ANALYSE 1

COURS DE MATHÉMATIQUES
PREMIER SEMESTRE – LMD

Université Ferhat Abbas, Sétif 1

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

À la découverte de l'analyse

Les mathématiques, vous les avez bien sûr manipulées au lycée. Dans le supérieur, il s'agit d'apprendre à les construire ! La première année pose les bases et introduit les outils dont vous aurez besoin par la suite. Elle est aussi l'occasion de découvrir la beauté des mathématiques, de l'infiniment grand (les limites) à l'infiniment petit (le calcul de dérivée).
L'outil central abordé dans ce tome d'analyse, ce sont les fonctions. Vous en connaissez déjà beaucoup, racine carrée, sinus et cosinus, logarithme, exponentielle... Elles interviennent dès que l'on s'intéresse à des phénomènes qui varient en fonction de certains paramètres. Position d'une comète en fonction du temps, variation du volume d'un gaz en fonction de la température et de la pression, nombre de bactérie en fonction de la nourriture disponible : physique, chimie, biologie ou encore économie, autant de domaines dans lesquels le formalisme mathématique s'applique et permet de résoudre des problèmes.

Ce tome débute par l'étude des nombres réels et les nombres complexes, puis des suites. Les chapitres suivants sont consacrés aux fonctions : limite, continuité, dérivabilité sont des notions essentielles, qui reposent sur des définitions et des preuves minutieuses. Toutes ces notions ont une interprétation géométrique, qu'on lit sur le graphe de la fonction, et c'est pourquoi vous trouverez dans ce livre de nombreux dessins pour vous aider à comprendre l'intuition cachée derrière les énoncés.

Les efforts que vous devrez fournir sont importants : tout d'abord comprendre le cours, ensuite connaître par cœur les définitions, les théorèmes, les propositions... sans oublier de travailler les exemples et les démonstrations, qui permettent de bien assimiler les notions nouvelles et les mécanismes de raisonnement. Enfin, vous devrez passer autant de temps à pratiquer les mathématiques : il est indispensable de résoudre activement par vous-même des exercices, sans regarder les solutions ! Alors n'hésitez plus : manipulez, calculez, raisonnez, et dessinez, à vous de jouer !

Le contenue de ce livre est issu d'un large travail collectif de l'équipe d'Exo7. Les auteurs sont :

- Arnaud Bodin
- Niels Borne
- Marc Bourdon
- Guoting Chen
- Gilles Costantini
- Laura Desideri
- Abdellah Hanani
- Jean-Louis Rouget

Les chapitres dans cet ouvrages ont été compiler par Professeur El-Bachir Yallaoui a partir des fichiers sources que l'équipe d'Exo7 a gracieusement mis a la disposition du public. Ces chapitres constituent le contenue du du module a'analyse 1 dans le programme de LMD du le département de mathématiques de l'université Ferhat Abbas , Sétif, Algérie.

1. Les nombres réels
2. Nombres complexes
3. Les suites
4. Limites des fonctions continues
5. Fonctions usuelles
6. Dérivée d'une fonction

Sommaire

1 Les nombres réels **1**
- 1 L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ . . . 2
- 2 Propriétés de $\mathbb{R}$ . . . 5
- 3 Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ . . . 9
- 4 Borne supérieure . . . 11

2 Nombres complexes **15**
- 1 Les nombres complexes . . . 15
- 2 Racines carrées, équation du second degré . . . 20
- 3 Argument et trigonométrie . . . 23
- 4 Nombres complexes et géométrie . . . 27

3 Les suites **29**
- 1 Définitions . . . 29
- 2 Limites . . . 32
- 3 Exemples remarquables . . . 38
- 4 Théorème de convergence . . . 42
- 5 Suites récurrentes . . . 47

4 Limites et fonctions continues **52**
- 1 Notions de fonction . . . 53
- 2 Limites . . . 58
- 3 Continuité en un point . . . 64
- 4 Continuité sur un intervalle . . . 68
- 5 Fonctions monotones et bijections . . . 72

5 Fonctions usuelles **76**
- 1 Logarithme et exponentielle . . . 76
- 2 Fonctions circulaires inverses . . . 81
- 3 Fonctions hyperboliques et hyperboliques inverses . . . 84

6 Dérivée d'une fonction **87**
- 1 Dérivée . . . 88
- 2 Calcul des dérivées . . . 91
- 3 Extremum local, théorème de Rolle . . . 95
- 4 Théorème des accroissements finis . . . 99

Index **102**

Chapitre 1

Les nombres réels

Motivation

Voici une introduction, non seulement à ce chapitre sur les nombres réels, mais aussi aux premiers chapitres de ce cours d'analyse.
Aux temps des Babyloniens (en Mésopotamie de 3000 à 600 avant J.C.) le système de numération était en base 60, c'est-à-dire que tous les nombres étaient exprimés sous la forme $a + \frac{b}{60} + \frac{c}{60^2} + \cdots$.
On peut imaginer que pour les applications pratiques c'était largement suffisant (par exemple estimer la surface d'un champ, le diviser en deux parties égales, calculer le rendement par unité de surface,...).
En langage moderne cela correspond à compter uniquement avec des nombres rationnels $\mathbb{Q}$.

Les pythagoriciens (vers 500 avant J.C. en Grèce) montrent que $\sqrt{2}$ n'entre pas ce cadre là. C'est-à-dire que $\sqrt{2}$ ne peut s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$ avec p et q deux entiers. C'est un double saut conceptuel : d'une part concevoir que $\sqrt{2}$ est de nature différente mais surtout d'en donner une démonstration.

Le fil rouge de ce cours va être deux exemples très simples : les nombres $\sqrt{10}$ et $1,10^{1/12}$. Le premier représente par exemple la diagonale d'un rectangle de base 3 et de hauteur 1 ; le second correspond par exemple au taux d'intérêt mensuel d'un taux annuel de 10 %. Dans ce premier chapitre vous allez apprendre à montrer que $\sqrt{10}$ n'est pas un nombre rationnel mais aussi à encadrer $\sqrt{10}$ et $1,10^{1/12}$ entre deux entiers consécutifs.

Pour pouvoir calculer des décimales après la virgule, voire des centaines de décimales, nous aurons besoin d'outils beaucoup plus sophistiqués :

- une construction solide des nombres réels,
- l'étude des suites et de leur limites,
- l'étude des fonctions continues et des fonctions dérivables.

Ces trois points sont liés et permettent de répondre à notre problème, car par exemple nous verrons en étudiant la fonction $f(x) = x^2 - 10$ que la suite des rationnels (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{10}{u_n}\right)$ tend très vite vers $\sqrt{10}$. Cela nous permettra de calculer des centaines de décimales de $\sqrt{10}$ et de certifier qu'elles sont exactes :

$$\sqrt{10} = 3,1622776601683793319988935444327185337195551393252168\ldots$$

1. L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$

1.1. Écriture décimale

Par définition, l'ensemble des ***nombres rationnels*** est

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

On a noté $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
Par exemple : $\frac{2}{5}$; $\frac{-7}{10}$; $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
Les nombres décimaux, c'est-à-dire les nombres de la forme $\frac{a}{10^n}$, avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$, fournissent d'autres exemples :

$$1,234 = 1234 \times 10^{-3} = \frac{1234}{1000} \qquad 0,00345 = 345 \times 10^{-5} = \frac{345}{100\,000}.$$

Proposition 1.
Un nombre est rationnel si et seulement s'il admet une écriture décimale périodique ou finie.

Par exemple :

$$\frac{3}{5} = 0,6 \qquad \frac{1}{3} = 0,3333\ldots \qquad 1,179\,\underleftrightarrow{325}\,\underleftrightarrow{325}\,\underleftrightarrow{325}\ldots$$

Nous n'allons pas donner la démonstration mais le sens direct ($\implies$) repose sur la division euclidienne. Pour la réciproque ($\impliedby$) voyons comment cela marche sur un exemple : Montrons que $x = 12,34\,\underleftrightarrow{2021}\,\underleftrightarrow{2021}\ldots$ est un rationnel.
L'idée est d'abord de faire apparaître la partie périodique juste après la virgule. Ici la période commence deux chiffres après la virgule, donc on multiplie par 100 :

$$100x = 1234,\underleftrightarrow{2021}\,\underleftrightarrow{2021}\ldots \tag{1}$$

Maintenant on va décaler tout vers la gauche de la longueur d'une période, donc ici on multiplie encore par $10\,000$ pour décaler de 4 chiffres :

$$10\,000 \times 100x = 1234\,2021,\underleftrightarrow{2021}\ldots \tag{2}$$

Les parties après la virgule des deux lignes (1) et (2) sont les mêmes, donc si on les soustrait en faisant (2)-(1) alors les parties décimales s'annulent :

$$10\,000 \times 100x - 100x = 12\,342\,021 - 1234$$

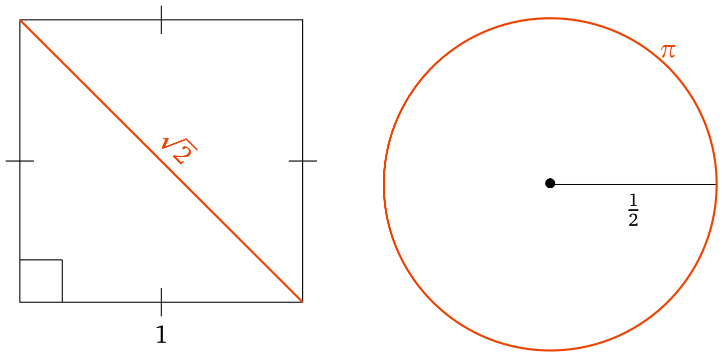
donc $999\,900x = 12\,340\,787$ donc

$$x = \frac{12\,340\,787}{999\,900}.$$

Et donc bien sûr $x \in \mathbb{Q}$.

1.2. $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel

Il existe des nombres qui ne sont pas rationnels, les ***irrationnels***. Les nombres irrationnels apparaissent naturellement dans les figures géométriques : par exemple la diagonale d'un carré de côté 1 est le nombre irrationnel $\sqrt{2}$; la circonférence d'un cercle de rayon $\frac{1}{2}$ est π qui est également un nombre irrationnel. Enfin $e = \exp(1)$ est aussi irrationnel.



Nous allons prouver que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Proposition 2.

$$\boxed{\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}}$$

Démonstration. Par l'absurde supposons que $\sqrt{2}$ soit un nombre rationnel. Alors il existe des entiers $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, de plus –ce sera important pour la suite– on suppose que p et q sont premiers entre eux (c'est-à-dire que la fraction $\frac{p}{q}$ est sous une écriture irréductible).
En élevant au carré, l'égalité $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ devient $2q^2 = p^2$. Cette dernière égalité est une égalité d'entiers. L'entier de gauche est pair, donc on en déduit que p^2 est pair ; en terme de divisibilité 2 divise p^2.
Mais si 2 divise p^2 alors 2 divise p (cela se prouve par facilement l'absurde). Donc il existe un entier $p' \in \mathbb{Z}$ tel que $p = 2p'$.
Repartons de l'égalité $2q^2 = p^2$ et remplaçons p par $2p'$. Cela donne $2q^2 = 4p'^2$. Donc $q^2 = 2p'^2$. Maintenant cela entraîne que 2 divise q^2 et comme avant alors 2 divise q.
Nous avons prouvé que 2 divise à la fois p et q. Cela rentre en contradiction avec le fait que p et q sont premiers entre eux. Notre hypothèse de départ est donc fausse : $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel. □

Comme ce résultat est important en voici une deuxième démonstration, assez différente, mais toujours par l'absurde.

Autre démonstration. Par l'absurde, supposons $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, donc $q\sqrt{2} = p \in \mathbb{N}$. Considérons l'ensemble

$$\mathcal{N} = \left\{ n \in \mathbb{N}^* \mid n\sqrt{2} \in \mathbb{N} \right\}.$$

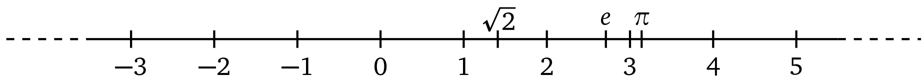
Cet ensemble n'est pas vide car on vient de voir que $q\sqrt{2} = p \in \mathbb{N}$ donc $q \in \mathcal{N}$. Ainsi $\mathcal{N}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$, elle admet donc un plus petit élément $n_0 = \min \mathcal{N}$.
Posons

$$n_1 = n_0\sqrt{2} - n_0 = n_0(\sqrt{2} - 1),$$

il découle de cette dernière égalité et de $1 < \sqrt{2} < 2$ que $0 < n_1 < n_0$.
De plus $n_1\sqrt{2} = (n_0\sqrt{2} - n_0)\sqrt{2} = 2n_0 - n_0\sqrt{2} \in \mathbb{N}$. Donc $n_1 \in \mathcal{N}$ et $n_1 < n_0$: on vient de trouver un élément n_1 de $\mathcal{N}$ strictement plus petit que n_0 qui était le minimum. C'est une contradiction.
Notre hypothèse de départ est fausse, donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. □

Exercice 1.
Montrer que $\sqrt{10} \notin \mathbb{Q}$.

On représente souvent les nombres réels sur une « droite numérique » :



Il est bon de connaître les premières décimales de certains réels $\sqrt{2} \simeq 1,4142\ldots$ $\pi \simeq 3,14159265\ldots$ $e \simeq 2,718\ldots$

Il est souvent pratique de rajouter les deux extrémités à la droite numérique.

Définition 1.

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

Mini-exercices.

1. Montrer que la somme de deux rationnels est un rationnel. Montrer que le produit de deux rationnels est un rationnel. Montrer que l'inverse d'un rationnel non nul est un rationnel. Qu'en est-il pour les irrationnels ?
2. Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction : $0,1212$; $0,12\underleftrightarrow{12}\ldots$; $78,33456\underleftrightarrow{456}\ldots$
3. Sachant $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, montrer $2 - 3\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$.
4. Notons D l'ensemble des nombres de la forme $\frac{a}{2^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\frac{1}{3} \notin D$. Trouver $x \in D$ tel que $1234 < x < 1234,001$.
5. Montrer que $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \notin \mathbb{Q}$.
6. Montrer que $\log 2 \notin \mathbb{Q}$ ($\log 2$ est le logarithme décimal de 2 : c'est le nombre réel tel que $10^{\log 2} = 2$).

2. Propriétés de $\mathbb{R}$

2.1. Addition et multiplication

Ce sont les propriétés que vous avez toujours pratiquées. Pour $a, b, c \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{array}{ll} a+b=b+a & a\times b=b\times a \\ 0+a=a & 1\times a=a \text{ si } a\neq 0 \\ a+b=0 \iff a=-b & ab=1 \iff a=\frac{1}{b} \\ (a+b)+c=a+(b+c) & (a\times b)\times c=a\times(b\times c) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a\times(b+c)=a\times b+a\times c \\ a\times b=0 \iff (a=0 \text{ ou } b=0) \end{array}$$

On résume toutes ces propriétés en disant que :

Propriété ($\mathbb{R}1$).
$(\mathbb{R},+,\times)$ *est un* **corps commutatif**.

2.2. Ordre sur $\mathbb{R}$

Nous allons voir que les réels sont ordonnés. La notion d'ordre est générale et nous allons définir cette notion sur un ensemble quelconque. Cependant gardez à l'esprit que pour nous $E = \mathbb{R}$ et $\mathcal{R} = \leqslant$.

Définition 2.
Soit E un ensemble.

1. Une ***relation*** $\mathcal{R}$ sur E est un sous-ensemble de l'ensemble produit $E \times E$. Pour $(x, y) \in E \times E$, on dit que x est en relation avec y et on note $x\mathcal{R}y$ pour dire que $(x, y) \in \mathcal{R}$.
2. Une relation $\mathcal{R}$ est une ***relation d'ordre*** si
   - $\mathcal{R}$ est ***réflexive*** : pour tout $x \in E$, $x\mathcal{R}x$,
   - $\mathcal{R}$ est ***antisymétrique*** : pour tout $x, y \in E$, $(x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \implies x = y$,
   - $\mathcal{R}$ est ***transitive*** : pour tout $x, y, z \in E$, $(x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \implies x\mathcal{R}z$.

Définition 3.
Une relation d'ordre $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est ***totale*** si pour tout $x, y \in E$ on a $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$. On dit aussi que $(E, \mathcal{R})$ est un ***ensemble totalement ordonné***.

Propriété ($\mathbb{R}2$).
La relation $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$ est une relation d'ordre, et de plus, elle est totale.

Nous avons donc :
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \leqslant x$,
- pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, si $x \leqslant y$ et $y \leqslant x$ alors $x = y$,
- pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$ si $x \leqslant y$ et $y \leqslant z$ alors $x \leqslant z$.

Remarque.
Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a par définition :

$$x \leqslant y \iff y - x \in \mathbb{R}_+$$
$$x < y \iff (x \leqslant y \text{ et } x \neq y).$$

Les opérations de $\mathbb{R}$ sont compatibles avec la relation d'ordre $\leqslant$ au sens suivant, pour des réels a, b, c, d :

$$\begin{aligned}(a \leqslant b \text{ et } c \leqslant d) &\implies a + c \leqslant b + d \\ (a \leqslant b \text{ et } c \geqslant 0) &\implies a \times c \leqslant b \times c \\ (a \leqslant b \text{ et } c \leqslant 0) &\implies a \times c \geqslant b \times c.\end{aligned}$$

On définit le maximum de deux réels a et b par :

$$\max(a, b) = \begin{cases} a & \text{si } a \geqslant b \\ b & \text{si } b > a. \end{cases}$$

Exercice 2.
Comment définir $\max(a, b, c)$, $\max(a_1, a_2, \ldots, a_n)$? Et $\min(a, b)$?

2.3. Propriété d'Archimède

Propriété ($\mathbb{R}$3, Propriété d'Archimède).
$\mathbb{R}$ est **archimédien***, c'est-à-dire :*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad n > x$$

« Pour tout réel x, il existe un entier naturel n strictement plus grand que x. »

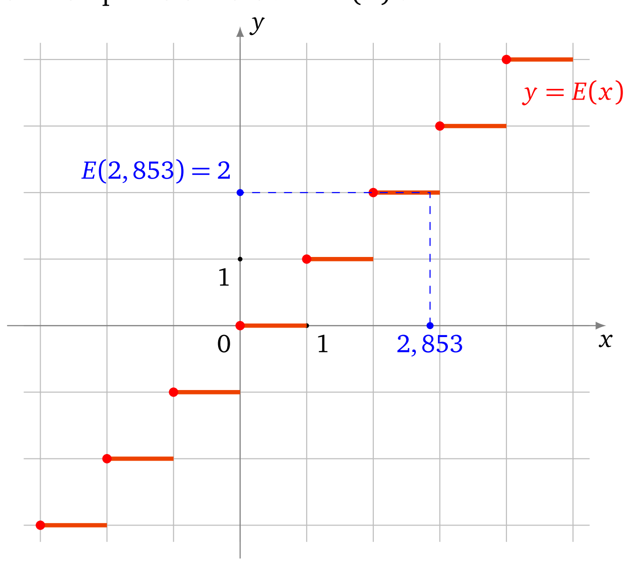
Cette propriété peut sembler évidente, elle est pourtant essentielle puisque elle permet de définir la partie entière d'un nombre réel :

Proposition 3.
Soit $x \in \mathbb{R}$, il **existe** *un* **unique** *entier relatif, la* **partie entière** *notée $E(x)$, tel que :*

$$\boxed{E(x) \leqslant x < E(x) + 1}$$

Exemple 1.
- $E(2,853) = 2$, $E(\pi) = 3$, $E(-3,5) = -4$.
- $E(x) = 3 \iff 3 \leqslant x < 4$.

Remarque.
- On note aussi $E(x) = [x]$.
- Voici le graphe de la fonction partie entière $x \mapsto E(x)$:



Pour la démonstration de la proposition 3 il y a deux choses à établir : d'abord qu'un tel entier $E(x)$ existe et ensuite qu'il est unique.

Démonstration.
Existence. Supposons $x \geqslant 0$, par la propriété d'Archimède (Propriété $\mathbb{R}$3) il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > x$. L'ensemble $K = \{k \in \mathbb{N} \mid k \leqslant x\}$ est donc fini (car pour tout k dans K, on a $0 \leqslant k < n$). Il admet donc un plus grand élément $k_{max} = \max K$. On a alors $k_{max} \leqslant x$ car $k_{max} \in K$, et $k_{max} + 1 > x$ car $k_{max} + 1 \notin K$. Donc $k_{max} \leqslant x < k_{max} + 1$ et on prend donc $E(x) = k_{max}$.

Unicité. Si k et ℓ sont deux entiers relatifs vérifiant $k \leqslant x < k+1$ et $\ell \leqslant x < \ell + 1$, on a donc $k \leqslant x < \ell + 1$, donc par transitivité $k < \ell + 1$. En échangeant les rôles de ℓ et k, on a aussi $\ell < k + 1$. On en conclut que $\ell - 1 < k < \ell + 1$, mais il n'y a qu'un seul entier compris strictement entre $\ell - 1$ et $\ell + 1$, c'est ℓ. Ainsi $k = \ell$.
Le cas $x < 0$ est similaire. □

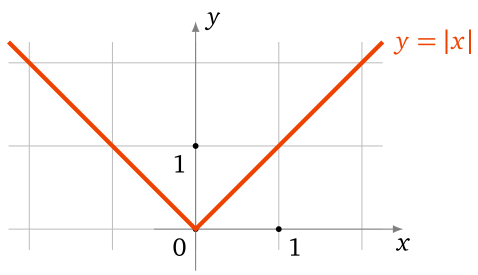
Exemple 2.
Encadrons $\sqrt{10}$ et $1,1^{1/12}$ par deux entiers consécutifs.
- Nous savons $3^2 = 9 < 10$ donc $3 = \sqrt{3^2} < \sqrt{10}$ (la fonction racine carrée est croissante). De même $4^2 = 16 > 10$ donc $4 = \sqrt{4^2} > \sqrt{10}$. Conclusion : $3 < \sqrt{10} < 4$ ce qui implique $E(\sqrt{10}) = 3$.
- On procède sur le même principe. $1^{12} < 1,10 < 2^{12}$ donc en passant à la racine 12-ième (c'est-à-dire à la puissance $\frac{1}{12}$) on obtient : $1 < 1,1^{1/12} < 2$ et donc $E(1,1^{1/12}) = 1$.

2.4. Valeur absolue

Pour un nombre réel x, on définit la ***valeur absolue*** de x par :

$$\boxed{|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}}$$

Voici le graphe de la fonction $x \mapsto |x|$:



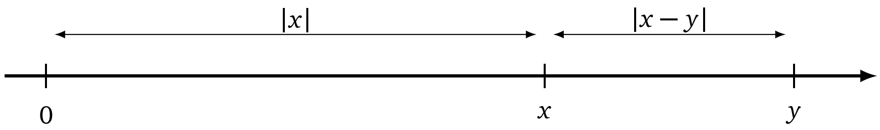
Proposition 4.
1. $|x| \geqslant 0$; $|-x| = |x|$; $|x| > 0 \iff x \neq 0$
2. $\sqrt{x^2} = |x|$
3. $|xy| = |x||y|$
4. **Inégalité triangulaire** $\boxed{|x+y| \leqslant |x| + |y|}$
5. **Seconde inégalité triangulaire** $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x - y|$

Démonstration des inégalités triangulaires.

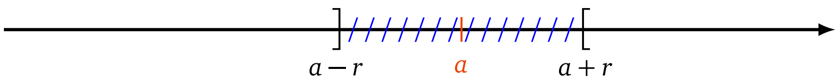
- $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$ et $-|y| \leqslant y \leqslant |y|$. En additionnant $-(|x|+|y|) \leqslant x+y \leqslant |x|+|y|$, donc $|x+y| \leqslant |x|+|y|$.
- Puisque $x=(x-y)+y$, on a d'après la première inégalité : $|x| = \big|(x-y)+y\big| \leqslant |x-y|+|y|$. Donc $|x|-|y| \leqslant |x-y|$, et en intervertissant les rôles de x et y, on a aussi $|y|-|x| \leqslant |y-x|$. Comme $|y-x| = |x-y|$ on a donc $\big||x|-|y|\big| \leqslant |x-y|$.

