterminer $\mathcal{V}(1)$, $\mathcal{V}(2)$, $\mathcal{V}(3)$, $\mathcal{V}(4)$.
5) Trouver $Is(A)$ et $Is(B)$.
6) Déterminer $\mathcal{T}_A$ et $\mathcal{T}_B$.
7) $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ est-il un espace topologique séparé ?

Exercice 3: Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{Cof})$ où $\mathbb{X}$ est un ensemble infini
et $\mathcal{T}_{Cof} = \{O \subset \mathbb{X} : \complement_{\mathbb{X}} O \text{ est fini } \} \cup \{\emptyset\}$ et $A \subseteq \mathbb{X}$.
1) Montrer que la famille $\mathcal{T}_{Cof}$ est une topologie sur $\mathbb{X}$.
2) Déterminer quels sont les parties fermées de $\mathbb{X}$.
3) Si A est fini trouver: $Adh(A)$, $Int(A)$ et $Fr(A)$.
4) Si A est infini trouver: $Adh(A)$, $Int(A)$ et $Fr(A)$.

Exercice 4: Soit f une application d'un ensemble non vide $\mathbb{X}$ dans un espace topologique $(\mathbb{Y}, \mathcal{T}_{\mathbb{Y}})$ et soit $\mathcal{T} = \left\{f^{-1}(G) : G \in \mathcal{T}_{\mathbb{Y}}\right\}$.
Montrer que $\mathcal{T}$ est une topologie sur $\mathbb{X}$.

Exercice 5: Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ un espace topologique et A, B deux parties de $\mathbb{X}$. Montrer que :

1) $A \subset B$ et A ouverte $\Longrightarrow A \subset Int(B)$. **2)** $A \subset B \Longrightarrow Int(A) \subset Int(B)$.
3) $Int(A) = Int(Int(A))$. **4)** Int(A $\cap$ B)=Int(A)$\cap$ Int(B).
5) Int(A)$\cup$ Int(B)$\subset$ Int(A $\cup$ B). **6)** $A \in \mathcal{V}(B) \Longleftrightarrow B \subset Int(A)$.
7) $Int(\complement_{\mathbb{X}} A) = \complement_{\mathbb{X}} Adh(A)$. **8)** $Adh(\complement_{\mathbb{X}} A) = \complement_{\mathbb{X}} Int(A)$.
9) Fr(A) est une partie fermée.
10) A est à la fois ouverte et fermée $\Longleftrightarrow Fr(A) = \emptyset$.
11) A est ouverte . $\Longleftrightarrow Fr(A) \cap A = \emptyset$.
12) A est fermée $\Longleftrightarrow Fr(A) \subset A$.

Exercice 6: Soient $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{B}'$ deux bases pour les topologies $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ respectivement. Montrer que $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ si et seulement si pour tout $B \in \mathfrak{B}$ et $x \in B$, il existe $B' \in \mathfrak{B}'$ tel que $x \in B' \subset B$.

Exercice 7: Montrer que $f : (\mathbb{X}, \mathcal{T}_{\mathbb{X}}) \longrightarrow (\mathbb{Y}, \mathcal{T}_{\mathbb{Y}})$ est continue dans chacun des cas suivants:

1) $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_{\mathbb{X}}) = (\mathbb{Y}, \mathcal{T}_{\mathbb{Y}})$ et $f(x) = x$ **2)** f est constante
3) $\mathcal{T}_{\mathbb{X}} = \mathcal{T}_{Disc}$ **4)** $\mathcal{T}_{\mathbb{Y}} = \mathcal{T}_{Gros}$.

Exercice 8: Montrer que si $f, g : (\mathbb{X}, \mathcal{T}_{\mathbb{X}}) \longrightarrow (\mathbb{Y}, \mathcal{T}_{\mathbb{Y}})$ sont continues et $(\mathbb{Y}, \mathcal{T}_{\mathbb{Y}})$ est **Hausdorff**, alors on a:

1) $A = \{x \in \mathbb{X} : f(x) = g(x)\}$ est fermé dans $\mathbb{X}$.
2) $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{X}\}$ est fermé dans $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$.

Exercice 9: Montrer que tout homéomorphisme est une application ouverte et fermée.