□

Sur la droite numérique, $|x-y|$ représente la distance entre les réels x et y ; en particulier $|x|$ représente la distance entre les réels x et 0.



De plus on a :
- $|x-a| < r \iff a-r < x < a+r$.
- Ou encore, comme on le verra bientôt, $|x-a| < r \iff x \in]a-r, a+r[$.



Exercice 3.
Soit $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ et $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x-a| < |a|$. Montrer que $x \neq 0$ et ensuite que x est du même signe que a.

Mini-exercices.
1. On munit l'ensemble $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ des parties de $\mathbb{R}$ de la relation $\mathscr{R}$ définie par $A\mathscr{R}B$ si $A \subset B$. Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre. Est-elle totale ?
2. Soient x, y deux réels. Montrer que $|x| \geqslant \big||x+y|-|y|\big|$.
3. Soient $x_1, \ldots, x_n$ des réels. Montrer que $|x_1 + \cdots + x_n| \leqslant |x_1| + \cdots + |x_n|$. Dans quel cas a-t-on égalité ?
4. Soient $x, y > 0$ des réels. Comparer $E(x+y)$ avec $E(x)+E(y)$. Comparer $E(x \times y)$ et $E(x) \times E(y)$.
5. Soit $x > 0$ un réel. Encadrer $\frac{E(x)}{x}$. Quelle est la limite de $\frac{E(x)}{x}$ lorsque $x \to +\infty$?
6. On note $\{x\} = x - E(x)$ la *partie fractionnaire* de x, de sorte que $x = E(x) + \{x\}$. Représenter les graphes des fonctions $x \mapsto E(x)$, $x \mapsto \{x\}$, $x \mapsto E(x) - \{x\}$.

3. Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

3.1. Intervalle

Définition 4.
Un ***intervalle de*** $\mathbb{R}$ est un sous-ensemble I de $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété :

$$\forall a, b \in I \;\; \forall x \in \mathbb{R} \;\; (a \leqslant x \leqslant b \implies x \in I)$$

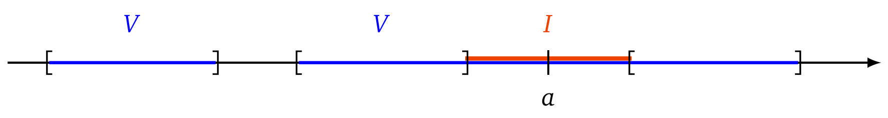
Remarque.
- Par définition $I = \varnothing$ est un intervalle.
- $I = \mathbb{R}$ est aussi un intervalle.

Définition 5.
Un ***intervalle ouvert*** est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ de la forme $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$, où a et b sont des éléments de $\overline{\mathbb{R}}$.

Même si cela semble évident il faut justifier qu'un intervalle ouvert est un intervalle (!). En effet soient a', b' des éléments de $]a, b[$ et $x \in \mathbb{R}$ tel que $a' \leqslant x \leqslant b'$. Alors on a $a < a' \leqslant x \leqslant b' < b$, donc $x \in]a, b[$.

La notion de voisinage sera utile pour les limites.

Définition 6.
Soit a un réel, $V \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble. On dit que V est un ***voisinage*** de a s'il existe un intervalle ouvert I tel que $a \in I$ et $I \subset V$.



3.2. Densité

Théorème 1.
1. $\mathbb{Q}$ *est* **dense** *dans* $\mathbb{R}$ *: tout intervalle ouvert (non vide) de* $\mathbb{R}$ *contient une infinité de rationnels.*
2. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$ *: tout intervalle ouvert (non vide) de* $\mathbb{R}$ *contient une infinité d'irrationnels.*

Démonstration. On commence par remarquer que tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient un intervalle du type $]a, b[$, $a, b \in \mathbb{R}$. On peut donc supposer que $I =]a, b[$ par la suite.

1. *Tout intervalle contient un rationnel.*

   On commence par montrer l'affirmation :
   $$\forall a, b \in \mathbb{R} \;\; (a < b \implies \exists r \in \mathbb{Q} \quad a < r < b) \tag{3}$$
   Donnons d'abord l'idée de la preuve. Trouver un tel rationnel $r = \frac{p}{q}$, avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, revient à trouver de tels entiers p et q vérifiant $qa < p < qb$. Cela revient à trouver un $q \in \mathbb{N}^*$ tel que l'intervalle ouvert $]qa, qb[$ contienne un entier p. Il suffit pour cela que la longueur $qb - qa = q(b - a)$ de l'intervalle dépasse strictement 1, ce qui équivaut à $q > \frac{1}{b-a}$.
   Passons à la rédaction définitive. D'après la propriété d'Archimède (propriété $\mathbb{R}3$), il existe un entier q tel que $q > \frac{1}{b-a}$. Comme $b - a > 0$, on a $q \in \mathbb{N}^*$. Posons $p = E(aq) + 1$. Alors $p - 1 \leqslant aq < p$.

On en déduit d'une part $a < \frac{p}{q}$, et d'autre part $\frac{p}{q} - \frac{1}{q} \leqslant a$, donc $\frac{p}{q} \leqslant a + \frac{1}{q} < a + b - a = b$. Donc $\frac{p}{q} \in]a, b[$. On a montré l'affirmation (3).

2. *Tout intervalle contient un irrationnel.*

   Partant de a, b réels tels que $a < b$, on peut appliquer l'implication de l'affirmation (3) au couple $(a - \sqrt{2}, b - \sqrt{2})$. On en déduit qu'il existe un rationnel r dans l'intervalle $]a - \sqrt{2}, b - \sqrt{2}[$ et par translation $r + \sqrt{2} \in]a, b[$. Or $r + \sqrt{2}$ est irrationnel, car sinon comme les rationnels sont stables par somme, $\sqrt{2} = -r + r + \sqrt{2}$ serait rationnel, ce qui est faux d'après la proposition 2. On a donc montré que si $a < b$, l'intervalle $]a, b[$ contient aussi un irrationnel.

3. *Tout intervalle contient une infinité de rationnels et d'irrationnels.*

   On va déduire de l'existence d'un rationnel et d'un irrationnel dans tout intervalle $]a, b[$ le fait qu'il existe une infinité de chaque dans un tel intervalle ouvert. En effet pour un entier $N \geqslant 1$, on considère l'ensemble de N sous-intervalles ouverts disjoints deux à deux :

$$\left]a, a + \frac{b-a}{N}\right[, \quad \left]a + \frac{b-a}{N}, a + \frac{2(b-a)}{N}\right[, \quad \ldots \quad \left]a + \frac{(N-1)(b-a)}{N}, b\right[.$$

   Chaque sous-intervalle contient un rationnel et un irrationnel, donc $]a, b[$ contient (au moins) N rationnels et N irrationnels. Comme ceci est vrai pour tout entier $N \geqslant 1$, l'intervalle ouvert $]a, b[$ contient alors une infinité de rationnels et une infinité d'irrationnels.

$\square$

Mini-exercices.

1. Montrer qu'une intersection d'intervalles est un intervalle. Qu'en est-il pour une réunion ? Trouver une condition nécessaire et suffisante afin que la réunion de deux intervalles soit un intervalle.
2. Montrer que l'ensemble des nombres décimaux (c'est-à-dire ceux de la forme $\frac{a}{10^n}$, avec $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{Z}$) est dense dans $\mathbb{R}$.
3. Construire un rationnel compris strictement entre 123 et 123,001. Ensuite construire un irrationnel. Sauriez-vous en construire une infinité ? Et entre π et $\pi + 0,001$?
4. Montrer que si $z = e^{i\alpha}$ et $z' = e^{i\beta}$ sont deux nombres complexes de module 1, avec $\alpha < \beta$, il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et une racine n-ième de l'unité $z = e^{i\gamma}$ avec $\alpha < \gamma < \beta$.

4. Borne supérieure

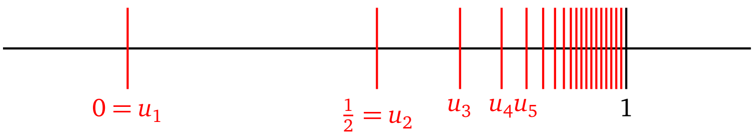
4.1. Maximum, minimum

Définition 7.
Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Un réel α est un ***plus grand élément*** de A si :
$$\alpha \in A \qquad \text{et} \qquad \forall x \in A \quad x \leqslant \alpha.$$
S'il existe, le plus grand élément est unique, on le note alors $\max A$.
Le ***plus petit élément*** de A, noté $\min A$, s'il existe est le réel α tel que $\alpha \in A$ et $\forall x \in A \quad x \geqslant \alpha$.

Le plus grand élément s'appelle aussi le ***maximum*** et le plus petit élément, le ***minimum***. Il faut garder à l'esprit que le plus grand élément ou le plus petit élément n'existent pas toujours.

Exemple 3.
- $\max[a,b] = b$, $\min[a,b] = a$.
- L'intervalle $]a,b[$ n'a pas de plus grand élément, ni de plus petit élément.
- L'intervalle $[0,1[$ a pour plus petit élément 0 et n'a pas de plus grand élément.

Exemple 4.
Soit $A = \left\{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$.
Notons $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $A = \left\{u_n \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Voici une représentation graphique de A sur la droite numérique :



1. A n'a pas de plus grand élément : Supposons qu'il existe un plus grand élément $\alpha = \max A$. On aurait alors $u_n \leqslant \alpha$, pour tout u_n. Ainsi $1 - \frac{1}{n} \leqslant \alpha$ donc $\alpha \geqslant 1 - \frac{1}{n}$. À la limite lorsque $n \to +\infty$ cela implique $\alpha \geqslant 1$. Comme α est le plus grand élément de A alors $\alpha \in A$. Donc il existe n_0 tel que $\alpha = u_{n_0}$. Mais alors $\alpha = 1 - \frac{1}{n_0} < 1$. Ce qui est en contradiction avec $\alpha \geqslant 1$. Donc A n'a pas de maximum.
2. $\min A = 0$: Il y a deux choses à vérifier tout d'abord pour $n = 1$, $u_1 = 0$ donc $0 \in A$. Ensuite pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant 0$. Ainsi $\min A = 0$.

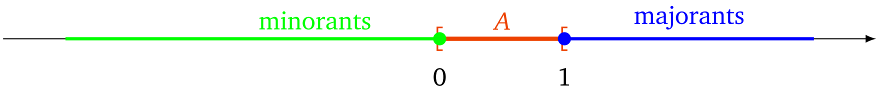
4.2. Majorants, minorants

Définition 8.
Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Un réel M est un ***majorant*** de A si $\forall x \in A \quad x \leqslant M$.
Un réel m est un ***minorant*** de A si $\forall x \in A \quad x \geqslant m$.

Exemple 5.
- 3 est un majorant de $]0,2[$;
- $-7, -\pi, 0$ sont des minorants de $]0,+\infty[$ mais il n'y a pas de majorant.

Si un majorant (resp. un minorant) de A existe on dit que A est ***majorée*** (resp. ***minorée***).
Comme pour le minimum et le maximum il n'existe pas toujours de majorant ni de minorant, en plus on n'a pas l'unicité.

Exemple 6.
Soit $A = [0,1[$.



1. les majorants de A sont exactement les éléments de $[1,+\infty[$,
2. les minorants de A sont exactement les éléments de $]-\infty,0]$.

4.3. Borne supérieure, borne inférieure

Définition 9.
Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et α un réel.

1. α est la ***borne supérieure*** de A si α est un majorant de A et si c'est le plus petit des majorants. S'il existe on le note $\sup A$.
2. α est la ***borne inférieure*** de A si α est un minorant de A et si c'est le plus grand des minorants. S'il existe on le note $\inf A$.

Exemple 7.
Soit $A =]0,1]$.

1. $\sup A = 1$: en effet les majorants de A sont les éléments de $[1,+\infty[$. Donc le plus petit des majorants est 1.
2. $\inf A = 0$: les minorants sont les éléments de $]-\infty,0]$ donc le plus grand des minorants est 0.

Exemple 8.

- $\sup[a,b] = b$,
- $\inf[a,b] = a$,
- $\sup]a,b[= b$,
- $]0,+\infty[$ n'admet pas de borne supérieure,
- $\inf]0,+\infty[= 0$.

Théorème 2 ($\mathbb{R}4$)**.**
Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet une borne supérieure.

De la même façon : Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée admet une borne inférieure.

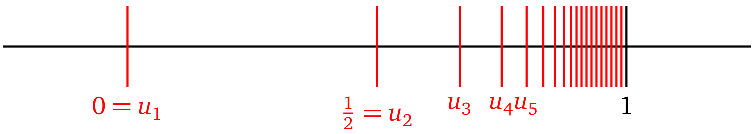
Remarque.
C'est tout l'intérêt de la borne supérieure par rapport à la notion de plus grand élément, dès qu'une partie est bornée elle admet toujours une borne supérieure et une borne inférieure. Ce qui n'est pas le cas pour le plus grand ou plus petit élément. Gardez à l'esprit l'exemple $A = [0,1[$.

Proposition 5 (Caractérisation de la borne supérieure)**.**
Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. La borne supérieure de A est l'unique réel $\sup A$ tel que

(i) si $x \in A$, alors $x \leqslant \sup A$,

(ii) pour tout $y < \sup A$, il existe $x \in A$ tel que $y < x$.

Exemple 9.
Reprenons l'exemple de la partie $A = \left\{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$.



1. Nous avions vu que $\min A = 0$. Lorsque le plus petit élément d'une partie existe alors la borne inférieure vaut ce plus petit élément : donc $\inf A = \min A = 0$.
2. *Première méthode pour* $\sup A$. Montrons que $\sup A = 1$ en utilisant la définition de la borne supérieure. Soit M un majorant de A alors $M \geqslant 1 - \frac{1}{n}$, pour tout $n \geqslant 1$. Donc à la limite $M \geqslant 1$. Réciproquement si $M \geqslant 1$ alors M est un majorant de A. Donc les majorants sont les éléments de $[1, +\infty[$. Ainsi le plus petit des majorants est 1 et donc $\sup A = 1$.
3. *Deuxième méthode pour* $\sup A$. Montrons que $\sup A = 1$ en utilisant la caractérisation de la borne supérieure.
   (i) Si $x \in A$, alors $x \leqslant 1$ (1 est bien un majorant de A) ;
   (ii) pour tout $y < 1$, il existe $x \in A$ tel que $y < x$: en effet prenons n suffisamment grand tel que $0 < \frac{1}{n} < 1 - y$. Alors on a $y < 1 - \frac{1}{n} < 1$. Donc $x = 1 - \frac{1}{n} \in A$ convient.

   Par la caractérisation de la borne supérieure, $\sup A = 1$.

Démonstration.

1. Montrons que $\sup A$ vérifie ces deux propriétés. La borne supérieure est en particulier un majorant, donc vérifie la première propriété. Pour la seconde, fixons $y < \sup A$. Comme $\sup A$ est le plus petit des majorants de A alors y n'est pas un majorant de A. Donc il existe $x \in A$ tel que $y < x$. Autrement dit $\sup A$ vérifie également la seconde propriété.
2. Montrons que réciproquement si un nombre α vérifie ces deux propriétés, il s'agit de $\sup A$. La première propriété montre que α est un majorant de A. Supposons par l'absurde que α n'est pas le plus petit des majorants. Il existe donc un autre majorant y de A vérifiant $y < \alpha$. La deuxième propriété montre l'existence d'un élément x de A tel que $y < x$, ce qui contredit le fait que y est un majorant de A. Cette contradiction montre donc que α est bien le plus petit des majorants de A, à savoir $\sup A$.

$\square$

Nous anticipons sur la suite pour donner une autre caractérisation, très utile, de la borne supérieure.

Proposition 6.
Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. La borne supérieure de A est l'unique réel $\sup A$ tel que

(i) $\sup A$ est un majorant de A,

(ii) il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers $\sup A$.

Remarques historiques

- Les propriétés $\mathbb{R}1$, $\mathbb{R}2$, $\mathbb{R}3$ et le théorème $\mathbb{R}4$ sont intrinsèques à la construction de $\mathbb{R}$ (que nous admettons).
- Il y a un grand saut entre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$: on peut donner un sens précis à l'assertion « il y a beaucoup plus de nombres irrationnels que de nombres rationnels », bien que ces deux ensembles soient infinis, et même denses dans $\mathbb{R}$.
  D'autre part, la construction du corps des réels $\mathbb{R}$ est beaucoup plus récente que celle de $\mathbb{Q}$ dans l'histoire des mathématiques.

- La construction de $\mathbb{R}$ devient une nécessité après l'introduction du calcul infinitésimal (Newton et Leibniz vers 1670). Jusqu'alors l'existence d'une borne supérieure était considérée comme évidente et souvent confondue avec le plus grand élément.
- Ce n'est pourtant que beaucoup plus tard, dans les années 1860-1870 (donc assez récemment dans l'histoire des mathématiques) que deux constructions complètes de $\mathbb{R}$ sont données :
  — Les coupures de Dedekind : $\mathscr{C}$ est une coupure si $\mathscr{C} \subset \mathbb{Q}$ et si $\forall r \in \mathscr{C}$ on a $r' < r \implies r' \in \mathscr{C}$.
  — Le suites de Cauchy : ce sont les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la propriété
$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \qquad (m \geqslant N \ \ , n \geqslant N) \implies |u_m - u_n| \leqslant \epsilon \ \ .$$
  Les réels sont l'ensemble des suites de Cauchy (où l'on identifie deux suites de Cauchy dont la différence tend vers 0).

Mini-exercices.

1. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On note $-A = \{-x | x \in A\}$. Montrer que $\min A = -\max(-A)$, c'est-à-dire que si l'une des deux quantités a un sens, l'autre aussi, et on a égalité.
2. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Montrer que A admet un plus petit élément si et seulement si A admet une borne inférieure qui appartient à A.
3. Même exercice, mais en remplaçant min par inf et max par sup.
4. Soit $A = \left\{(-1)^n \frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$. Déterminer, s'ils existent, le plus grand élément, le plus petit élément, les majorants, les minorants, la borne supérieure et la borne inférieure.
5. Même question avec $A = \left\{\frac{1}{1+x} \mid x \in [0, +\infty[\right\}$.

Auteurs du chapitre Arnaud Bodin, Niels Borne, Laura Desideri

Chapitre 2

Nombres complexes

Préambule

L'équation $x+5=2$ a ses coefficients dans $\mathbb{N}$ mais pourtant sa solution $x=-3$ n'est pas un entier naturel. Il faut ici considérer l'ensemble plus grand $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.

$$\mathbb{N} \xhookrightarrow{x+5=2} \mathbb{Z} \xhookrightarrow{2x=-3} \mathbb{Q} \xhookrightarrow{x^2=\frac{1}{2}} \mathbb{R} \xhookrightarrow{x^2=-\sqrt{2}} \mathbb{C}$$

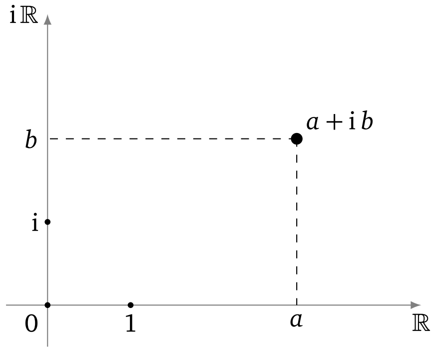
De même l'équation $2x=-3$ a ses coefficients dans $\mathbb{Z}$ mais sa solution $x=-\frac{3}{2}$ est dans l'ensemble plus grand des rationnels $\mathbb{Q}$. Continuons ainsi, l'équation $x^2=\frac{1}{2}$ à coefficients dans $\mathbb{Q}$, a ses solutions $x_1=+1/\sqrt{2}$ et $x_2=-1/\sqrt{2}$ dans l'ensemble des réels $\mathbb{R}$. Ensuite l'équation $x^2=-\sqrt{2}$ à ses coefficients dans $\mathbb{R}$ et ses solutions $x_1=+\mathrm{i}\sqrt{\sqrt{2}}$ et $x_2=-\mathrm{i}\sqrt{\sqrt{2}}$ dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$. Ce processus est-il sans fin ? Non ! Les nombres complexes sont en quelque sorte le bout de la chaîne car nous avons le théorème de d'Alembert-Gauss suivant : « *Pour n'importe quelle équation polynomiale* $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0=0$ *où les coefficients* a_i *sont des complexes (ou bien des réels), alors les solutions* $x_1,\ldots,x_n$ *sont dans l'ensemble des nombres complexes* ».

Outre la résolution d'équations, les nombres complexes s'appliquent à la trigonométrie, à la géométrie (comme nous le verrons dans ce chapitre) mais aussi à l'électronique, à la mécanique quantique, etc.

1. Les nombres complexes

1.1. Définition

Définition 1.
Un ***nombre complexe*** est un couple $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ que l'on notera $a+\mathrm{i}b$

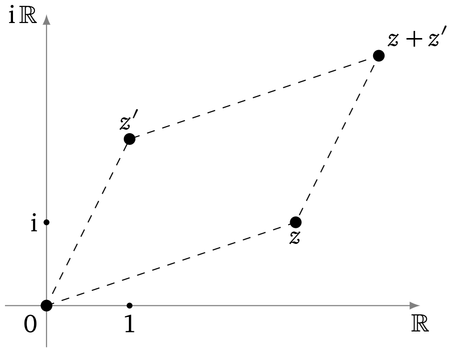


Cela revient à identifier 1 avec le vecteur $(1,0)$ de $\mathbb{R}^2$, et i avec le vecteur $(0,1)$. On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes. Si $b=0$, alors $z=a$ est situé sur l'axe des abscisses, que l'on identifie à $\mathbb{R}$. Dans ce cas on dira que z est ***réel***, et $\mathbb{R}$ apparaît comme un sous-ensemble de $\mathbb{C}$, appelé ***axe réel***. Si $b \neq 0$, z est dit ***imaginaire*** et si $b \neq 0$ et $a=0$, z est dit ***imaginaire pur***.

1.2. Opérations

Si $z = a + \mathrm{i}\, b$ et $z' = a' + \mathrm{i}\, b'$ sont deux nombres complexes, alors on définit les opérations suivantes :

- ***addition*** : $(a + \mathrm{i}\, b) + (a' + \mathrm{i}\, b') = (a + a') + \mathrm{i}(b + b')$

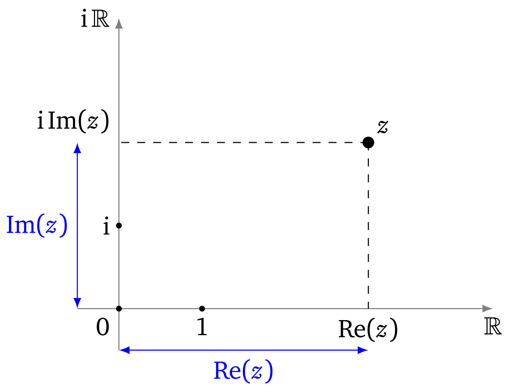


- ***multiplication*** : $(a + \mathrm{i}\, b) \times (a' + \mathrm{i}\, b') = (aa' - bb') + \mathrm{i}(ab' + ba')$. On développe en suivant les règles de la multiplication usuelle avec la convention suivante :

$$\boxed{\mathrm{i}^2 = -1}$$

1.3. Partie réelle et imaginaire

Soit $z = a + \mathrm{i}\, b$ un nombre complexe, sa ***partie réelle*** est le réel a et on la note $\mathrm{Re}(z)$; sa ***partie imaginaire*** est le réel b et on la note $\mathrm{Im}(z)$.



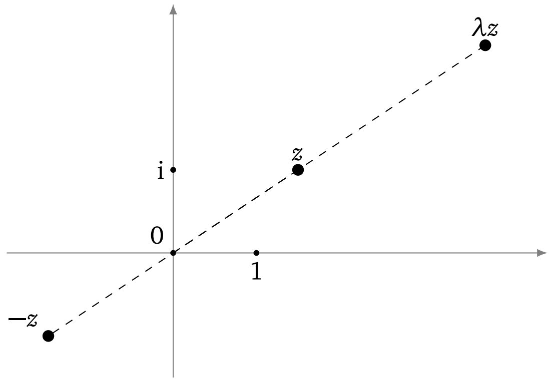
Par identification de $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$, l'écriture $z = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)$ est unique :

$$z = z' \iff \begin{cases} \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') \\ \text{et} \\ \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z') \end{cases}$$

En particulier un nombre complexe est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle. Un nombre complexe est nul si et et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nuls.

1.4. Calculs

Quelques définitions et calculs sur les nombres complexes.



- L'***opposé*** de $z = a + \mathrm{i}\,b$ est $-z = (-a) + \mathrm{i}(-b) = -a - \mathrm{i}\,b$.
- La ***multiplication par un scalaire*** $\lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda \cdot z = (\lambda a) + \mathrm{i}(\lambda b)$.
- L'***inverse*** : si $z \neq 0$, il existe un unique $z' \in \mathbb{C}$ tel que $zz' = 1$ (où $1 = 1 + \mathrm{i} \times 0$).
  Pour la preuve et le calcul on écrit $z = a + \mathrm{i}\,b$ puis on cherche $z' = a' + \mathrm{i}\,b'$ tel que $zz' = 1$. Autrement dit $(a + \mathrm{i}\,b)(a' + \mathrm{i}\,b') = 1$. En développant et identifiant les parties réelles et imaginaires on obtient les équations
  $$\begin{cases} aa' - bb' = 1 & (L_1) \\ ab' + ba' = 0 & (L_2) \end{cases}$$
  En écrivant $aL_1 + bL_2$ (on multiplie la ligne (L_1) par a, la ligne (L_2) par b et on additionne) et $-bL_1 + aL_2$ on en déduit
  $$\begin{cases} a'\left(a^2 + b^2\right) = a \\ b'\left(a^2 + b^2\right) = -b \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} a' = \frac{a}{a^2+b^2} \\ b' = -\frac{b}{a^2+b^2} \end{cases}$$
  L'inverse de z, noté $\frac{1}{z}$, est donc
  $$z' = \frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \mathrm{i}\,\frac{-b}{a^2 + b^2} = \frac{a - \mathrm{i}\,b}{a^2 + b^2}.$$
- La ***division*** : $\frac{z}{z'}$ est le nombre complexe $z \times \frac{1}{z'}$.
- Propriété d'intégrité : si $zz' = 0$ alors $z = 0$ ou $z' = 0$.
- Puissances : $z^2 = z \times z$, $z^n = z \times \cdots \times z$ (n fois, $n \in \mathbb{N}$). Par convention $z^0 = 1$ et $z^{-n} = \left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{z^n}$.

Proposition 1.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$ différent de 1

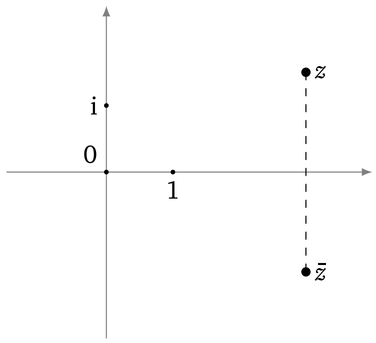
$$\boxed{1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.}$$

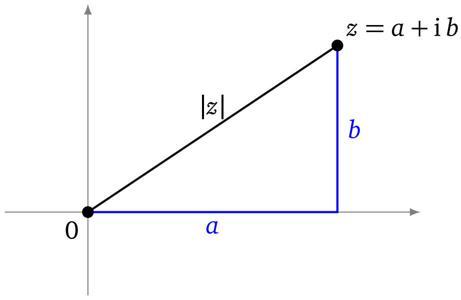
La preuve est simple : notons $S = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n$, alors en développant $S \cdot (1 - z)$ presque tous les termes se télescopent et l'on trouve $S \cdot (1 - z) = 1 - z^{n+1}$.

Remarque.
Il n'y pas d'ordre naturel sur $\mathbb{C}$, il ne faut donc jamais écrire $z \geqslant 0$ ou $z \leqslant z'$.

1.5. Conjugué, module

Le ***conjugué*** de $z = a + \mathrm{i}\,b$ est $\bar{z} = a - \mathrm{i}\,b$, autrement dit $\mathrm{Re}(\bar{z}) = \mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(\bar{z}) = -\mathrm{Im}(z)$. Le point $\bar{z}$ est le symétrique du point z par rapport à l'axe réel.
Le ***module*** de $z = a + \mathrm{i}\,b$ est le réel positif $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Comme $z \times \bar{z} = (a + \mathrm{i}\,b)(a - \mathrm{i}\,b) = a^2 + b^2$ alors le module vaut aussi $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$.



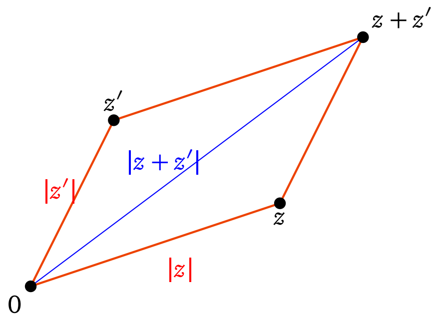


Quelques formules :

- $\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'}$, $\quad \bar{\bar{z}} = z$, $\quad \overline{zz'} = \bar{z}\bar{z'}$
- $z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}$
- $|z|^2 = z \times \bar{z}$, $\quad |\bar{z}| = |z|$, $\quad \left|zz'\right| = |z||z'|$
- $|z| = 0 \iff z = 0$

Proposition 2 (L'inégalité triangulaire).

$$\boxed{\left|z+z'\right| \leqslant |z| + \left|z'\right|}$$



Avant de faire la preuve voici deux remarques utiles. Soit $z = a + \mathrm{i}\,b \in \mathbb{C}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$:

- $|\operatorname{Re}(z)| \leqslant |z|$ (et aussi $|\operatorname{Im}(z)| \leqslant |z|$). Cela vient du fait que $|a| \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$. Noter que pour un réel $|a|$ est à la fois le module et la valeur absolue.
- $\boxed{z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)}$ et $z - \bar{z} = 2\,\mathrm{i}\operatorname{Im}(z)$. Preuve : $z + \bar{z} = (a+\mathrm{i}\,b) + (a - \mathrm{i}\,b) = 2a = 2\operatorname{Re}(z)$.

Démonstration. Pour la preuve on calcule $|z+z'|^2$:

$$\begin{aligned} |z+z'|^2 &= \left(z+z'\right)\overline{(z+z')} = z\bar{z} + z'\bar{z'} + z\bar{z'} + z'\bar{z} = |z|^2 + |z'|^2 + 2\operatorname{Re}(z'\bar{z}) \\ &\leqslant |z|^2 + |z'|^2 + 2|z'\bar{z}| \leqslant |z|^2 + |z'|^2 + 2|zz'| \leqslant (|z| + |z'|)^2 \end{aligned}$$

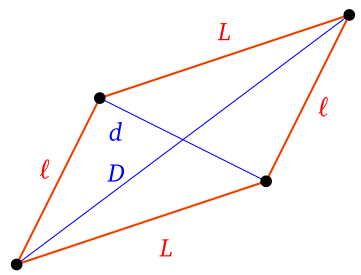
□

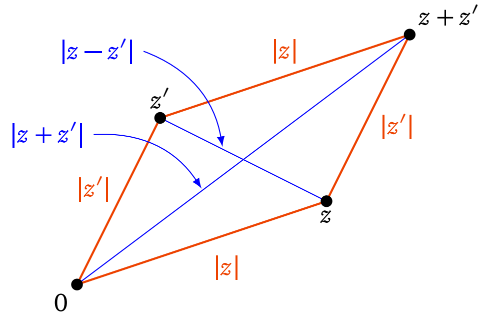
Exemple 1.

Dans un parallélogramme, la somme des carrés des diagonales égale la somme des carrés des côtés.

Si les longueurs des côtés sont notées L et ℓ et les longueurs des diagonales sont D et d alors il s'agit de montrer l'égalité

$$D^2 + d^2 = 2\ell^2 + 2L^2.$$





Démonstration. Cela devient simple si l'on considère que notre parallélogramme a pour sommets 0, z, z' et le dernier sommet est donc $z+z'$. La longueur du grand côté est ici $|z|$, celle du petit côté est $|z'|$. La longueur de la grande diagonale est $|z+z'|$. Enfin il faut se convaincre que la longueur de la petite diagonale est $|z-z'|$.

$$\begin{aligned}
D^2+d^2=\left|z+z'\right|^2+\left|z-z'\right|^2 &= \left(z+z'\right)\overline{\left(z+z'\right)}+\left(z-z'\right)\overline{\left(z-z'\right)}\\
&= z\bar{z}+z\overline{z'}+z'\bar{z}+z'\overline{z'}+z\bar{z}-z\overline{z'}-z'\bar{z}+z'\overline{z'}\\
&= 2z\bar{z}+2z'\overline{z'}=2|z|^2+2\left|z'\right|^2\\
&= 2\ell^2+2L^2
\end{aligned}$$

□

Mini-exercices.

1. Calculer $1-2\mathrm{i}+\frac{\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}$.
2. Écrire sous la forme $a+\mathrm{i}\,b$ les nombres complexes $(1+\mathrm{i})^2$, $(1+\mathrm{i})^3$, $(1+\mathrm{i})^4$, $(1+\mathrm{i})^8$.
3. En déduire $1+(1+\mathrm{i})+(1+\mathrm{i})^2+\cdots+(1+\mathrm{i})^7$.
4. Soit $z\in\mathbb{C}$ tel que $|1+\mathrm{i}z|=|1-\mathrm{i}z|$, montrer que $z\in\mathbb{R}$.
5. Montrer que si $|\mathrm{Re}\,z|\leqslant|\mathrm{Re}\,z'|$ et $|\mathrm{Im}\,z|\leqslant|\mathrm{Im}\,z'|$ alors $|z|\leqslant|z'|$, mais que la réciproque est fausse.
6. Montrer que $1/\bar{z}=z/|z|^2$ (pour $z\neq0$).

2. Racines carrées, équation du second degré

2.1. Racines carrées d'un nombre complexe

Pour $z \in \mathbb{C}$, une ***racine carrée*** est un nombre complexe ω tel que $\omega^2 = z$.
Par exemple si $x \in \mathbb{R}_+$, on connaît deux racines carrées : $\sqrt{x}, -\sqrt{x}$. Autre exemple : les racines carrées de -1 sont i et $-\mathrm{i}$.

Proposition 3.
Soit z un nombre complexe, alors z admet deux racines carrées, ω et $-\omega$.

Attention ! Contrairement au cas réel, il n'y a pas de façon privilégiée de choisir une racine plutôt que l'autre, donc pas de fonction racine. On ne dira donc jamais « soit ω la racine de z ».
Si $z \neq 0$ ces deux racines carrées sont distinctes. Si $z = 0$ alors $\omega = 0$ est une racine double.
Pour $z = a + \mathrm{i}\, b$ nous allons calculer ω et $-\omega$ en fonction de a et b.

Démonstration. Nous écrivons $\omega = x + \mathrm{i}\, y$, nous cherchons x, y tels que $\omega^2 = z$.

$$\begin{aligned} \omega^2 = z &\iff (x + \mathrm{i}\, y)^2 = a + \mathrm{i}\, b \\ &\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = a & \text{en identifiant parties} \\ 2xy = b & \text{et parties imaginaires.} \end{cases} \end{aligned}$$

Petite astuce ici : nous rajoutons l'équation $|\omega|^2 = |z|$ (qui se déduit bien sûr de $\omega^2 = z$) qui s'écrit aussi $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$. Nous obtenons des systèmes équivalents aux précédents :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases} \iff \begin{cases} 2x^2 = \sqrt{a^2 + b^2} + a \\ 2y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} - a \\ 2xy = b \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} + a} \\ y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} - a} \\ 2xy = b \end{cases}$$

Discutons suivant le signe du réel b. Si $b \geqslant 0$, x et y sont de même signe ou nuls (car $2xy = b \geqslant 0$) donc

$$\omega = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} + a} + \mathrm{i} \sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} - a} \right),$$

et si $b \leqslant 0$

$$\omega = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} + a} - \mathrm{i} \sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} - a} \right).$$

En particulier si $b = 0$ le résultat dépend du signe de a, si $a \geqslant 0$, $\sqrt{a^2} = a$ et par conséquent $\omega = \pm \sqrt{a}$, tandis que si $a < 0$, $\sqrt{a^2} = -a$ et donc $\omega = \pm \mathrm{i} \sqrt{-a} = \pm \mathrm{i} \sqrt{|a|}$. □

Il n'est pas nécessaire d'apprendre ces formules mais il est indispensable de savoir refaire les calculs.

Exemple 2.
Les racines carrées de i sont $+\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \mathrm{i})$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \mathrm{i})$.
En effet :

$$\begin{aligned} \omega^2 = \mathrm{i} &\iff (x + \mathrm{i}\, y)^2 = \mathrm{i} \\ &\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Rajoutons la conditions $|\omega|^2 = |\mathrm{i}|$ pour obtenir le système équivalent au précédent :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x^2 = 1 \\ 2y^2 = 1 \\ 2xy = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 2xy = 1 \end{cases}$$

Les réels x et y sont donc de même signe, nous trouvons bien deux solutions :

$$x+\mathrm{i}\,y = \frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{ou} \quad x+\mathrm{i}\,y = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

2.2. Équation du second degré

Proposition 4.
L'équation du second degré $az^2+bz+c=0$, où $a,b,c\in\mathbb{C}$ et $a\neq 0$, possède deux solutions $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ éventuellement confondues.
Soit $\Delta = b^2-4ac$ le discriminant et $\delta\in\mathbb{C}$ une racine carrée de Δ. Alors les solutions sont

$$\boxed{z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}.}$$

Et si $\Delta=0$ alors la solution $z=z_1=z_2=-b/2a$ est unique (elle est dite double). Si on s'autorisait à écrire $\delta=\sqrt{\Delta}$, on obtiendrait la même formule que celle que vous connaissez lorsque a,b,c sont réels.

Exemple 3.

- $z^2+z+1=0$, $\Delta=-3$, $\delta=\mathrm{i}\sqrt{3}$, les solutions sont $z=\dfrac{-1\pm\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.
- $z^2+z+\frac{1-\mathrm{i}}{4}=0$, $\Delta=\mathrm{i}$, $\delta=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})$, les solutions sont $z=\dfrac{-1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})}{2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{4}(1+\mathrm{i})$.

On retrouve aussi le résultat bien connu pour le cas des équations à coefficients réels :

Corollaire 1.
Si les coefficients a,b,c sont réels alors $\Delta\in\mathbb{R}$ et les solutions sont de trois types :

- *si $\Delta=0$, la racine double est réelle et vaut $-\dfrac{b}{2a}$,*
- *si $\Delta>0$, on a deux solutions réelles $\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$,*
- *si $\Delta<0$, on a deux solutions complexes, mais non réelles, $\dfrac{-b\pm\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$.*

Démonstration. On écrit la factorisation

$$\begin{aligned}
az^2+bz+c &= a\left(z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a}\right) = a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)\\
&= a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right) = a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\delta^2}{4a^2}\right)\\
&= a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)-\frac{\delta}{2a}\right)\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)+\frac{\delta}{2a}\right)\\
&= a\left(z-\frac{-b+\delta}{2a}\right)\left(z-\frac{-b-\delta}{2a}\right) = a\,(z-z_1)(z-z_2)
\end{aligned}$$

Donc le binôme s'annule si et seulement si $z=z_1$ ou $z=z_2$. □

2.3. Théorème fondamental de l'algèbre

Théorème 1 (d'Alembert–Gauss).
Soit $P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$ un polynôme à coefficients complexes et de degré n. Alors l'équation $P(z)=0$ admet exactement n solutions complexes comptées avec leur multiplicité.
En d'autres termes il existe des nombres complexes $z_1,\ldots,z_n$ (dont certains sont éventuellement

confondus) tels que

$$P(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n).$$

Nous admettons ce théorème.

Mini-exercices.

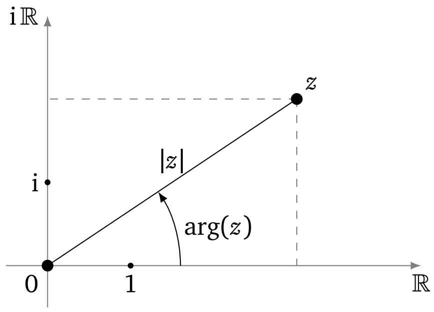
1. Calculer les racines carrées de $-\mathrm{i}$, $3 - 4\,\mathrm{i}$.
2. Résoudre les équations : $z^2 + z - 1 = 0$, $2z^2 + (-10 - 10\,\mathrm{i})z + 24 - 10\,\mathrm{i} = 0$.
3. Résoudre l'équation $z^2 + (\mathrm{i} - \sqrt{2})z - \mathrm{i}\sqrt{2}$, puis l'équation $Z^4 + (\mathrm{i} - \sqrt{2})Z^2 - \mathrm{i}\sqrt{2}$.
4. Montrer que si $P(z) = z^2 + bz + c$ possède pour racines $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ alors $z_1 + z_2 = -b$ et $z_1 \cdot z_2 = c$.
5. Trouver les paires de nombres dont la somme vaut i et le produit 1.
6. Soit $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$ avec $a_i \in \mathbb{R}$ pour tout i. Montrer que si z est racine de P alors $\bar{z}$ aussi.

3. Argument et trigonométrie

3.1. Argument

Si $z = x + iy$ est de module 1, alors $x^2 + y^2 = |z|^2 = 1$. Par conséquent le point (x, y) est sur le cercle unité du plan, et son abscisse x est notée $\cos\theta$, son ordonnée y est $\sin\theta$, où θ est (une mesure de) l'angle entre l'axe réel et z. Plus généralement, si $z \neq 0$, $z/|z|$ est de module 1, et cela amène à :

Définition 2.
Pour tout $z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, un nombre $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = |z|(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ est appelé un ***argument*** de z et noté $\theta = \arg(z)$.



Cet argument est défini modulo 2π. On peut imposer à cet argument d'être unique si on rajoute la condition $\theta \in]-\pi, +\pi]$.

Remarque.

$$\theta \equiv \theta' \pmod{2\pi} \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \theta' + 2k\pi \iff \begin{cases} \cos\theta = \cos\theta' \\ \sin\theta = \sin\theta' \end{cases}$$

Proposition 5.
L'argument satisfait les propriétés suivantes :
- $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') \pmod{2\pi}$
- $\arg(z^n) \equiv n\arg(z) \pmod{2\pi}$
- $\arg(1/z) \equiv -\arg(z) \pmod{2\pi}$
- $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg z \pmod{2\pi}$

Démonstration.

$$\begin{aligned} zz' &= |z|(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)\left|z'\right|\left(\cos\theta' + \mathrm{i}\sin\theta'\right) \\ &= \left|zz'\right|\left(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + \mathrm{i}\left(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta'\right)\right) \\ &= \left|zz'\right|\left(\cos\left(\theta+\theta'\right) + \mathrm{i}\sin\left(\theta+\theta'\right)\right) \end{aligned}$$

donc $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') \pmod{2\pi}$. On en déduit les deux autres propriétés, dont la deuxième par récurrence. □

3.2. Formule de Moivre, notation exponentielle

La ***formule de Moivre*** est :

$$\boxed{(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)}$$

Démonstration. Par récurrence, on montre que

$$\begin{aligned}(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n &= (\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^{n-1}\times(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)\\ &= (\cos((n-1)\theta)+\mathrm{i}\sin((n-1)\theta))\times(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)\\ &= (\cos((n-1)\theta)\cos\theta-\sin((n-1)\theta)\sin\theta)\\ &\quad +\mathrm{i}(\cos((n-1)\theta)\sin\theta+\sin((n-1)\theta)\cos\theta)\\ &= \cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta\end{aligned}$$

□

Nous définissons la ***notation exponentielle*** par

$$\boxed{e^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta}$$

et donc tout nombre complexe s'écrit

$$\boxed{z=\rho e^{\mathrm{i}\theta}}$$

où $\rho=|z|$ est le module et $\theta=\arg(z)$ est un argument.

Avec la notation exponentielle, on peut écrire pour $z=\rho e^{\mathrm{i}\theta}$ et $z'=\rho' e^{\mathrm{i}\theta'}$

$$\begin{cases} zz'=\rho\rho' e^{\mathrm{i}\theta}e^{\mathrm{i}\theta'}=\rho\rho' e^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}\\ z^n=\left(\rho e^{\mathrm{i}\theta}\right)^n=\rho^n\left(e^{\mathrm{i}\theta}\right)^n=\rho^n e^{\mathrm{i}n\theta}\\ 1/z=1/\left(\rho e^{\mathrm{i}\theta}\right)=\frac{1}{\rho}e^{-\mathrm{i}\theta}\\ \bar{z}=\rho e^{-\mathrm{i}\theta}\end{cases}$$

La formule de Moivre se réduit à l'égalité : $\boxed{\left(e^{\mathrm{i}\theta}\right)^n=e^{\mathrm{i}n\theta}}$.

Et nous avons aussi : $\rho e^{\mathrm{i}\theta}=\rho' e^{\mathrm{i}\theta'}$ (avec $\rho,\rho'>0$) si et seulement si $\rho=\rho'$ et $\theta\equiv\theta' \pmod{2\pi}$.

3.3. Racines n-ième

Définition 3.
Pour $z\in\mathbb{C}$ et $n\in\mathbb{N}$, une ***racine n-ième*** est un nombre $\omega\in\mathbb{C}$ tel que $\omega^n=z$.

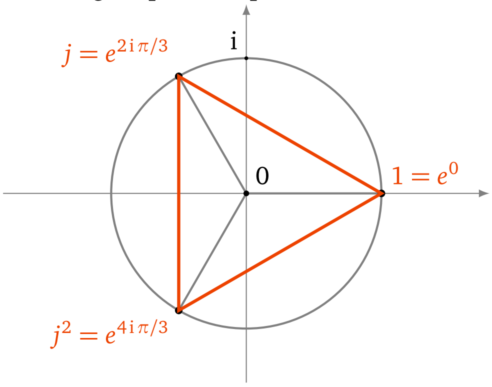
Proposition 6.
Il y a n racines n-ièmes $\omega_0,\omega_1,\dots,\omega_{n-1}$ de $z=\rho e^{\mathrm{i}\theta}$, ce sont :

$$\boxed{\omega_k=\rho^{1/n}e^{\frac{\mathrm{i}\theta+2\mathrm{i}k\pi}{n}},\quad k=0,1,\dots,n-1}$$

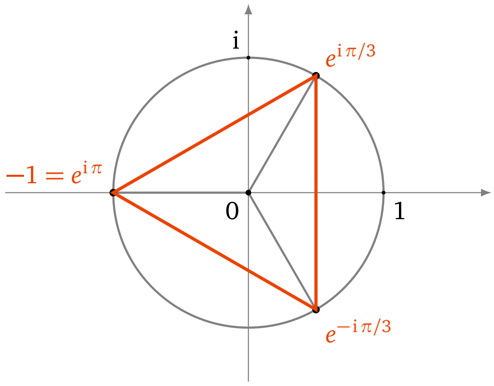
Démonstration. Écrivons $z=\rho e^{\mathrm{i}\theta}$ et cherchons ω sous la forme $\omega=re^{\mathrm{i}t}$ tel que $z=\omega^n$. Nous obtenons donc $\rho e^{\mathrm{i}\theta}=\omega^n=\left(re^{\mathrm{i}t}\right)^n=r^n e^{\mathrm{i}nt}$. Prenons tout d'abord le module : $\rho=\left|\rho e^{\mathrm{i}\theta}\right|=\left|r^n e^{\mathrm{i}nt}\right|=r^n$ et donc $r=\rho^{1/n}$ (il s'agit ici de nombres réels). Pour les arguments nous avons $e^{\mathrm{i}nt}=e^{\mathrm{i}\theta}$ et donc $nt\equiv\theta \pmod{2\pi}$ (n'oubliez surtout pas le modulo 2π !). Ainsi on résout $nt=\theta+2k\pi$ (pour $k\in\mathbb{Z}$) et donc $t=\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}$. Les solutions de l'équation $\omega^n=z$ sont donc les $\omega_k=\rho^{1/n}e^{\frac{\mathrm{i}\theta+2\mathrm{i}k\pi}{n}}$. Mais en fait il n'y a que n solutions distinctes car $\omega_n=\omega_0$, $\omega_{n+1}=\omega_1$, … Ainsi les n solutions sont $\omega_0,\omega_1,\dots,\omega_{n-1}$.

□

Par exemple pour $z = 1$, on obtient les n ***racines n-ièmes de l'unité*** $e^{2ik\pi/n}$, $k = 0, \dots, n-1$ qui forment un groupe multiplicatif.

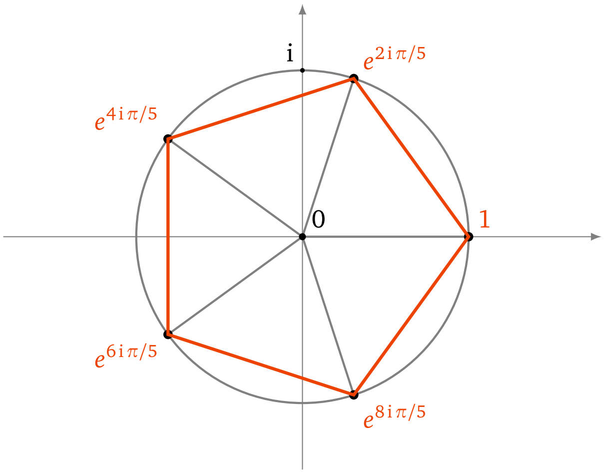


Racine 3-ième de l'unité ($z = 1$, $n = 3$)



Racine 3-ième de -1 ($z = -1$, $n = 3$)

Les racines 5-ième de l'unité ($z = 1$, $n = 5$) forment un pentagone régulier :



3.4. Applications à la trigonométrie

Voici les ***formules d'Euler***, pour $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad , \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$$

Ces formules s'obtiennent facilement en utilisant la définition de la notation exponentielle. Nous les appliquons dans la suite à deux problèmes : le développement et la linéarisation.

Développement. On exprime $\sin n\theta$ ou $\cos n\theta$ en fonction des puissances de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Méthode : on utilise la formule de Moivre pour écrire $\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$ que l'on développe avec la formule du binôme de Newton.

Exemple 4.

$$\begin{aligned}
\cos 3\theta + i\sin 3\theta &= (\cos\theta + i\sin\theta)^3 \\
&= \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta \\
&= \left(\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta\right) + i\left(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta\right)
\end{aligned}$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, on déduit que

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta \qquad \text{et} \qquad \sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta.$$

Linéarisation. On exprime $\cos^n\theta$ ou $\sin^n\theta$ en fonction des $\cos k\theta$ et $\sin k\theta$ pour k allant de 0 à n.

Méthode : avec la formule d'Euler on écrit $\sin^n\theta = \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^n$. On développe à l'aide du binôme de Newton puis on regroupe les termes par paires conjuguées.

Exemple 5.

$$\begin{aligned}
\sin^3\theta &= \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^3 \\
&= \frac{1}{-8i}\left((e^{i\theta})^3 - 3(e^{i\theta})^2 e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}(e^{-i\theta})^2 - (e^{-i\theta})^3\right) \\
&= \frac{1}{-8i}\left(e^{3i\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{-3i\theta}\right) \\
&= -\frac{1}{4}\left(\frac{e^{3i\theta}-e^{-3i\theta}}{2i} - 3\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right) \\
&= -\frac{\sin 3\theta}{4} + \frac{3\sin\theta}{4}
\end{aligned}$$

Mini-exercices.

1. Mettre les nombres suivants sont la forme module-argument (avec la notation exponentielle) : 1, i, -1, $-i$, $3i$, $1+i$, $\sqrt{3}-i$, $\overline{\sqrt{3}-i}$, $\frac{1}{\sqrt{3}-i}$, $(\sqrt{3}-i)^{20xx}$ où $20xx$ est l'année en cours.
2. Calculer les racines 5-ième de i.
3. Calculer les racines carrées de $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$ de deux façons différentes. En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.
4. Donner sans calcul la valeur de $\omega_0+\omega_1+\cdots+\omega_{n-1}$, où les ω_i sont les racines n-ième de 1.
5. Développer $\cos(4\theta)$; linéariser $\cos^4\theta$; calculer une primitive de $\theta \mapsto \cos^4\theta$.

4. Nombres complexes et géométrie

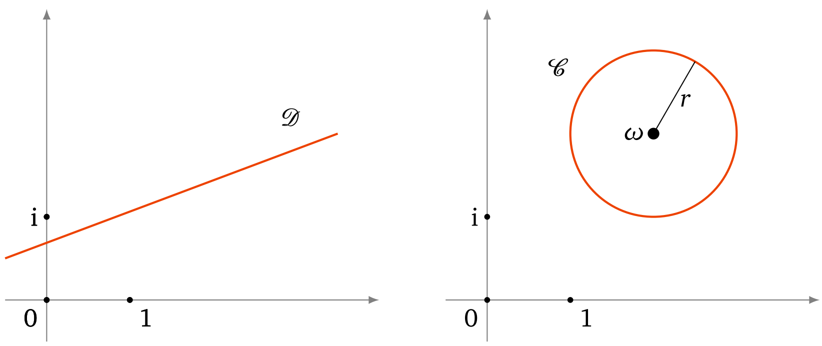
On associe bijectivement à tout point M du plan affine $\mathbb{R}^2$ de coordonnées (x, y), le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}\, y$ appelé son ***affixe***.

4.1. Équation complexe d'une droite

Soit
$$ax + by = c$$
l'équation réelle d'une droite $\mathscr{D}$: a, b, c sont des nombres réels (a et b n'étant pas tous les deux nuls) d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Écrivons $z = x + \mathrm{i}\, y \in \mathbb{C}$, alors
$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2\mathrm{i}},$$
donc $\mathscr{D}$ a aussi pour équation $a(z + \bar{z}) - \mathrm{i}\, b(z - \bar{z}) = 2c$ ou encore $(a - \mathrm{i}\, b)z + (a + \mathrm{i}\, b)\bar{z} = 2c$. Posons $\omega = a + \mathrm{i}\, b \in \mathbb{C}^*$ et $k = 2c \in \mathbb{R}$ alors l'équation complexe d'une droite est :

$$\boxed{\bar{\omega} z + \omega \bar{z} = k}$$

où $\omega \in \mathbb{C}^*$ et $k \in \mathbb{R}$.



4.2. Équation complexe d'un cercle

Soit $\mathscr{C}(\Omega, r)$ le cercle de centre Ω et de rayon r. C'est l'ensemble des points M tel que $\operatorname{dist}(\Omega, M) = r$. Si l'on note ω l'affixe de Ω et z l'affixe de M. Nous obtenons :
$$\operatorname{dist}(\Omega, M) = r \iff |z - \omega| = r \iff |z - \omega|^2 = r^2 \iff (z - \omega)\overline{(z - \omega)} = r^2$$
et en développant nous trouvons que l'équation complexe du cercle centré en un point d'affixe ω et de rayon r est :

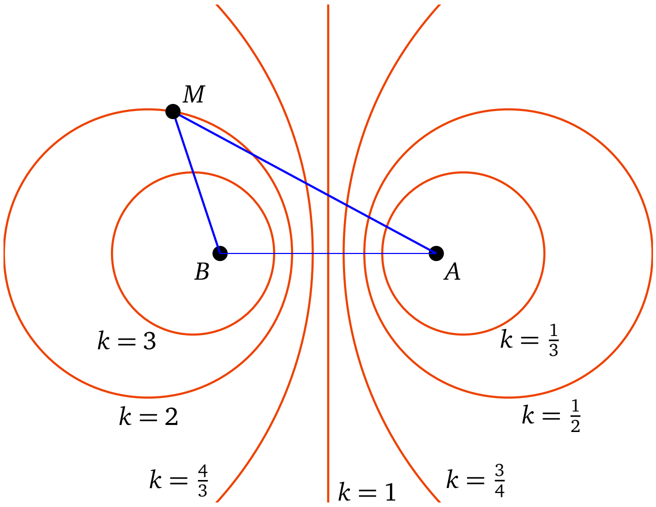
$$\boxed{z\bar{z} - \bar{\omega} z - \omega \bar{z} = r^2 - |\omega|^2}$$

où $\omega \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}$.

4.3. Équation $\frac{|z-a|}{|z-b|} = k$

Proposition 7.
Soit A, B deux points du plan et $k \in \mathbb{R}_+$. L'ensemble des points M tel que $\frac{MA}{MB} = k$ est
- *une droite qui est la médiatrice de $[AB]$, si $k = 1$,*
- *un cercle, sinon.*

Exemple 6.
Prenons A le point d'affixe $+1$,B le point d'affixe -1. Voici les figures pour plusieurs valeurs de k. Par exemple pour $k=2$ le point M dessiné vérifie bien $MA=2MB$.



Démonstration. Si les affixes de A,B,M sont respectivement a,b,z, cela revient à résoudre l'équation $\frac{|z-a|}{|z-b|}=k$.

$$\begin{aligned}\frac{|z-a|}{|z-b|}=k &\iff |z-a|^2=k^2|z-b|^2\\ &\iff (z-a)\overline{(z-a)}=k^2(z-b)\overline{(z-b)}\\ &\iff (1-k^2)z\bar{z}-z(\bar{a}-k^2\bar{b})-\bar{z}(a-k^2b)+|a|^2-k^2|b|^2=0\end{aligned}$$

Donc si $k=1$, on pose $\omega=a-k^2b$ et l'équation obtenue $z\bar{\omega}+\bar{z}\omega=|a|^2-k^2|b|^2$ est bien celle d'une droite. Et bien sûr l'ensemble des points qui vérifient $MA=MB$ est la médiatrice de $[AB]$. Si $k\neq 1$ on pose $\omega=\frac{a-k^2b}{1-k^2}$ alors l'équation obtenue est $z\bar{z}-z\bar{\omega}-\bar{z}\omega=\frac{-|a|^2+k^2|b|^2}{1-k^2}$. C'est l'équation d'un cercle de centre ω et de rayon r satisfaisant $r^2-|\omega|^2=\frac{-|a|^2+k^2|b|^2}{1-k^2}$, soit $r^2=\frac{|a-k^2b|^2}{(1-k^2)^2}+\frac{-|a|^2+k^2|b|^2}{1-k^2}$. □

Ces calculs se refont au cas par cas, il n'est pas nécessaire d'apprendre les formules.

Mini-exercices.

1. Calculer l'équation complexe de la droite passant par 1 et i.
2. Calculer l'équation complexe du cercle de centre $1+2\,\mathrm{i}$ passant par i.
3. Calculer l'équation complexe des solutions de $\dfrac{|z-\mathrm{i}|}{|z-1|}=1$, puis dessiner les solutions.
4. Même question avec $\dfrac{|z-\mathrm{i}|}{|z-1|}=2$.

Chapitre

3

Les suites

Introduction

L'étude des suites numériques a pour objet la compréhension de l'évolution de séquences de nombres (réels, complexes ...). Ceci permet de modéliser de nombreux phénomènes de la vie quotidienne. Supposons par exemple que l'on place une somme S à un taux annuel de 10%. Si S_n représente la somme que l'on obtiendra après n années, on a

$$S_0 = S \quad S_1 = S \times 1,1 \quad \dots \quad S_n = S \times (1,1)^n \ .$$

Au bout de $n = 10$ ans, on possédera donc $S_{10} = S \times (1,1)^{10} \approx S \times 2,59$: la somme de départ avec les intérêts cumulés.

1. Définitions

1.1. Définition d'une suite

Définition 1.

- Une ***suite*** est une application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u(n)$ par u_n et on l'appelle n-ème ***terme*** ou ***terme général*** de la suite.

La suite est notée u, ou plus souvent $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplement (u_n). Il arrive fréquemment que l'on considère des suites définies à partir d'un certain entier naturel n_0 plus grand que 0, on note alors $(u_n)_{n\geqslant n_0}$.

Exemple 1.

- $(\sqrt{n})_{n\geqslant 0}$ est la suite de termes : 0, 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$,...
- $((-1)^n)_{n\geqslant 0}$ est la suite qui alterne $+1, -1, +1, -1, \dots$
- La suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ de l'introduction définie par $S_n = S \times (1,1)^n$,
- $(F_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ et la relation $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour $n \in \mathbb{N}$ (suite de Fibonacci). Les premiers termes sont 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... Chaque terme est la somme des deux précédents.
- $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\geqslant 1}$. Les premiers termes sont 1, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{16}$, ...

1.2. Suite majorée, minorée, bornée

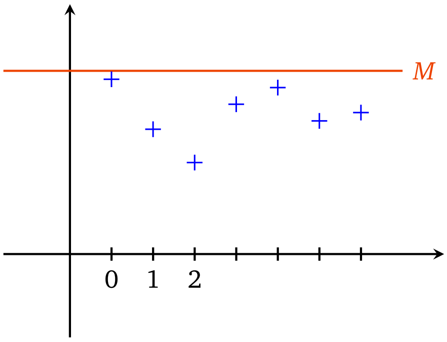
Définition 2.

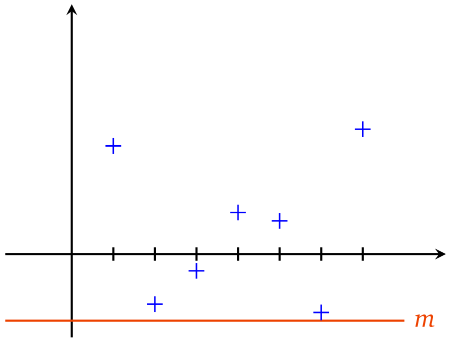
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ***majorée*** si $\quad \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant M$.

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ***minorée*** si $\quad \exists m \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geqslant m.$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ***bornée*** si elle est majorée et minorée, ce qui revient à dire :

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| \leqslant M.$$



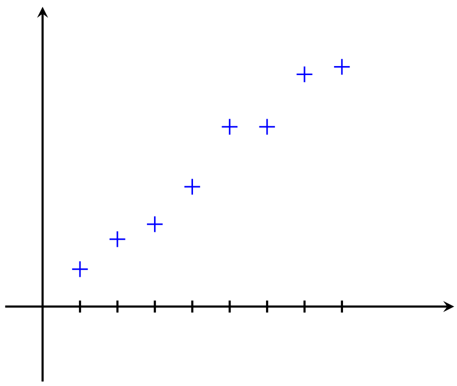


1.3. Suite croissante, décroissante

Définition 3.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ***croissante*** si $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \geqslant u_n.$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ***strictement croissante*** si $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} > u_n.$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ***décroissante*** si $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \leqslant u_n.$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ***strictement décroissante*** si $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} < u_n.$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ***monotone*** si elle est croissante ou décroissante.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ***strictement monotone*** si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Voici un exemple d'une suite croissante (mais pas strictement croissante) :

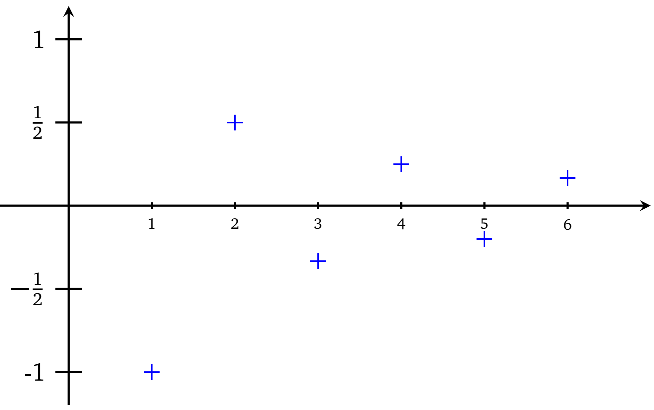


Remarque.

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n \geqslant 0.$
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à termes strictement positifs, elle est croissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1.$

Exemple 2.

- La suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ de l'introduction est strictement croissante car $S_{n+1}/S_n = 1,1 > 1.$
- La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $u_n = (-1)^n/n$ pour $n \geqslant 1$, n'est ni croissante ni décroissante. Elle est majorée par $1/2$ (borne atteinte en $n = 2$), minorée par -1 (borne atteinte en $n = 1$).



- La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ est une suite strictement décroissante. Elle est majorée par 1 (borne atteinte pour $n=1$), elle est minorée par 0 mais cette valeur n'est jamais atteinte.

Mini-exercices.

1. La suite $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle monotone ? Est-elle bornée ?
2. La suite $\left(\frac{n\sin(n!)}{1+n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle bornée ?
3. Réécrire les phrases suivantes en une phrase mathématique. Écrire ensuite la négation mathématique de chacune des phrases. (a) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 7. (b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. (c) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive à partir d'un certain rang. (d) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas strictement croissante.
4. Est-il vrai qu'une suite croissante est minorée ? Majorée ?
5. Soit $x>0$ un réel. Montrer que la suite $\left(\frac{x^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir d'un certain rang.

2. Limites

2.1. Introduction

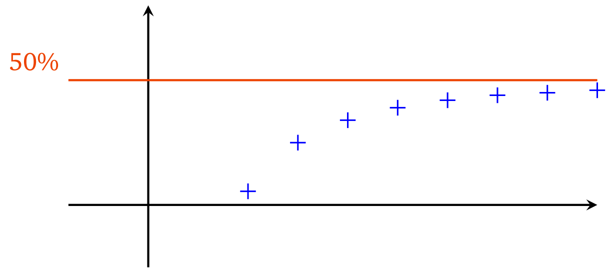
Pour un trajet au prix normal de 20 euros on achète une carte d'abonnement de train à 50 euros et on obtient chaque billet à 10 euros. La publicité affirme « 50% de réduction ». Qu'en pensez-vous ? Pour modéliser la situation en termes de suites, on pose pour un entier $n \geqslant 1$:

$$u_n = 20n$$
$$v_n = 10n + 50$$

u_n est le prix payé au bout de n achats au tarif plein, et v_n celui au tarif réduit, y compris le prix de l'abonnement. La réduction est donc, en pourcentage :

$$1 - \frac{v_n}{u_n} = \frac{u_n - v_n}{u_n} = \frac{10n - 50}{20n} = 0,5 - \frac{5}{2n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0,5$$

Il faut donc une infinité de trajets pour arriver à 50% de réduction !



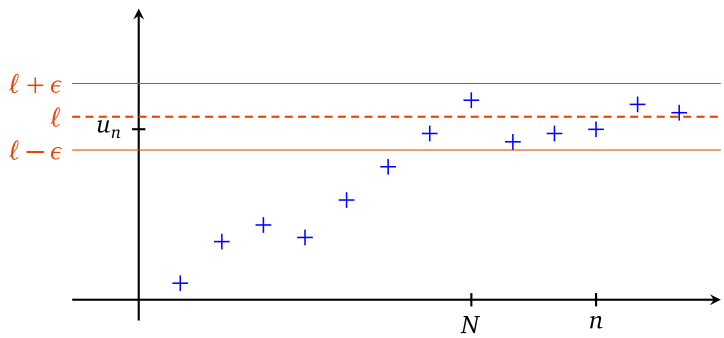
2.2. Limite finie, limite infinie

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

Définition 4.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour ***limite*** $\ell \in \mathbb{R}$ si : pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier naturel N tel que si $n \geqslant N$ alors $|u_n - \ell| \leqslant \epsilon$:

$$\boxed{\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad (n \geqslant N \implies |u_n - \ell| \leqslant \epsilon)}$$

On dit aussi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***tend vers*** ℓ. Autrement dit : u_n est proche d'aussi près que l'on veut de ℓ, à partir d'un certain rang.



Définition 5.

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***tend vers*** $+\infty$ si :

$$\forall A > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad (n \geqslant N \implies u_n \geqslant A)$$

2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***tend vers*** $-\infty$ si :
$$\forall A>0 \quad \exists N\in\mathbb{N} \quad \forall n\in\mathbb{N} \qquad (n\geqslant N \implies u_n\leqslant -A)$$

Remarque.

1. On note $\lim_{n\to+\infty} u_n=\ell$ ou parfois $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, et de même pour une limite $\pm\infty$.
2. $\lim_{n\to+\infty} u_n=-\infty \iff \lim_{n\to+\infty} -u_n=+\infty$.
3. On raccourcit souvent la phrase logique en :
$$\forall\epsilon>0 \quad \exists N\in\mathbb{N} \qquad (n\geqslant N \implies |u_n-\ell|\leqslant\epsilon).$$
Noter que N dépend de ϵ et qu'on ne peut pas échanger l'ordre du « pour tout » et du « il existe ».
4. L'inégalité $|u_n-\ell|\leqslant\epsilon$ signifie $\ell-\epsilon\leqslant u_n\leqslant\ell+\epsilon$. On aurait aussi pu définir la limite par la phrase : $\forall\epsilon>0 \quad \exists N\in\mathbb{N} \quad (n\geqslant N \implies |u_n-\ell|<\epsilon)$, où l'on a remplacé la dernière inégalité large par une inégalité stricte.

Définition 6.
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ***convergente*** si elle admet une limite ***finie***. Elle est ***divergente*** sinon (c'est-à-dire soit la suite tend vers $\pm\infty$, soit elle n'admet pas de limite).

On va pouvoir parler de ***la*** limite, si elle existe, car il y a unicité de la limite :

Proposition 1.
Si une suite est convergente, sa limite est unique.

Démonstration. On procède par l'absurde. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente ayant deux limites $\ell\neq\ell'$. Choisissons $\epsilon>0$ tel que $\epsilon<\frac{|\ell-\ell'|}{2}$.
Comme $\lim_{n\to+\infty} u_n=\ell$, il existe N_1 tel que $n\geqslant N_1$ implique $|u_n-\ell|<\epsilon$.
De même $\lim_{n\to+\infty} u_n=\ell'$, il existe N_2 tel que $n\geqslant N_2$ implique $|u_n-\ell'|<\epsilon$.
Notons $N=\max(N_1,N_2)$, on a alors pour ce N :
$$|u_N-\ell|<\epsilon \qquad \text{et} \qquad |u_N-\ell'|<\epsilon$$
Donc $|\ell-\ell'|=|\ell-u_N+u_N-\ell'|\leqslant|\ell-u_N|+|u_N-\ell'|$ d'après l'inégalité triangulaire. On en tire $|\ell-\ell'|\leqslant\epsilon+\epsilon=2\epsilon<|\ell-\ell'|$. On vient d'aboutir à l'inégalité $|\ell-\ell'|<|\ell-\ell'|$ qui est impossible. Bilan : notre hypothèse de départ est fausse et donc $\ell=\ell'$. □

2.3. Propriétés des limites

Proposition 2.

1. $\lim_{n\to+\infty} u_n=\ell \iff \lim_{n\to+\infty}(u_n-\ell)=0 \iff \lim_{n\to+\infty}|u_n-\ell|=0$,
2. $\lim_{n\to+\infty} u_n=\ell \implies \lim_{n\to+\infty}|u_n|=|\ell|$.

Démonstration. Cela résulte directement de la définition. □

Proposition 3 (Opérations sur les limites)**.**
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes.

1. *Si $\lim_{n\to+\infty} u_n=\ell$, où $\ell\in\mathbb{R}$, alors pour $\lambda\in\mathbb{R}$ on a $\lim_{n\to+\infty}\lambda u_n=\lambda\ell$.*

2. *Si* $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ *et* $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell'$, *où* $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$, *alors*
$$\lim_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = \ell + \ell'$$
$$\lim_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) = \ell \times \ell'$$
3. *Si* $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ *où* $\ell \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ *alors* $u_n \neq 0$ *pour* n *assez grand et* $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\ell}$.

Nous ferons la preuve dans la section suivante.
Nous utilisons continuellement ces propriétés, le plus souvent sans nous en rendre compte.

Exemple 3.
Si $u_n \to \ell$ avec $\ell \neq \pm 1$, alors
$$u_n(1-3u_n) - \frac{1}{u_n^2-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell(1-3\ell) - \frac{1}{\ell^2-1}.$$

Proposition 4 (Opérations sur les limites infinies)**.**
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites telles que* $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
1. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{v_n} = 0$
2. *Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est minorée alors* $\lim_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = +\infty$.
3. *Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est minorée par un nombre* $\lambda > 0$ *alors* $\lim_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) = +\infty$.
4. *Si* $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ *et* $u_n > 0$ *pour* n *assez grand alors* $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty$.

Exemple 4.
La suite $(\sqrt{n})$ tend vers $+\infty$, donc la suite $(\frac{1}{\sqrt{n}})$ tend vers 0.

2.4. Des preuves !

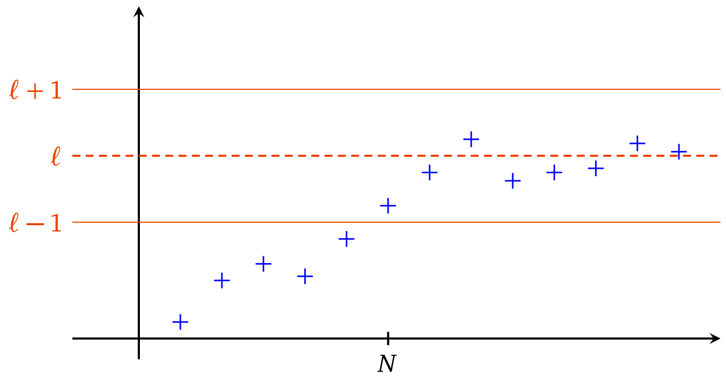
Nous n'allons pas tout prouver mais seulement quelques résultats importants. Les autres se démontrent de manière tout à fait semblable.
Commençons par prouver un résultat assez facile (le premier point de la proposition 4) :
$$\text{« } \textit{Si} \quad \lim u_n = +\infty \quad \textit{alors} \quad \lim \frac{1}{u_n} = 0. \text{ »}$$

Démonstration. Fixons $\epsilon > 0$. Comme $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, il existe un entier naturel N tel que $n \geqslant N$ implique $u_n \geqslant \frac{1}{\epsilon}$. On obtient alors $0 \leqslant \frac{1}{u_n} \leqslant \epsilon$ pour $n \geqslant N$. On a donc montré que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = 0$. □

Afin de prouver que la limite d'un produit est le produit des limites nous aurons besoin d'un peu de travail.

Proposition 5.
Toute suite convergente est bornée.

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers le réel ℓ. En appliquant la définition de limite (définition 4) avec $\epsilon = 1$, on obtient qu'il existe un entier naturel N tel que pour $n \geqslant N$ on ait $|u_n - \ell| \leqslant 1$, et donc pour $n \geqslant N$ on a
$$|u_n| = |\ell + (u_n - \ell)| \leqslant |\ell| + |u_n - \ell| \leqslant |\ell| + 1.$$



Donc si on pose

$$M = \max(|u_0|, |u_1|, \cdots, |u_{N-1}|, |\ell| + 1)$$

on a alors $\forall n \in \mathbb{N}\ \ |u_n| \leqslant M$. ☐

Proposition 6.
Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ alors $\lim_{n\to+\infty}(u_n \times v_n) = 0$.

Exemple 5.
Si $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est la suite donnée par $u_n = \cos(n)$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est celle donnée par $v_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, alors $\lim_{n\to+\infty}(u_n v_n) = 0$.

Démonstration. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, on peut donc trouver un réel $M > 0$ tel que pour tout entier naturel n on ait $|u_n| \leqslant M$. Fixons $\epsilon > 0$. On applique la définition de limite (définition 4) à la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $\epsilon' = \frac{\epsilon}{M}$. Il existe donc un entier naturel N tel que $n \geqslant N$ implique $|v_n| \leqslant \epsilon'$. Mais alors pour $n \geqslant N$ on a :

$$|u_n v_n| = |u_n||v_n| \leqslant M \times \epsilon' = \epsilon.$$

On a bien montré que $\lim_{n\to+\infty}(u_n \times v_n) = 0$. ☐

Prouvons maintenant la formule concernant le produit de deux limites (voir proposition 3).

« *Si* $\quad \lim u_n = \ell \quad$ *et* $\quad \lim v_n = \ell' \quad$ *alors* $\quad \lim u_n v_n = \ell\ell'$. »

Démonstration de la formule concernant le produit de deux limites. Le principe est d'écrire :

$$u_n v_n - \ell\ell' = (u_n - \ell)v_n + \ell(v_n - \ell')$$

D'après la proposition 6, la suite de terme général $\ell(v_n - \ell')$ tend vers 0. Par la même proposition il en est de même de la suite de terme général $(u_n - \ell)v_n$, car la suite convergente $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. On conclut que $\lim_{n\to+\infty}(u_n v_n - \ell\ell') = 0$, ce qui équivaut à $\lim_{n\to+\infty} u_n v_n = \ell\ell'$. ☐

2.5. Formes indéterminées

Dans certaines situations, on ne peut rien dire à priori sur la limite, il faut faire une étude au cas par cas.

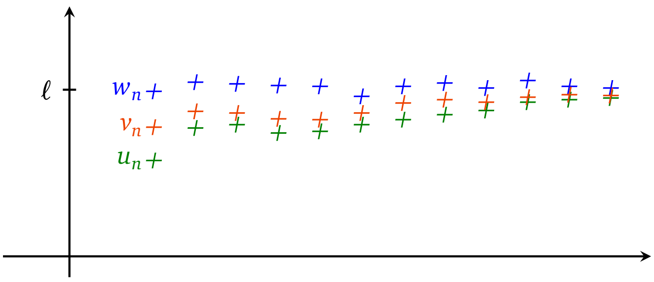
Exemple 6.

1. « $+\infty - \infty$ » Cela signifie que si $u_n \to +\infty$ et $v_n \to -\infty$ il faut faire faire l'étude en fonction de chaque suite pour déterminer $\lim(u_n + v_n)$ comme le prouve les exemples suivants.
$$\lim_{n\to+\infty} (e^n - \ln(n)) = +\infty$$
$$\lim_{n\to+\infty} \left(n - n^2\right) = -\infty$$
$$\lim_{n\to+\infty} \left(\left(n + \frac{1}{n}\right) - n\right) = 0$$
2. « $0 \times \infty$ »
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln n} \times e^n = +\infty$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \times \ln n = 0$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \times (n+1) = 1$$
3. « $\frac{\infty}{\infty}$ », « $\frac{0}{0}$ », « 1^∞ », ...

2.6. Limite et inégalités

Proposition 7.

1. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes telles que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$. Alors*
$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} v_n$$
2. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \geqslant u_n$. Alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.*
3. *Théorème des « gendarmes » : si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont trois suites telles que*
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$$
et $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell = \lim_{n\to+\infty} w_n$, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

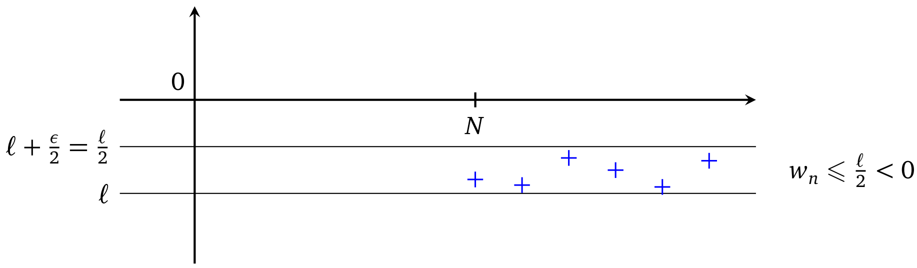


Remarque.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$. Alors $\lim_{n\to+\infty} u_n \geqslant 0$.
2. Attention, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, on ne peut affirmer que la limite est strictement positive mais seulement que $\lim_{n\to+\infty} u_n \geqslant 0$. Par exemple la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $u_n = \frac{1}{n+1}$ est à termes strictement positifs, mais converge vers zéro.

Démonstration de la proposition 7.

1. En posant $w_n = v_n - u_n$, on se ramène à montrer que si une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n \geqslant 0$ et converge, alors $\lim_{n\to+\infty} w_n \geqslant 0$. On procède par l'absurde en supposant que $\ell = \lim_{n\to+\infty} w_n < 0$. En prenant $\epsilon = |\frac{\ell}{2}|$ dans la définition de limite (définition 4), on obtient qu'il existe un entier naturel N tel que $n \geqslant N$ implique $|w_n - \ell| < \epsilon = -\frac{\ell}{2}$. En particulier on a pour $n \geqslant N$ que $w_n < \ell - \frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{2} < 0$, une contradiction.



2. Laissé en exercice.
3. En soustrayant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on se ramène à montrer l'énoncé suivant : si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites telles que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$, alors (u_n) converge et $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Soit $\epsilon > 0$ et N un entier naturel tel que $n \geqslant N$ implique $|v_n| < \epsilon$. Comme $|u_n| = u_n \leqslant v_n = |v_n|$, on a donc : $n \geqslant N$ implique $|u_n| < \epsilon$. On a bien montré que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

$\square$

Exemple 7 (Exemple d'application du théorème des « gendarmes »).
Trouver la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général :

$$u_n = 2 + \frac{(-1)^n}{1+n+n^2}$$

Mini-exercices.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = \frac{2n+1}{n+2}$. En utilisant la définition de la limite montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$. Trouver explicitement un rang à partir duquel $1,999 \leqslant u_n \leqslant 2,001$.
2. Déterminer la limite ℓ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général : $\frac{n+\cos n}{n-\sin n}$ et trouver un entier N tel que si $n \geqslant N$, on ait $|u_n - \ell| \leqslant 10^{-2}$.
3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $(-1)^n e^n$ admet-elle une limite ? Et la suite de terme général $\frac{1}{u_n}$?
4. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ de terme général $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Idem avec $v_n = \frac{\cos n}{\sin n + \ln n}$. Idem avec $w_n = \frac{n!}{n^n}$.

3. Exemples remarquables

3.1. Suite géométrique

Proposition 8 (Suite géométrique).
On fixe un réel a. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général : $u_n = a^n$.

1. *Si $a = 1$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 1$.*
2. *Si $a > 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.*
3. *Si $-1 < a < 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.*
4. *Si $a \leqslant -1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.*

Démonstration.

1. est évident.
2. Écrivons $a = 1 + b$ avec $b > 0$. Alors le binôme de Newton s'écrit $a^n = (1 + b)^n = 1 + nb + \binom{n}{2}b^2 + \cdots + \binom{n}{k}b^k + \cdots + b^n$. Tous les termes sont positifs, donc pour tout entier naturel n on a : $a^n \geqslant 1 + nb$. Or $\lim_{n\to+\infty}(1 + nb) = +\infty$ car $b > 0$. On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty$.
3. Si $a = 0$, le résultat est clair. Sinon, on pose $b = |\frac{1}{a}|$. Alors $b > 1$ et d'après le point précédent $\lim_{n\to+\infty} b^n = +\infty$. Comme pour tout entier naturel n on a : $|a|^n = \frac{1}{b^n}$, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} |a|^n = 0$, et donc aussi $\lim_{n\to+\infty} a^n = 0$.
4. Supposons par l'absurde que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel ℓ. De $a^2 \geqslant 1$, on déduit que pour tout entier naturel n, on a $a^{2n} \geqslant 1$. En passant à la limite, il vient $\ell \geqslant 1$. Comme de plus pour tout entier naturel n on a $a^{2n+1} \leqslant a \leqslant -1$, il vient en passant de nouveau à la limite $\ell \leqslant -1$. Mais comme on a déjà $\ell \geqslant 1$, on obtient une contradiction, et donc (u_n) ne converge pas.

□

3.2. Série géométrique

Proposition 9 (Série géométrique).
Soit a un réel, $a \neq 1$. En notant $\sum_{k=0}^{n} a^k = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n$, on a :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}}$$

Démonstration. En multipliant par $1 - a$ on fait apparaître une somme télescopique (presque tous les termes s'annulent) :

$$(1 - a)\big(1 + a + a^2 + \cdots + a^n\big) = \big(1 + a + a^2 + \cdots + a^n\big) - \big(a + a^2 + \cdots + a^{n+1}\big) = 1 - a^{n+1}.$$

□

Remarque.
Si $a \in]-1, 1[$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de terme général : $u_n = \sum_{k=0}^{n} a^k$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{1-a}$. De manière plus frappante, on peut écrire :

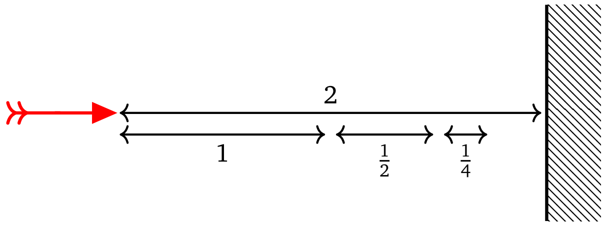
$$1 + a + a^2 + a^3 + \cdots = \frac{1}{1 - a}$$

Enfin, ces formules sont aussi valables si $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Si $a = 1$, alors $1 + a + a^2 + \cdots + a^n = n + 1$.

Exemple 8.
L'exemple précédent avec $a = \frac{1}{2}$ donne

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2.$$

Cette formule était difficilement concevable avant l'avènement du calcul infinitésimal et a été popularisée sous le nom du ***paradoxe de Zénon***. On tire une flèche à 2 mètres d'une cible. Elle met un certain laps de temps pour parcourir la moitié de la distance, à savoir un mètre. Puis il lui faut encore du temps pour parcourir la moitié de la distance restante, et de nouveau un certain temps pour la moitié de la distance encore restante. On ajoute ainsi une infinité de durées non nulles, et Zénon en conclut que la flèche n'atteint jamais sa cible !
L'explication est bien donnée par l'égalité ci-dessus : la somme d'une infinité de termes peut bien être une valeur finie ! ! Par exemple si la flèche va à une vitesse de 1 m/s, alors elle parcoure la première moitié en 1 s, le moitié de la distance restante en $\frac{1}{2}$ s, etc. Elle parcoure bien toute la distance en $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2$ secondes !



3.3. Suites telles que $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < \ell < 1$

Théorème 1.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels non nuls. On suppose qu'il existe un réel ℓ tel que pour tout entier naturel n (ou seulement à partir d'un certain rang) on ait :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < \ell < 1.$$

Alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Démonstration. On suppose que la propriété $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < \ell < 1$ est vraie pour tout entier naturel n (la preuve dans le cas où cette propriété n'est vraie qu'à partir d'un certain rang n'est pas très différente). On écrit

$$\frac{u_n}{u_0} = \frac{u_1}{u_0} \times \frac{u_2}{u_1} \times \frac{u_3}{u_2} \times \cdots \times \frac{u_n}{u_{n-1}}$$

ce dont on déduit

$$\left|\frac{u_n}{u_0}\right| < \ell \times \ell \times \ell \times \cdots \times \times \ell = \ell^n$$

et donc $|u_n| < |u_0|\ell^n$. Comme $\ell < 1$, on a $\lim_{n\to+\infty} \ell^n = 0$. On conclut que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. □

Corollaire 1.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels non nuls.

$$\boxed{\textit{Si } \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0, \textit{ alors } \lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$$

Exemple 9.
Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

Démonstration. Si $a = 0$, le résultat est évident. Supposons $a \neq 0$, et posons $u_n = \frac{a^n}{n!}$. Alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1}.$$

Pour conclure, on peut ou bien directement utiliser le corollaire : comme $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$ (car a est fixe), on a $\lim u_n = 0$. Ou bien, comme $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a}{n+1}$, on déduit par le théorème que pour $n \geqslant N > 2|a|$ on a :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{|a|}{n+1} \leqslant \frac{|a|}{N+1} < \frac{|a|}{N} < \frac{1}{2} = \ell$$

et donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. □

Remarque.

1. Avec les notations du théorème, si on a pour tout entier naturel n à partir d'un certain rang : $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| > \ell > 1$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge. En effet, il suffit d'appliquer le théorème à la suite de terme général $\frac{1}{|u_n|}$ pour voir que $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$.
2. Toujours avec les notations du théorème, si $\ell = 1$ on ne peut rien dire.

Exemple 10.
Pour un nombre réel a, $a > 0$, calculer $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a}$.
On va montrer que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$. Si $a = 1$, c'est clair. Supposons $a > 1$. Écrivons $a = 1 + h$, avec $h > 0$. Comme

$$\left(1 + \frac{h}{n}\right)^n \geqslant 1 + n\frac{h}{n} = 1 + h = a$$

(voir la preuve de la proposition 8) on a en appliquant la fonction racine n-ème, $\sqrt[n]{\cdot}$:

$$1 + \frac{h}{n} \geqslant \sqrt[n]{a} \geqslant 1.$$

On peut conclure grâce au théorème « des gendarmes » que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$. Enfin, si $a < 1$, on applique le cas précédent à $b = \frac{1}{a} > 1$.

3.4. Approximation des réels par des décimaux

Proposition 10.
Soit $a \in \mathbb{R}$. Posons

$$u_n = \frac{E(10^n a)}{10^n}.$$

Alors u_n est une approximation décimale de a à 10^{-n} près, en particulier $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$.

Exemple 11.
$\pi = 3,14159265\ldots$

$$\begin{aligned}
u_0 &= \tfrac{E(10^0\pi)}{10^0} = E(\pi) = 3\\
u_1 &= \tfrac{E(10^1\pi)}{10^1} = \tfrac{E(31,415\ldots)}{10} = 3,1\\
u_2 &= \tfrac{E(10^2\pi)}{10^2} = \tfrac{E(314,15\ldots)}{100} = 3,14\\
u_3 &= 3,141
\end{aligned}$$

Démonstration. D'après la définition de la partie entière, on a

$$E(10^n a) \leqslant 10^n a < E(10^n a) + 1$$

donc

$$u_n \leqslant a < u_n + \frac{1}{10^n}$$

ou encore

$$0 \leqslant a - u_n < \frac{1}{10^n}.$$

Or la suite de terme général $\frac{1}{10^n}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{10}$, donc elle tend vers 0. On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$.

□

Exercice 1.
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la proposition 10 est croissante.

Remarque.

1. Les u_n sont des nombres décimaux, en particulier ce sont des nombres rationnels.
2. Ceci fournit une démonstration de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. Pour $\epsilon > 0$, et $I =]a-\epsilon, a+\epsilon[$, alors pour n assez grand, $u_n \in I \cap \mathbb{Q}$.

Mini-exercices.

1. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $5^n - 4^n$.
2. Soit $v_n = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n$. Pour quelle valeur de $a \in \mathbb{R}$ la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ a pour limite 3 (lorsque $n \to +\infty$) ?
3. Calculer la limite de $\frac{1+2+2^2+\cdots+2^n}{2^n}$.
4. Montrer que la somme des racines n-èmes de l'unité est nulle.
5. Montrer que si $\sin(\frac{\theta}{2}) \neq 0$ alors $\frac{1}{2} + \cos(\theta) + \cos(2\theta) + \cdots + \cos(n\theta) = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})\theta\right)}{2\sin(\frac{\theta}{2})}$ (penser à $e^{\mathrm{i}\theta}$).
6. Soit $(u_n)_{n\geqslant 2}$ la suite de terme général $u_n = \ln(1+\frac{1}{2}) \times \ln(1+\frac{1}{3}) \times \cdots \times \ln(1+\frac{1}{n})$. Déterminer la limite de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. Que peut-on en déduire ?
7. Déterminer la limite de $\frac{\pi^n}{1\times3\times5\times\cdots\times(2n+1)}$ (où $\pi = 3,14\ldots$).
8. Soit a un réel. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$ il existe un couple $(m,n) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ (et même une infinité) tel que $\left|a - \frac{m}{2^n}\right| \leqslant \epsilon$.

4. Théorème de convergence

4.1. Toute suite convergente est bornée

Revenons sur une propriété importante que nous avons déjà démontrée dans la section sur les limites.

Proposition 11.
Toute suite convergente est bornée.

La réciproque est fausse mais nous allons ajouter une hypothèse supplémentaire pour obtenir des résultats.

4.2. Suite monotone

Théorème 2.

$$\boxed{\textit{Toute suite croissante et majorée est convergente.}}$$

Remarque.
Et aussi :
- Toute suite décroissante et minorée est convergente.
- Une suite croissante et qui n'est pas majorée tend vers $+\infty$.
- Une suite décroissante et qui n'est pas minorée tend vers $-\infty$.

Démonstration du théorème 2. Notons $A = \{u_n | n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$. Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, disons par le réel M, l'ensemble A est majoré par M, et de plus il est non vide. Donc d'après le théorème $\mathbb{R}4$ du chapitre sur les réels, l'ensemble A admet une borne supérieure : notons $\ell = \sup A$. Montrons que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$. Soit $\epsilon > 0$. Par la caractérisation de la borne supérieure, il existe un élément u_N de A tel que $\ell - \epsilon < u_N \leqslant \ell$. Mais alors pour $n \geqslant N$ on a $\ell - \epsilon < u_N \leqslant u_n \leqslant \ell$, et donc $|u_n - \ell| \leqslant \epsilon$. □

4.3. Deux exemples

La limite $\zeta(2)$

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de terme général :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$$

- La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante : en effet $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$.
- Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ on a $u_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}$.
  — Pour $n = 1$, on a $u_1 = 1 \leqslant 1 = 2 - \frac{1}{1}$.
  — Fixons $n \geqslant 1$ pour lequel on suppose $u_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}$. Alors $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}$. Or $\frac{1}{(n+1)^2} \leqslant \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, donc $u_{n+1} \leqslant 2 - \frac{1}{n+1}$, ce qui achève la récurrence.
- Donc la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et majorée par 2 : elle converge.

On note $\zeta(2)$ cette limite, vous montrerez plus tard qu'en fait $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

Suite harmonique

C'est la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ de terme général :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Calculons $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

- La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante : en effet $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} > 0$.
- Minoration de $u_{2^p} - u_{2^{p-1}}$. On a $u_2 - u_1 = 1 + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2}$; $u_4 - u_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, et en général :

$$u_{2^p} - u_{2^{p-1}} = \underbrace{\frac{1}{2^{p-1}+1} + \frac{1}{2^{p-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^p}}_{2^{p-1}=2^p-2^{p-1} \text{ termes } \geqslant \frac{1}{2^p}} > 2^{p-1} \times \frac{1}{2^p} = \frac{1}{2}$$

- $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. En effet

$$u_{2^p} - 1 = u_{2^p} - u_1 = (u_2 - u_1) + (u_4 - u_2) + \cdots + (u_{2^p} - u_{2^{p-1}}) \geqslant \frac{p}{2}$$

donc la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante mais n'est pas bornée, donc elle tend vers $+\infty$.

4.4. Suites adjacentes

Définition 7.
Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites ***adjacentes*** si

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante,
2. pour tout $n \geqslant 0$, on a $u_n \leqslant v_n$,
3. $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$.

Théorème 3.

Si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes,
elles convergent vers la même limite.

Il y a donc deux résultats dans ce théorème, la convergence de (u_n) et (v_n) et en plus l'égalité des limites. Les termes de la suites sont ordonnées ainsi :

$$u_0 \leqslant u_1 \leqslant u_2 \leqslant \cdots \leqslant u_n \leqslant \cdots\cdots \leqslant v_n \leqslant \cdots \leqslant v_2 \leqslant v_1 \leqslant v_0$$

Démonstration.

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par v_0, donc elle converge vers une limite ℓ.
- La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par u_0, donc elle converge vers une limite ℓ'.
- Donc $\ell' - \ell = \lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$, d'où $\ell' = \ell$.

□

Exemple 12.
Reprenons l'exemple de $\zeta(2)$. Soient (u_n) et (v_n) les deux suites définies pour $n \geqslant 1$ par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{2}{n+1}.$$

Montrons que (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes :

1. (a) (u_n) est croissante car $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$.
   (b) (v_n) est décroissante :
   $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{2}{n+2} - \frac{2}{n+1} = \frac{n+2+2(n+1)^2-2(n+1)(n+2)}{(n+2)(n+1)^2} = \frac{-n}{(n+2)(n+1)^2} < 0$
2. Pour tout $n \geqslant 1$: $v_n - u_n = \frac{2}{n+1} > 0$, donc $u_n \leqslant v_n$.
3. Enfin comme $v_n - u_n = \frac{2}{n+1}$ alors $\lim(v_n - u_n) = 0$.

Les suites (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes, elles convergent donc vers une même limite finie ℓ. Nous avons en plus l'encadrement $u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$ pour tout $n \geqslant 1$. Ceci fournit des approximations de la limite : par exemple pour $n = 3$, $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} \leqslant \ell \leqslant 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{2}$ donc $1,3611\ldots \leqslant \ell \leqslant 1,8611\ldots$

Exercice 2.
Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de terme général :

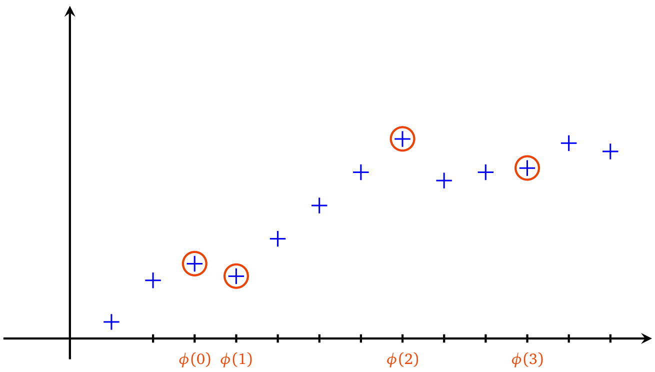
$$u_n = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^3}.$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge (on pourra considérer la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ de terme général $v_n = u_n + \frac{1}{n^2}$).

Remarque.
On note $\zeta(3)$ cette limite. On l'appelle aussi constante d'Apéry qui a prouvé en 1978 que $\zeta(3) \notin \mathbb{Q}$.

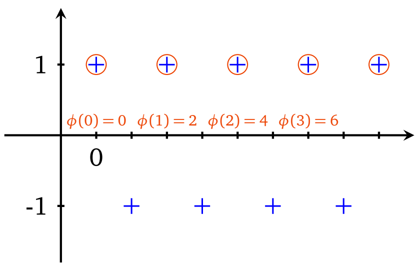
4.5. Théorème de Bolzano-Weierstrass

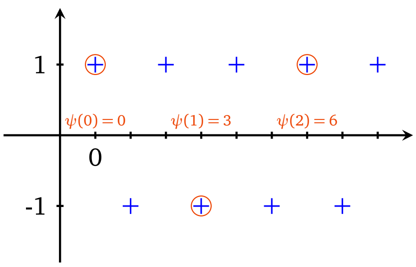
Définition 8.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Une ***suite extraite*** ou ***sous-suite*** de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de la forme $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, où $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.



Exemple 13.
Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = (-1)^n$.

- Si on considère $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ donnée par $\phi(n) = 2n$, alors la suite extraite correspondante a pour terme général $u_{\phi(n)} = (-1)^{2n} = 1$, donc la suite $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 1.
- Si on considère $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ donnée par $\psi(n) = 3n$, alors la suite extraite correspondante a pour terme général $u_{\psi(n)} = (-1)^{3n} = \left((-1)^3\right)^n = (-1)^n$. La suite $(u_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est donc égale à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.





Proposition 12.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$, alors pour toute suite extraite $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ on a $\lim_{n\to+\infty} u_{\phi(n)} = \ell$.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. D'après la définition de limite (définition 4), il existe un entier naturel N tel que $n \geqslant N$ implique $|u_n - \ell| < \epsilon$. Comme l'application ϕ est strictement croissante, on montre facilement par récurrence que pour tout n, on a $\phi(n) \geqslant n$. Ceci implique en particulier que si $n \geqslant N$, alors aussi $\phi(n) \geqslant N$, et donc $|u_{\phi(n)} - \ell| < \epsilon$. Donc la définition de limite (définition 4) s'applique aussi à la suite extraite.

□

Corollaire 2.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Si elle admet une sous-suite divergente, ou bien si elle admet deux sous-suites convergeant vers des limites distinctes, alors elle diverge.

Exemple 14.
Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = (-1)^n$. Alors $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1, et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers -1 (en fait ces deux sous-suites sont constantes). On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Exercice 3.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On suppose que les deux sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite ℓ. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers ℓ.

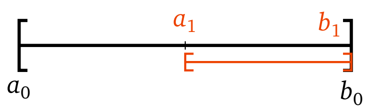
Terminons par un résultat théorique très important.

Théorème 4 (Théorème de Bolzano-Weierstrass)**.**
Toute suite bornée admet une sous-suite convergente.

Exemple 15.

1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = (-1)^n$. Alors on peut considérer les deux sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
2. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $v_n = \cos n$. Le théorème affirme qu'il existe une sous-suite convergente, mais il est moins facile de l'expliciter.

Démonstration du théorème 4. On procède par dichotomie. L'ensemble des valeurs de la suite est par hypothèse contenu dans un intervalle $[a, b]$. Posons $a_0 = a$, $b_0 = b$, $\phi(0) = 0$. Au moins l'un des deux intervalles $\left[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}\right]$ ou $\left[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0\right]$ contient u_n pour une infinité d'indices n. On note $[a_1, b_1]$ un tel intervalle, et on note $\phi(1)$ un entier $\phi(1) > \phi(0)$ tel que $u_{\phi(1)} \in [a_1, b_1]$.



En itérant cette construction, on construit pour tout entier naturel n un intervalle $[a_n, b_n]$, de longueur $\frac{b-a}{2^n}$, et un entier $\phi(n) > \phi(n-1)$ tel que $u_{\phi(n)} \in [a_n, b_n]$. Notons que par construction la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
Comme de plus $\lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{2^n} = 0$, les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et donc convergent vers une même limite ℓ. On peut appliquer le théorème « des gendarmes » pour conclure que $\lim_{n\to+\infty} u_{\phi(n)} = \ell$. □

Mini-exercices.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour $n \geqslant 1$, $u_n = \sqrt{2 + u_{n-1}}$. Montrer que cette suite est croissante et majorée par 2. Que peut-on en conclure ?
2. Soit $(u_n)_{n\geqslant 2}$ la suite définie par $u_n = \frac{\ln 4}{\ln 5} \times \frac{\ln 6}{\ln 7} \times \frac{\ln 8}{\ln 9} \times \cdots \times \frac{\ln(2n)}{\ln(2n+1)}$. Étudier la croissance de la suite. Montrer que la suite (u_n) converge.

3. Soit $N \geqslant 1$ un entier et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $u_n = \cos(\frac{n\pi}{N})$. Montrer que la suite diverge.
4. Montrer que les suites de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n\cdot(n!)}$ sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?
5. Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de terme général $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. On considère les deux suites extraites de terme général $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. Montrer que les deux suites $(v_n)_{n\geqslant 1}$ et $(w_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge.
6. Montrer qu'une suite bornée et divergente admet deux sous-suites convergeant vers des valeurs distinctes.

5. Suites récurrentes

Les suites récurrentes définies par une fonction forment une catégorie essentielle de suites.
Ce paragraphe est l'aboutissement de notre étude des suites, mais sa lecture nécessite aussi la maîtrise préalable de l'étude de fonctions (voir « Limites et fonctions continues »).

5.1. Suite récurrente définie par une fonction

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Une ***suite récurrente*** est définie par son premier terme et une relation permettant de calculer les termes de proche en proche :

$$u_0 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour } n \geqslant 0.$$

Une suite récurrente est donc définie par deux données : un terme initial u_0, et une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. La suite s'écrit ainsi :

$$u_0, \quad u_1 = f(u_0), \quad u_2 = f(u_1) = f(f(u_0)), \quad u_3 = f(u_2) = f(f(f(u_0))), \ldots$$

Le comportement d'une telle suite peut très vite devenir complexe.

Exemple 16.
Soit $f(x) = 1+\sqrt{x}$. Fixons $u_0 = 2$ et définissons pour $n \geqslant 0$: $u_{n+1} = f(u_n)$. C'est-à-dire $u_{n+1} = 1+\sqrt{u_n}$.
Alors les premiers termes de la suite sont :

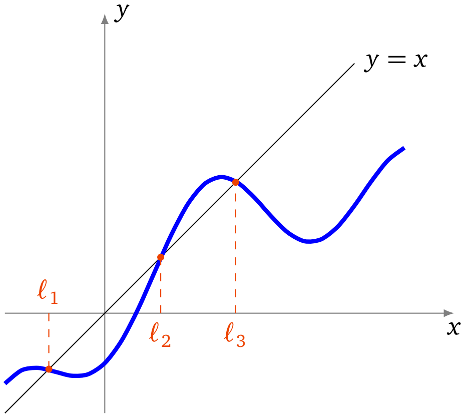
$$2, \quad 1+\sqrt{2}, \quad 1+\sqrt{1+\sqrt{2}}, \quad 1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}}, \quad 1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}}}, \ldots$$

Une suite récurrente donnée n'est pas forcément convergente. Lorsqu'elle admet une limite, l'ensemble des valeurs possibles est restreint par le résultat essentiel suivant.

Proposition 13.
Si f est une fonction continue et la suite récurrente (u_n) converge vers ℓ, alors ℓ est une solution de l'équation :

$$\boxed{f(\ell) = \ell}$$

Si on arrive à montrer que la limite existe, cette proposition affirme qu'elle est à chercher parmi les solutions de l'équation $f(\ell) = \ell$.



Une valeur ℓ, vérifiant $f(\ell) = \ell$ est un ***point fixe*** de f. La preuve est très simple et utilise essentiellement la continuité de la fonction f :

Démonstration. Lorsque $n \to +\infty$, $u_n \to \ell$ et donc aussi $u_{n+1} \to \ell$. Comme $u_n \to \ell$ et que f est continue alors la suite $(f(u_n)) \to f(\ell)$. La relation $u_{n+1} = f(u_n)$ devient à la limite (lorsque $n \to +\infty$) : $\ell = f(\ell)$. □

Nous allons étudier en détail deux cas particuliers, celui ou la fonction est croissante, puis celui ou la fonction est décroissante.

5.2. Cas d'une fonction croissante

Commençons par remarquer que pour une fonction croissante, le comportement de la suite (u_n) définie par récurrence est assez simple :

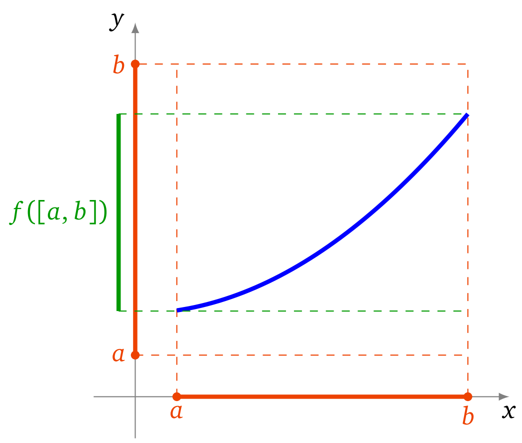
- Si $u_1 \geqslant u_0$ alors (u_n) est croissante.
- Si $u_1 \leqslant u_0$ alors (u_n) est décroissante.

La preuve est facile par récurrence : par exemple si $u_1 \geqslant u_0$, alors comme f est croissante on a $u_2 = f(u_1) \geqslant f(u_0) = u_1$. Partant de $u_2 \geqslant u_1$ on en déduit $u_3 \geqslant u_2$,...

Voici le résultat principal :

Proposition 14.
Si $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction continue et **croissante***, alors quelque soit $u_0 \in [a, b]$, la suite récurrente (u_n) est monotone et converge vers $\ell \in [a, b]$ vérifiant* $\boxed{f(\ell) = \ell}$.

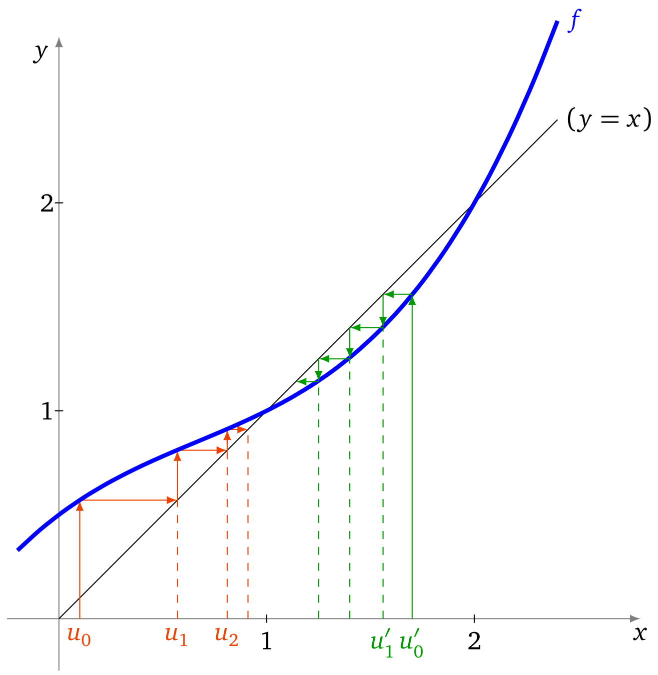
Il y a une hypothèse importante qui est un peu cachée : f va de l'intervalle $[a, b]$ dans lui-même. Dans la pratique, pour appliquer cette proposition, il faut commencer par choisir $[a, b]$ et vérifier que $f([a, b]) \subset [a, b]$.



Démonstration. La preuve est une conséquence des résultats précédents. Par exemple si $u_1 \geqslant u_0$ alors la suite (u_n) est croissante, comme par ailleurs elle est majorée par b, elle converge vers un réel ℓ. Par la proposition 13, on a $f(\ell) = \ell$. Si $u_1 \leqslant u_0$, (u_n) est une décroissante et minorée par a, et la conclusion est la même. □

Exemple 17.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{4}(x^2 - 1)(x - 2) + x$ et $u_0 \in [0, 2]$. Étudions la suite (u_n) définie par récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$ (pour tout $n \geqslant 0$).

1. Étude de f
   (a) f est continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) > 0$.
   (c) Sur l'intervalle $[0, 2]$, f est strictement croissante.
   (d) Et comme $f(0) = \frac{1}{2}$ et $f(2) = 2$ alors $f([0, 2]) \subset [0, 2]$.
2. Graphe de f



Voici comment tracer la suite : on trace le graphe de f et la bissectrice $(y = x)$. On part d'une valeur u_0 (en rouge) sur l'axe des abscisses, la valeur $u_1 = f(u_0)$ se lit sur l'axe des ordonnées, mais on reporte la valeur de u_1 sur l'axe des abscisses par symétrie par rapport à la bissectrice. On recommence : $u_2 = f(u_1)$ se lit sur l'axe des ordonnées et on le reporte sur l'axe des abscisses, etc. On obtient ainsi une sorte d'escalier, et graphiquement on conjecture que la suite est croissante et tend vers 1. Si on part d'une autre valeur initiale u'_0 (en vert), c'est le même principe, mais cette fois on obtient un escalier qui descend.

3. Calcul des points fixes.

   Cherchons les valeurs x qui vérifient $(f(x) = x)$, autrement dit $(f(x) - x = 0)$, mais
   $$f(x) - x = \frac{1}{4}(x^2 - 1)(x - 2) \tag{1}$$
   Donc les points fixes sont les $\{-1, 1, 2\}$. La limite de (u_n) est donc à chercher parmi ces 3 valeurs.

4. Premier cas : $u_0 = 1$ ou $u_0 = 2$.

   Alors $u_1 = f(u_0) = u_0$ et par récurrence la suite (u_n) est constante (et converge donc vers u_0).

5. Deuxième cas : $0 \leqslant u_0 < 1$.
   - Comme $f([0,1]) \subset [0,1]$, la fonction f se restreint sur l'intervalle $[0,1]$ en une fonction $f : [0,1] \to [0,1]$.
   - De plus sur $[0,1]$, $f(x) - x \geqslant 0$. Cela se déduit de l'étude de f ou directement de l'expression (1).
   - Pour $u_0 \in [0,1[$, $u_1 = f(u_0) \geqslant u_0$ d'après le point précédent. Comme f est croissante, par récurrence, comme on l'a vu, la suite (u_n) est croissante.
   - La suite (u_n) est croissante et majorée par 1, donc elle converge. Notons ℓ sa limite.
   - D'une part ℓ doit être un point fixe de f : $f(\ell) = \ell$. Donc $\ell \in \{-1, 1, 2\}$.
   - D'autre part la suite (u_n) étant croissante avec $u_0 \geqslant 0$ et majorée par 1, donc $\ell \in [0,1]$.
   - Conclusion : si $0 \leqslant u_0 < 1$ alors (u_n) converge vers $\ell = 1$.

6. Troisième cas : $1 < u_0 < 2$.

   La fonction f se restreint en $f : [1,2] \to [1,2]$. Sur l'intervalle $[1,2]$, f est croissante mais cette fois $f(x) \leqslant x$. Donc $u_1 \leqslant u_0$, et la suite (u_n) est décroissante. La suite (u_n) étant minorée par 1, elle converge. Si on note ℓ sa limite alors d'une part $f(\ell) = \ell$, donc $\ell \in \{-1, 1, 2\}$, et d'autre part $\ell \in [1,2[$. Conclusion : (u_n) converge vers $\ell = 1$.

Le graphe de f joue un rôle très important, il faut le tracer même si on ne le demande pas explicitement. Il permet de se faire une idée très précise du comportement de la suite : Est-elle croissante ? Est-elle positive ? Semble-t-elle converger ? Vers quelle limite ? Ces indications sont essentielles pour savoir ce qu'il faut montrer lors de l'étude de la suite.

5.3. Cas d'une fonction décroissante

Proposition 15.
Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ une fonction continue et **décroissante**. *Soit $u_0 \in [a,b]$ et la suite récurrente (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$. Alors :*
- *La sous-suite (u_{2n}) converge vers une limite ℓ vérifiant $f \circ f(\ell) = \ell$.*
- *La sous-suite (u_{2n+1}) converge vers une limite ℓ' vérifiant $f \circ f(\ell') = \ell'$.*

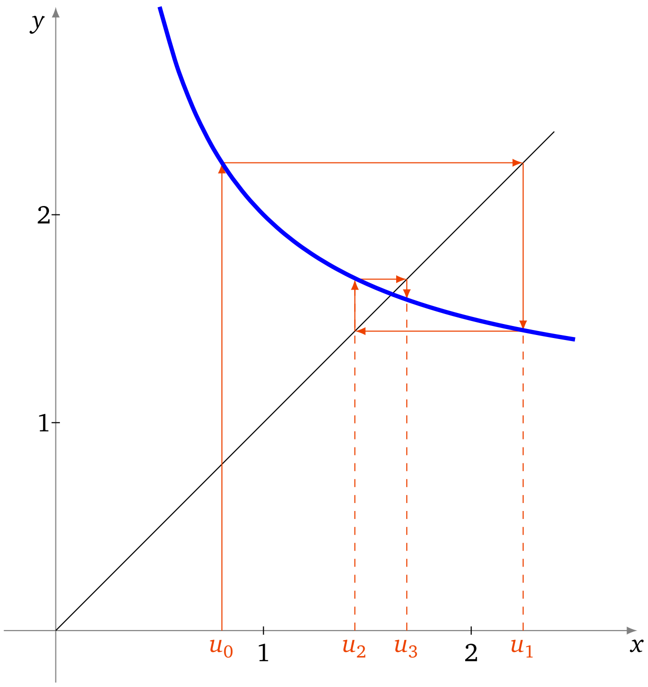
Il se peut (ou pas !) que $\ell = \ell'$.

Démonstration. La preuve se déduit du cas croissant. La fonction f étant décroissante, la fonction $f \circ f$ est croissante. Et on applique la proposition 14 à la fonction $f \circ f$ et à la sous-suite (u_{2n}) définie par récurrence $u_2 = f \circ f(u_0)$, $u_4 = f \circ f(u_2)$,...
De même en partant de u_1 et $u_3 = f \circ f(u_1)$,... □

Exemple 18.

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x}, \qquad u_0 > 0, \qquad u_{n+1} = f(u_n) = 1 + \frac{1}{u_n}$$

1. Étude de f. La fonction $f :]0,+\infty[\to]0,+\infty[$ est une fonction continue et strictement décroissante.
2. Graphe de f.



Le principe pour tracer la suite est le même qu'auparavant : on place u_0, on trace $u_1 = f(u_0)$ sur l'axe des ordonnées et on le reporte par symétrie sur l'axe des abscisses,... On obtient ainsi une sorte d'escargot, et graphiquement on conjecture que la suite converge vers le point fixe de f. En plus on note que la suite des termes de rang pair semble une suite croissante, alors que la suite des termes de rang impair semble décroissante.

3. Points fixes de $f \circ f$.

$$f \circ f(x) = f\big(f(x)\big) = f\big(1+\frac{1}{x}\big) = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1 + \frac{x}{x+1} = \frac{2x+1}{x+1}$$

Donc

$$f \circ f(x) = x \iff \frac{2x+1}{x+1} = x \iff x^2 - x - 1 = 0 \iff x \in \left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$$

Comme la limite doit être positive, le seul point fixe à considérer est $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Attention ! Il y a un unique point fixe, mais on ne peut pas conclure à ce stade car f est définie sur $]0, +\infty[$ qui n'est pas un intervalle compact.

4. Premier cas $0 < u_0 \leqslant \ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Alors, $u_1 = f(u_0) \geqslant f(\ell) = \ell$; et par une étude de $f \circ f(x) - x$, on obtient que : $u_2 = f \circ f(u_0) \geqslant u_0$; $u_1 \geqslant f \circ f(u_1) = u_3$.

Comme $u_2 \geqslant u_0$ et $f \circ f$ est croissante, la suite (u_{2n}) est croissante. De même $u_3 \leqslant u_1$, donc la suite (u_{2n+1}) est décroissante. De plus comme $u_0 \leqslant u_1$, en appliquant f un nombre *pair* de fois, on obtient que $u_{2n} \leqslant u_{2n+1}$. La situation est donc la suivante :

$$u_0 \leqslant u_2 \leqslant \cdots \leqslant u_{2n} \leqslant \cdots \leqslant u_{2n+1} \leqslant \cdots \leqslant u_3 \leqslant u_1$$

La suite (u_{2n}) est croissante et majorée par u_1, donc elle converge. Sa limite ne peut être que l'unique point fixe de $f \circ f$: $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

La suite (u_{2n+1}) est décroissante et minorée par u_0, donc elle converge aussi vers $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

On en conclut que la suite (u_n) converge vers $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

5. Deuxième cas $u_0 \geqslant \ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

On montre de la même façon que (u_{2n}) est décroissante et converge vers $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, et que (u_{2n+1}) est croissante et converge aussi vers $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Mini-exercices.

1. Soit $f(x) = \frac{1}{9}x^3 + 1$, $u_0 = 0$ et pour $n \geqslant 0$: $u_{n+1} = f(u_n)$. Étudier en détail la suite (u_n) : (a) montrer que $u_n \geqslant 0$; (b) étudier et tracer le graphe de g ; (c) tracer les premiers termes de (u_n) ; (d) montrer que (u_n) est croissante ; (e) étudier la fonction $g(x) = f(x) - x$; (f) montrer que f admet deux points fixes sur $\mathbb{R}_+$, $0 < \ell < \ell'$; (g) montrer que $f([0, \ell]) \subset [0, \ell]$; (h) en déduire que (u_n) converge vers ℓ.
2. Soit $f(x) = 1 + \sqrt{x}$, $u_0 = 2$ et pour $n \geqslant 0$: $u_{n+1} = f(u_n)$. Étudier en détail la suite (u_n).
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 \in [0, 1]$ et $u_{n+1} = u_n - u_n^2$. Étudier en détail la suite (u_n).
4. Étudier la suite définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \frac{4}{u_n+2}$.

Limites et fonctions continues

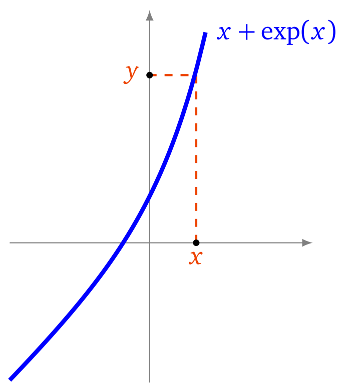
Chapitre 4

Motivation

Les équations en une variable x qu'on sait résoudre explicitement, c'est-à-dire en donnant une formule pour la solution, sont très particulières : par exemple les équations du premier degré $ax + b = 0$, celles du second degré $ax^2 + bx + c = 0$.
Mais pour la plupart des équations, il n'est pas possible de donner une formule pour la ou les solutions. En fait il n'est même pas évident de déterminer seulement le nombre de solutions, ni même s'il en existe. Considérons par exemple l'équation extrêmement simple :

$$x + \exp x = 0$$

Il n'y a pas de formule explicite (utilisant des sommes, des produits, des fonctions usuelles) pour trouver la solution x.
Dans ce chapitre nous allons voir que grâce à l'étude de la fonction $f(x) = x + \exp x$, il est possible d'obtenir beaucoup d'informations sur l'ensemble des solutions de l'équation $x + \exp x = 0$, et même de l'équation plus générale $x + \exp x = y$ (où $y \in \mathbb{R}$ est fixé).



Nous serons capables de prouver que pour chaque $y \in \mathbb{R}$ l'équation « $x + \exp x = y$ » admet une solution x, que cette solution est unique, et nous saurons dire comment varie x en fonction de y. Le point clé de cette résolution est l'étude de la fonction f et en particulier de sa continuité. Même s'il n'est pas possible de trouver l'expression exacte de la solution x en fonction de y, nous allons mettre en place les outils théoriques qui permettent d'en trouver une solution approchée.

1. Notions de fonction

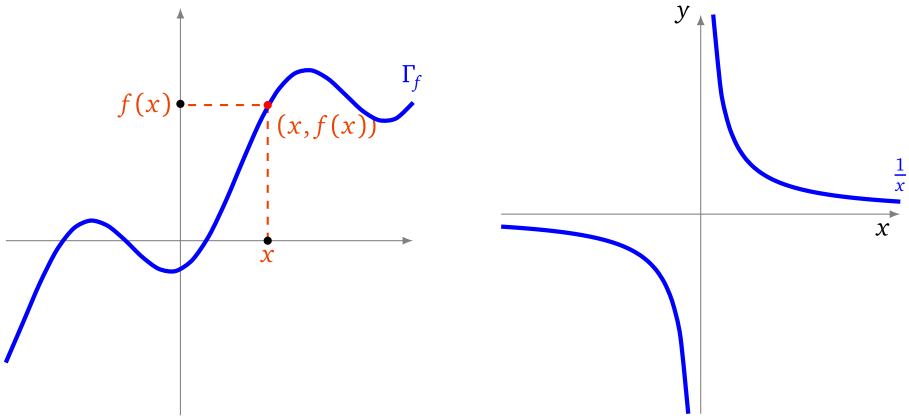
1.1. Définitions

Définition 1.
Une ***fonction*** d'une variable réelle à valeurs réelles est une application $f : U \to \mathbb{R}$, où U est une partie de $\mathbb{R}$. En général, U est un intervalle ou une réunion d'intervalles. On appelle U le ***domaine de définition*** de la fonction f.

Exemple 1.
La fonction inverse :

$$\begin{array}{rcl} f :]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x}. \end{array}$$

Le ***graphe*** d'une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ est la partie Γ_f de $\mathbb{R}^2$ définie par $\Gamma_f = \big\{(x, f(x)) \mid x \in U\big\}$.
Le graphe d'une fonction (à gauche), l'exemple du graphe de $x \mapsto \frac{1}{x}$ (à droite).

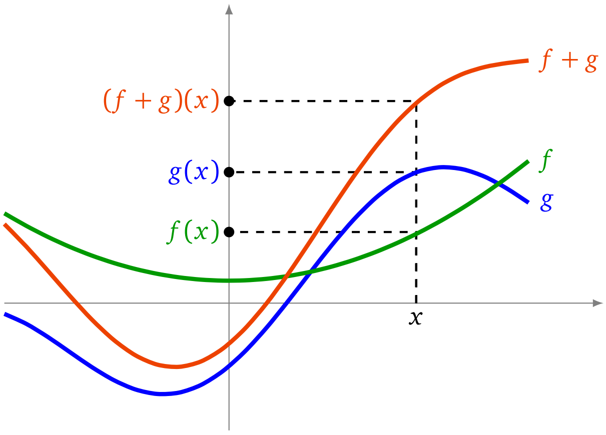


1.2. Opérations sur les fonctions

Soient $f : U \to \mathbb{R}$ et $g : U \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur une même partie U de $\mathbb{R}$. On peut alors définir les fonctions suivantes :

- la ***somme*** de f et g est la fonction $f + g : U \to \mathbb{R}$ définie par $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ pour tout $x \in U$;
- le ***produit*** de f et g est la fonction $f \times g : U \to \mathbb{R}$ définie par $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$ pour tout $x \in U$;
- la ***multiplication par un scalaire*** $\lambda \in \mathbb{R}$ de f est la fonction $\lambda \cdot f : U \to \mathbb{R}$ définie par $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$ pour tout $x \in U$.

Comment tracer le graphe d'une somme de fonction ?

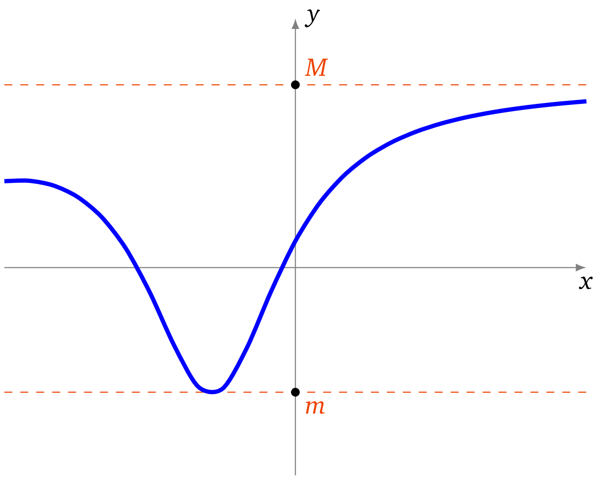


1.3. Fonctions majorées, minorées, bornées

Définition 2.
Soient $f : U \to \mathbb{R}$ et $g : U \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Alors :
- $f \geqslant g$ si $\forall x \in U \ \ f(x) \geqslant g(x)$;
- $f \geqslant 0$ si $\forall x \in U \ \ f(x) \geqslant 0$;
- $f > 0$ si $\forall x \in U \ \ f(x) > 0$;
- f est dite ***constante*** sur U si $\exists a \in \mathbb{R} \ \ \forall x \in U \ f(x) = a$;
- f est dite ***nulle*** sur U si $\forall x \in U \ \ f(x) = 0$.

Définition 3.
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :
- f est ***majorée*** sur U si $\exists M \in \mathbb{R} \ \ \forall x \in U \ f(x) \leqslant M$;
- f est ***minorée*** sur U si $\exists m \in \mathbb{R} \ \ \forall x \in U \ f(x) \geqslant m$;
- f est ***bornée*** sur U si f est à la fois majorée et minorée sur U, c'est-à-dire si $\exists M \in \mathbb{R} \ \forall x \in U \ \ |f(x)| \leqslant M$.

Voici le graphe d'une fonction bornée (minorée par m et majorée par M).

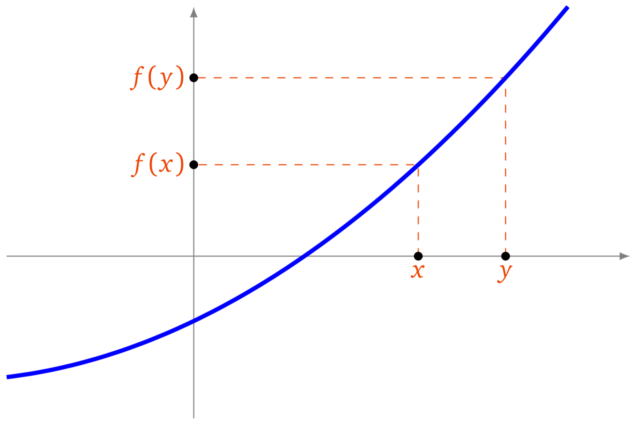


1.4. Fonctions croissantes, décroissantes

Définition 4.
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :

- f est ***croissante*** sur U si $\boxed{\forall x, y \in U \quad x \leqslant y \implies f(x) \leqslant f(y)}$
- f est ***strictement croissante*** sur U si $\forall x, y \in U \quad x < y \implies f(x) < f(y)$
- f est ***décroissante*** sur U si $\forall x, y \in U \quad x \leqslant y \implies f(x) \geqslant f(y)$
- f est ***strictement décroissante*** sur U si $\forall x, y \in U \quad x < y \implies f(x) > f(y)$
- f est ***monotone*** (resp. ***strictement monotone***) sur U si f est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante) sur U.

Un exemple de fonction croissante (et même strictement croissante) :



Exemple 2.

- La fonction racine carrée $\begin{cases} [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x} \end{cases}$ est strictement croissante.
- Les fonctions exponentielle $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et logarithme $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ sont strictement croissantes.
- La fonction valeur absolue $\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto |x| \end{cases}$ n'est ni croissante, ni décroissante. Par contre, la fonction $\begin{cases} [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto |x| \end{cases}$ est strictement croissante.

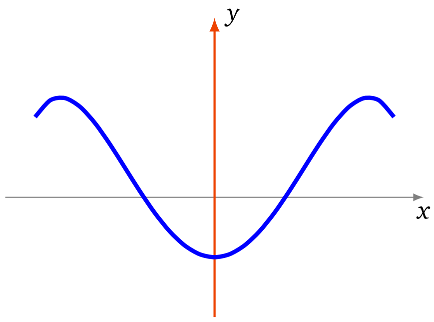
1.5. Parité et périodicité

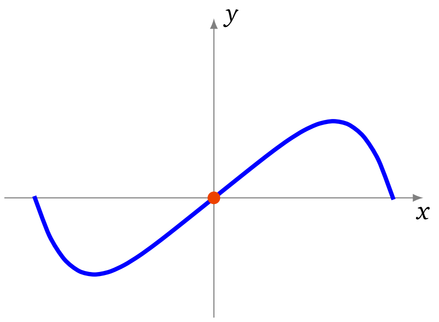
Définition 5.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0 (c'est-à-dire de la forme $]-a, a[$ ou $[-a, a]$ ou $\mathbb{R}$). Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur cet intervalle. On dit que :

- f est ***paire*** si $\forall x \in I \quad f(-x) = f(x)$,
- f est ***impaire*** si $\forall x \in I \quad f(-x) = -f(x)$.

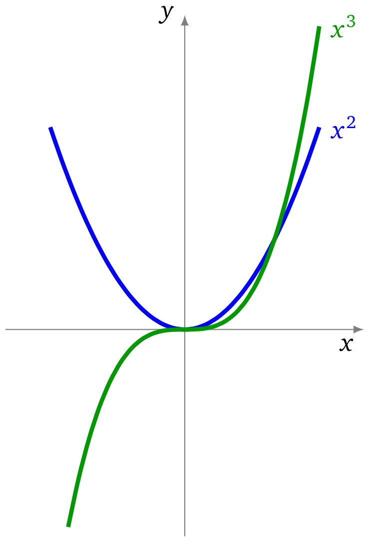
Interprétation graphique :

- f est paire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (figure de gauche).
- f est impaire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'origine (figure de droite).

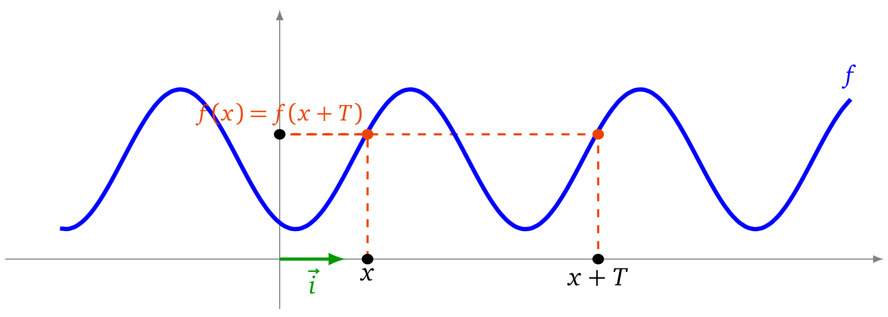




Exemple 3.
- La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^{2n}$ ($n \in \mathbb{N}$) est paire.
- La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^{2n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$) est impaire.
- La fonction $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est paire. La fonction $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est impaire.

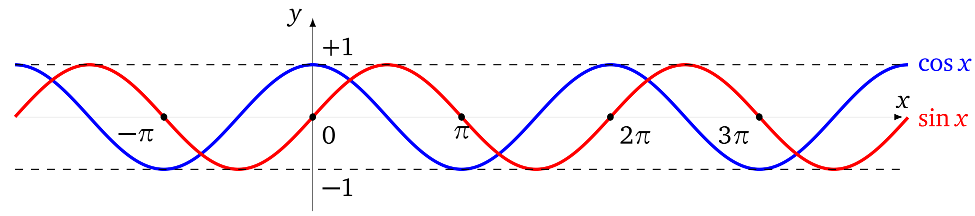


Définition 6.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et T un nombre réel, $T > 0$. La fonction f est dite ***périodique*** de période T si $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+T) = f(x)$.



Interprétation graphique : f est périodique de période T si et seulement si son graphe est invariant par la translation de vecteur $T\vec{i}$, où $\vec{i}$ est le premier vecteur de coordonnées.

Exemple 4.
Les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodiques. La fonction tangente est π-périodique.



Mini-exercices.

1. Soit $U =]-\infty, 0[$ et $f : U \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1/x$. f est-elle monotone ? Et sur $U =]0, +\infty[$? Et sur $U =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$?
2. Pour deux fonctions paires que peut-on dire sur la parité de la somme ? du produit ? et de la composée ? Et pour deux fonctions impaires ? Et si l'une est paire et l'autre impaire ?
3. On note $\{x\} = x - E(x)$ la partie fractionnaire de x. Tracer le graphe de la fonction $x \mapsto \{x\}$ et montrer qu'elle est périodique.
4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$. Montrer que $|f|$ est majorée par $\frac{1}{2}$, étudier les variations de f (sans utiliser de dérivée) et tracer son graphe.
5. On considère la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sin\big(\pi f(x)\big)$, où f est définie à la question précédente. Déduire de l'étude de f les variations, la parité, la périodicité de g et tracer son graphe.

2. Limites

2.1. Définitions

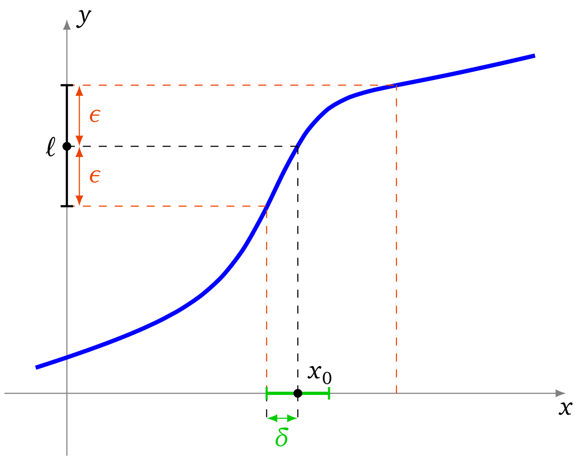
Limite en un point

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ un point de I ou une extrémité de I.

Définition 7.
Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que ***f a pour limite ℓ en x_0*** si

$$\boxed{\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \epsilon}$$

On dit aussi que ***$f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers x_0***. On note alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ ou bien $\lim_{x_0} f = \ell$.

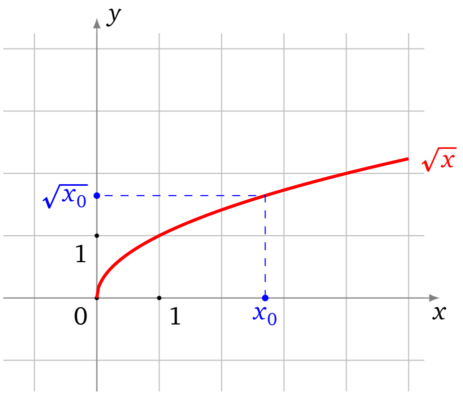


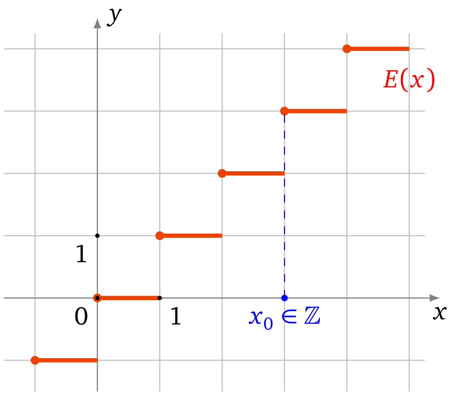
Remarque.

- L'inégalité $|x - x_0| < \delta$ équivaut à $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. L'inégalité $|f(x) - \ell| < \epsilon$ équivaut à $f(x) \in]\ell - \epsilon, \ell + \epsilon[$.
- On peut remplacer certaines inégalités strictes « $<$ » par des inégalités larges « $\leqslant$ » dans la définition : $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| \leqslant \delta \implies |f(x) - \ell| \leqslant \epsilon$
- Dans la définition de la limite
$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \epsilon$$
le quantificateur $\forall x \in I$ n'est là que pour être sûr que l'on puisse parler de $f(x)$. Il est souvent omis et l'existence de la limite s'écrit alors juste :
$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \epsilon.$$
- N'oubliez pas que l'ordre des quantificateurs est important, on ne peut pas échanger le $\forall \epsilon$ avec le $\exists \delta$: le δ dépend en général du ϵ. Pour marquer cette dépendance on peut écrire : $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta(\epsilon) > 0 \ldots$

Exemple 5.

- $\lim_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$ pour tout $x_0 \geqslant 0$,
- la fonction partie entière E n'a pas de limite aux points $x_0 \in \mathbb{Z}$.





Soit f une fonction définie sur un ensemble de la forme $]a, x_0[\cup]x_0, b[$.

Définition 8.

- On dit que ***f a pour limite $+\infty$ en x_0*** si

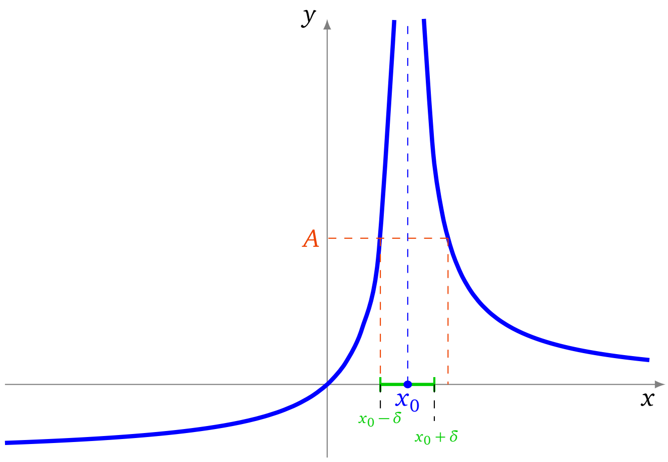
$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies f(x) > A$$

On note alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

- On dit que ***f a pour limite $-\infty$ en x_0*** si

$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies f(x) < -A$$

On note alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.



Limite en l'infini

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle de la forme $I =]a, +\infty[$.

Définition 9.

- Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que ***f a pour limite ℓ en $+\infty$*** si

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists B > 0 \quad \forall x \in I \quad x > B \implies |f(x) - \ell| < \epsilon$$

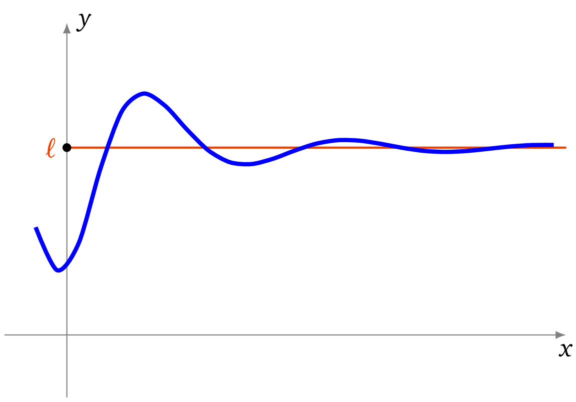
On note alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim_{+\infty} f = \ell$.

- On dit que ***f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$*** si

$$\forall A > 0 \quad \exists B > 0 \quad \forall x \in I \quad x > B \implies f(x) > A$$

On note alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

On définirait de la même manière la limite en $-\infty$ pour des fonctions définies sur les intervalles du type $]-\infty, a[$.



Exemple 6.
On a les limites classiques suivantes pour tout $n \geqslant 1$:

- $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty \text{ si } n \text{ est pair} \\ -\infty \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$
- $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x^n}\right) = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{x^n}\right) = 0.$

Exemple 7.
Soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ avec $a_n > 0$ et $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ avec $b_m > 0$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{si } n > m \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n < m \end{cases}$$

Limite à gauche et à droite

Soit f une fonction définie sur un ensemble de la forme $]a, x_0[\cup]x_0, b[$.

> **Définition 10.**
> - On appelle ***limite à droite*** en x_0 de f la limite de la fonction $f_{\big|]x_0,b[}$ en x_0 et on la note $\lim_{x_0^+} f$.
> - On définit de même la ***limite à gauche*** en x_0 de f : la limite de la fonction $f_{\big|]a,x_0[}$ en x_0 et on la note $\lim_{x_0^-} f$.
> - On note aussi $\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x)$ pour la limite à droite et $\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x)$ pour la limite à gauche.

Dire que $f : I \to \mathbb{R}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ à droite en x_0 signifie donc :

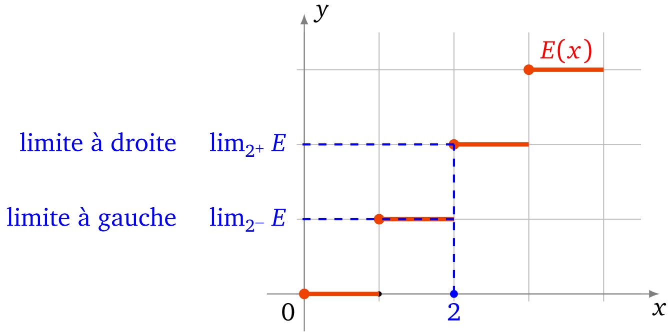
$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad x_0 < x < x_0 + \delta \implies |f(x) - \ell| < \epsilon$$

Si la fonction f a une limite en x_0, alors ses limites à gauche et à droite en x_0 coïncident et valent $\lim_{x_0} f$.
Réciproquement, si f a une limite à gauche et une limite à droite en x_0 et si ces limites valent $f(x_0)$ (si f est bien définie en x_0) alors f admet une limite en x_0.

Exemple 8.
Considérons la fonction partie entière au point $x = 2$:

- comme pour tout $x \in]2,3[$ on a $E(x) = 2$, on a $\lim_{2^+} E = 2$,
- comme pour tout $x \in [1,2[$ on a $E(x) = 1$, on a $\lim_{2^-} E = 1$.

Ces deux limites étant différentes, on en déduit que E n'a pas de limite en 2.



2.2. Propriétés

Proposition 1.

Si une fonction admet une limite, alors cette limite est unique.

On ne donne pas la démonstration de cette proposition, qui est très similaire à celle de l'unicité de la limite pour les suites (un raisonnement par l'absurde).

Soient deux fonctions f et g. On suppose que x_0 est un réel, ou que $x_0 = \pm\infty$.

Proposition 2.

Si $\lim\limits_{x_0} f = \ell \in \mathbb{R}$ *et* $\lim\limits_{x_0} g = \ell' \in \mathbb{R}$, *alors :*

- $\lim\limits_{x_0}(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot \ell$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x_0}(f + g) = \ell + \ell'$
- $\lim\limits_{x_0}(f \times g) = \ell \times \ell'$
- *si* $\ell \neq 0$, *alors* $\lim\limits_{x_0} \frac{1}{f} = \frac{1}{\ell}$

De plus, si $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$ *(ou* $-\infty$*) alors* $\lim\limits_{x_0} \frac{1}{f} = 0$.

Cette proposition se montre de manière similaire à la proposition analogue sur les limites de suites. Nous n'allons donc pas donner la démonstration de tous les résultats.

Démonstration. Montrons par exemple que si f tend en x_0 vers une limite ℓ non nulle, alors $\frac{1}{f}$ est bien définie dans un voisinage de x_0 et tend vers $\frac{1}{\ell}$.
Supposons $\ell > 0$, le cas $\ell < 0$ se montrerait de la même manière. Montrons tout d'abord que $\frac{1}{f}$ est bien définie et est bornée dans un voisinage de x_0 contenu dans l'intervalle I. Par hypothèse

$$\forall \epsilon' > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \implies \ell - \epsilon' < f(x) < \ell + \epsilon'.$$

Si on choisit ϵ' tel que $0 < \epsilon' < \ell/2$, alors on voit qu'il existe un intervalle $J = I \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ tel que pour tout x dans J, $f(x) > \ell/2 > 0$, c'est-à-dire, en posant $M = 2/\ell$:

$$\forall x \in J \quad 0 < \frac{1}{f(x)} < M.$$

Fixons à présent $\epsilon > 0$. Pour tout $x \in J$, on a

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\ell}\right| = \frac{|\ell - f(x)|}{f(x)\ell} < \frac{M}{\ell}\,|\ell - f(x)|.$$

Donc, si dans la définition précédente de la limite de f en x_0 on choisit $\epsilon' = \frac{\ell\epsilon}{M}$, alors on trouve qu'il existe un $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in J \quad x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \implies \left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\ell}\right| < \frac{M}{\ell}\,|\ell - f(x)| < \frac{M}{\ell}\epsilon' = \epsilon.$$

□

Proposition 3.
Si $\lim_{x_0} f = \ell$ *et* $\lim_{\ell} g = \ell'$, *alors* $\lim_{x_0} g \circ f = \ell'$.

Ce sont des propriétés que l'on utilise sans s'en apercevoir !

Exemple 9.
Soit $x \mapsto u(x)$ une fonction et $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) \to 2$ lorsque $x \to x_0$. Posons $f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{u(x)^2} + \ln u(x)}$. Si elle existe, quelle est la limite de f en x_0 ?

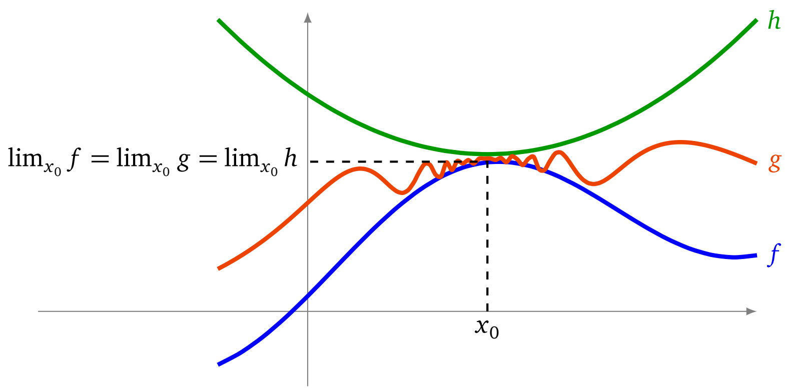
- Tout d'abord comme $u(x) \to 2$ alors $u(x)^2 \to 4$ donc $\frac{1}{u(x)^2} \to \frac{1}{4}$ (lorsque $x \to x_0$).
- De même comme $u(x) \to 2$ alors, dans un voisinage de x_0, $u(x) > 0$ donc $\ln u(x)$ est bien définie dans ce voisinage et de plus $\ln u(x) \to \ln 2$ (lorsque $x \to x_0$).
- Cela entraîne que $1+\frac{1}{u(x)^2}+\ln u(x) \to 1+\frac{1}{4}+\ln 2$ lorsque $x \to x_0$. En particulier $1+\frac{1}{u(x)^2}+\ln u(x) \geqslant 0$ dans un voisinage de x_0, donc $f(x)$ est bien définie dans un voisinage de x_0.
- Et par composition avec la racine carrée alors $f(x)$ a bien une limite en x_0 et $\lim_{x\to x_0} f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \ln 2}$.

Il y a des situations où l'on ne peut rien dire sur les limites. Par exemple si $\lim_{x_0} f = +\infty$ et $\lim_{x_0} g = -\infty$ alors on ne peut à priori rien dire sur la limite de $f + g$ (cela dépend vraiment de f et de g). On raccourci cela en $+\infty - \infty$ est une ***forme indéterminée***.
Voici une liste de formes indéterminées : $+\infty - \infty$; $0 \times \infty$; $\dfrac{\infty}{\infty}$; $\dfrac{0}{0}$; 1^∞ ; ∞^0.

Enfin voici une proposition très importante qui signifie qu'on peut passer à la limite dans une inégalité *large*.

Proposition 4.
- *Si* $f \leqslant g$ *et si* $\lim_{x_0} f = \ell \in \mathbb{R}$ *et* $\lim_{x_0} g = \ell' \in \mathbb{R}$, *alors* $\ell \leqslant \ell'$.
- *Si* $f \leqslant g$ *et si* $\lim_{x_0} f = +\infty$, *alors* $\lim_{x_0} g = +\infty$.
- *Théorème des gendarmes*

$$\boxed{\text{Si } f \leqslant g \leqslant h \text{ et si } \lim_{x_0} f = \lim_{x_0} h = \ell \in \mathbb{R}, \text{ alors } g \text{ a une limite en } x_0 \text{ et } \lim_{x_0} g = \ell.}$$



Mini-exercices.
1. Déterminer, si elle existe, la limite de $\frac{2x^2-x-2}{3x^2+2x+2}$ en 0. Et en $+\infty$?
2. Déterminer, si elle existe, la limite de $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ en $+\infty$. Et pour $\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$?
3. En utilisant la définition de la limite (avec des ϵ), montrer que $\lim_{x\to 2}(3x+1) = 7$.

4. Montrer que si f admet une limite finie en x_0 alors il existe $\delta > 0$ tel que f soit bornée sur $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.
5. Déterminer, si elle existe, $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$. Et $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$?

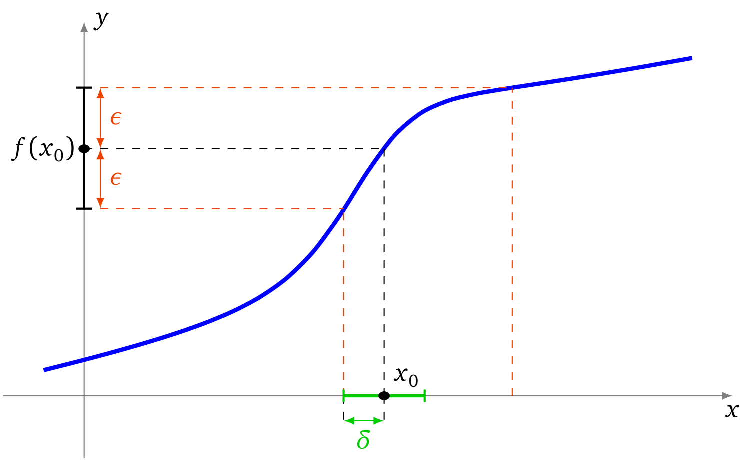
3. Continuité en un point

3.1. Définition

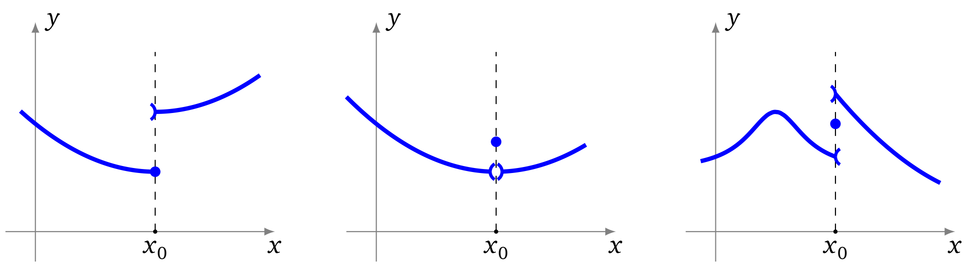
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

Définition 11.

- On dit que f est ***continue en un point*** $x_0 \in I$ si
$$\boxed{\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon}$$
c'est-à-dire si f admet une limite en x_0 (cette limite vaut alors nécessairement $f(x_0)$).
- On dit que f est ***continue sur*** I si f est continue en tout point de I.



Intuitivement, une fonction est continue sur un intervalle, si on peut tracer son graphe « sans lever le crayon », c'est-à-dire si sa courbe représentative n'admet pas de saut.
Voici des fonctions qui ne sont pas continues en x_0 :



Exemple 10.
Les fonctions suivantes sont continues :

- une fonction constante sur un intervalle,
- la fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$,
- les fonctions sin et cos sur $\mathbb{R}$,
- la fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ sur $\mathbb{R}$,
- la fonction exp sur $\mathbb{R}$,
- la fonction ln sur $]0, +\infty[$.

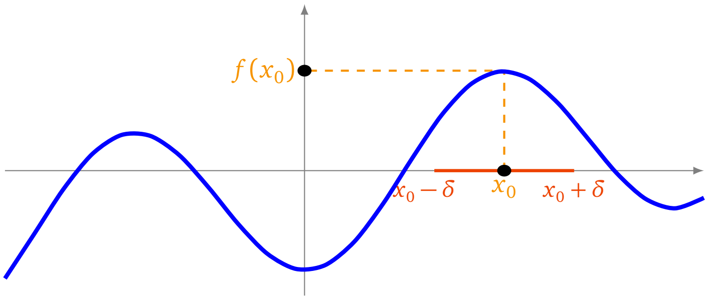
Par contre, la fonction partie entière E n'est pas continue aux points $x_0 \in \mathbb{Z}$, puisqu'elle n'admet pas de limite en ces points. Pour $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, elle est continue en x_0.

3.2. Propriétés

La continuité assure par exemple que si la fonction n'est pas nulle en un point (qui est une propriété ponctuelle) alors elle n'est pas nulle autour de ce point (propriété locale). Voici l'énoncé :

Lemme 1.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un point de I. Si f est continue en x_0 et si $f(x_0) \neq 0$, alors il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\quad f(x) \neq 0$$



Démonstration. Supposons par exemple que $f(x_0) > 0$, le cas $f(x_0) < 0$ se montrerait de la même manière. Écrivons ainsi la définition de la continuité de f en x_0 :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\implies f(x_0) - \epsilon < f(x) < f(x_0) + \epsilon.$$

Il suffit donc de choisir ϵ tel que $0 < \epsilon < f(x_0)$. Il existe alors bien un intervalle $J = I \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ tel que pour tout x dans J, on a $f(x) > 0$. □

La continuité se comporte bien avec les opérations élémentaires. Les propositions suivantes sont des conséquences immédiates des propositions analogues sur les limites.

Proposition 5.
Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues en un point $x_0 \in I$. Alors
- *$\lambda \cdot f$ est continue en x_0 (pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$),*
- *$f + g$ est continue en x_0,*
- *$f \times g$ est continue en x_0,*
- *si $f(x_0) \neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ est continue en x_0.*

Exemple 11.
La proposition précédente permet de vérifier que d'autres fonctions usuelles sont continues :
- les fonctions puissance $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}$ (comme produit $x \times x \times \cdots$),
- les polynômes sur $\mathbb{R}$ (somme et produit de fonctions puissance et de fonctions constantes),
- les fractions rationnelles $x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$ sur tout intervalle où le polynôme $Q(x)$ ne s'annule pas.

La composition conserve la continuité (mais il faut faire attention en quels points les hypothèses s'appliquent).

Proposition 6.
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(I) \subset J$. Si f est continue en un point $x_0 \in I$ et si g est continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0.

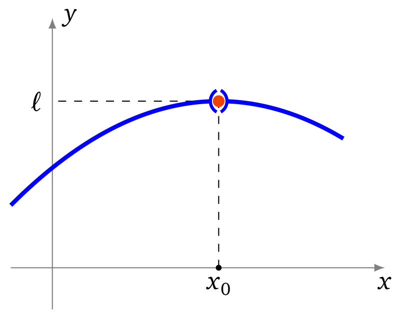
3.3. Prolongement par continuité

Définition 12.
Soit I un intervalle, x_0 un point de I et $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ une fonction.

- On dit que f est ***prolongeable par continuité*** en x_0 si f admet une limite finie en x_0. Notons alors $\ell = \lim_{x_0} f$.
- On définit alors la fonction $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ en posant pour tout $x \in I$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ \ell & \text{si } x = x_0. \end{cases}$$

Alors $\tilde{f}$ est continue en x_0 et on l'appelle le ***prolongement par continuité*** de f en x_0.



Dans la pratique, on continuera souvent à noter f à la place de $\tilde{f}$.

Exemple 12.
Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Voyons si f admet un prolongement par continuité en 0 ?
Comme pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a $|f(x)| \leqslant |x|$, on en déduit que f tend vers 0 en 0. Elle est donc prolongeable par continuité en 0 et son prolongement est la fonction $\tilde{f}$ définie sur $\mathbb{R}$ tout entier par :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

3.4. Suites et continuité

Proposition 7.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et x_0 un point de I. Alors :

$$\boxed{f \text{ est continue en } x_0 \iff \begin{array}{c} \text{pour toute suite } (u_n) \text{ qui converge vers } x_0 \\ \text{la suite } (f(u_n)) \text{ converge vers } f(x_0) \end{array}}$$

Démonstration.

$\Longrightarrow$ *On suppose que f est continue en x_0 et que (u_n) est une suite qui converge vers x_0 et on veut montrer que $(f(u_n))$ converge vers $f(x_0)$.*
Soit $\epsilon > 0$. Comme f est continue en x_0, il existe un $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Pour ce δ, comme (u_n) converge vers x_0, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant N \implies |u_n - x_0| < \delta.$$

On en déduit que, pour tout $n \geqslant N$, comme $|u_n - x_0| < \delta$, on a $|f(u_n) - f(x_0)| < \epsilon$. Comme c'est vrai pour tout $\epsilon > 0$, on peut maintenant conclure que $(f(u_n))$ converge vers $f(x_0)$.

$\Longleftarrow$ *On va montrer la contraposée : supposons que f n'est pas continue en x_0 et montrons qu'alors il existe une suite (u_n) qui converge vers x_0 et telle que $(f(u_n))$ ne converge pas vers $f(x_0)$.*

Par hypothèse, comme f n'est pas continue en x_0 :

$$\exists \epsilon_0 > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x_\delta \in I \quad \text{tel que} \quad |x_\delta - x_0| < \delta \text{ et } |f(x_\delta) - f(x_0)| > \epsilon_0.$$

On construit la suite (u_n) de la façon suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on choisit dans l'assertion précédente $\delta = 1/n$ et on obtient qu'il existe u_n (qui est $x_{1/n}$) tel que

$$|u_n - x_0| < \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad |f(u_n) - f(x_0)| > \epsilon_0.$$

La suite (u_n) converge vers x_0 alors que la suite $(f(u_n))$ ne peut pas converger vers $f(x_0)$.

□

Remarque.

On retiendra surtout l'implication : si f est continue sur I et si (u_n) est une suite convergente de limite ℓ, alors $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$. On l'utilisera intensivement pour l'étude des suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$: si f est continue et $u_n \to \ell$, alors $f(\ell) = \ell$.

Mini-exercices.

1. Déterminer le domaine de définition et de continuité des fonctions suivantes : $f(x) = 1/\sin x$, $g(x) = 1/\sqrt{x + \frac{1}{2}}$, $h(x) = \ln(x^2 + x - 1)$.
2. Trouver les couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ si $x < 0$ et $f(x) = \exp(x)$ si $x \geqslant 0$ soit continue sur $\mathbb{R}$. Et si on avait $f(x) = \frac{a}{x-1} + b$ pour $x < 0$?
3. Soit f une fonction continue telle que $f(x_0) = 1$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que : pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\quad f(x) > \frac{1}{2}$.
4. Étudier la continuité de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \sin(x)\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Et pour $g(x) = xE(x)$?
5. La fonction définie par $f(x) = \frac{x^3+8}{|x+2|}$ admet-elle un prolongement par continuité en -2 ?
6. Soit la suite définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$. Montrer que (u_n) admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque $n \to +\infty$. À l'aide de la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ calculer cette limite.

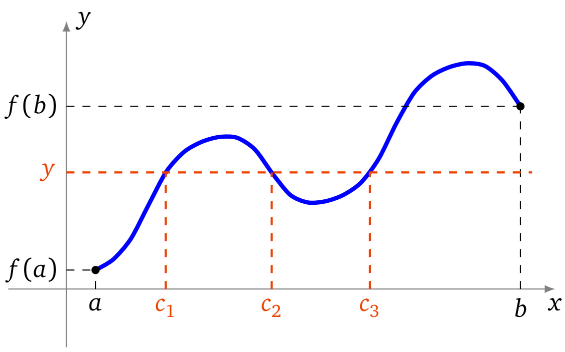
4. Continuité sur un intervalle

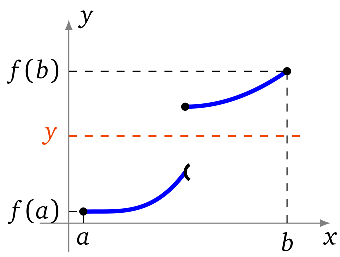
4.1. Le théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 1 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.**
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Pour tout réel } y \text{ compris entre } f(a) \text{ et } f(b),\\ \text{il existe } c \in [a,b] \text{ tel que } f(c) = y.\end{array}}$$

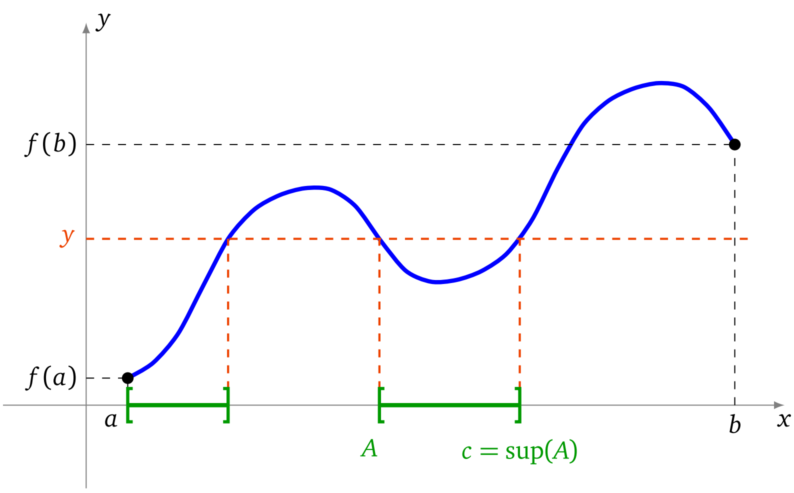
Une illustration du théorème des valeurs intermédiaires (figure de gauche), le réel c n'est pas nécessairement unique. De plus si la fonction n'est pas continue, le théorème n'est plus vrai (figure de droite).





Démonstration. Montrons le théorème dans le cas où $f(a) < f(b)$. On considère alors un réel y tel que $f(a) \leqslant y \leqslant f(b)$ et on veut montrer qu'il a un antécédent par f.

1. On introduit l'ensemble suivant
$$A = \Big\{x \in [a,b] \mid f(x) \leqslant y\Big\}.$$
Tout d'abord l'ensemble A est non vide (car $a \in A$) et il est majoré (car il est contenu dans $[a,b]$) : il admet donc une borne supérieure, que l'on note $c = \sup A$. Montrons que $f(c) = y$.



2. Montrons tout d'abord que $f(c) \leqslant y$. Comme $c = \sup A$, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contenue dans A telle que (u_n) converge vers c. D'une part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme $u_n \in A$, on a $f(u_n) \leqslant y$. D'autre part, comme f est continue en c, la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(c)$. On en déduit donc, par passage à la limite, que $f(c) \leqslant y$.

3. Montrons à présent que $f(c) \geqslant y$. Remarquons tout d'abord que si $c = b$, alors on a fini, puisque $f(b) \geqslant y$. Sinon, pour tout $x \in]c, b]$, comme $x \notin A$, on a $f(x) > y$. Or, étant donné que f est continue en c, f admet une limite à droite en c, qui vaut $f(c)$ et on obtient $f(c) \geqslant y$.

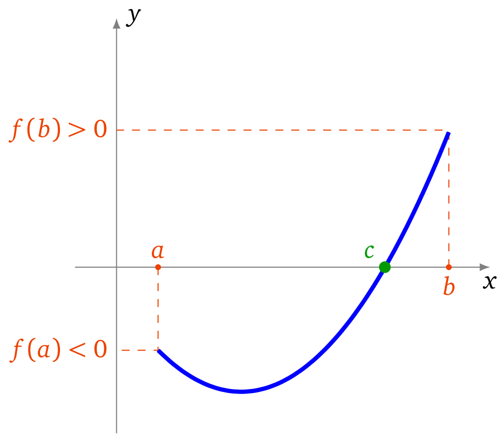
□

4.2. Applications du théorème des valeurs intermédiaires

Voici la version la plus utilisée du théorème des valeurs intermédiaires.

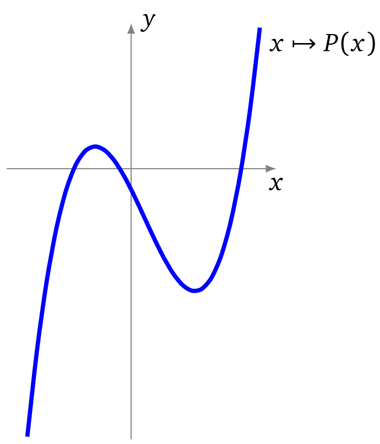
Corollaire 1.
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment.

$$\boxed{\text{Si } f(a) \cdot f(b) < 0, \text{ alors il existe } c \in]a, b[\text{ tel que } f(c) = 0.}$$



Démonstration. Il s'agit d'une application directe du théorème des valeurs intermédiaires avec $y = 0$. L'hypothèse $f(a) \cdot f(b) < 0$ signifiant que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires. □

Exemple 13.
Tout polynôme de degré impair possède au moins une racine réelle.



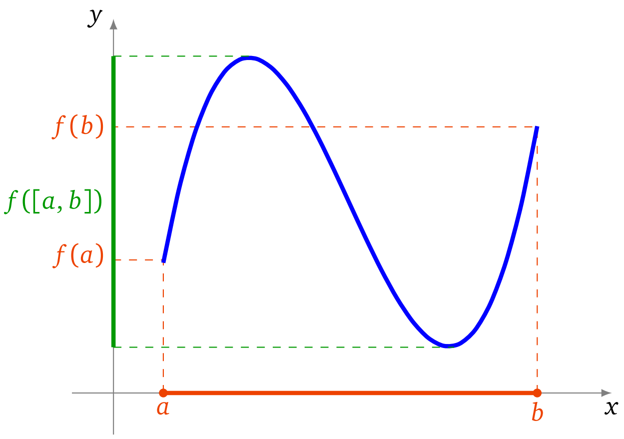
En effet, un tel polynôme s'écrit $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ avec n un entier impair. On peut supposer que le coefficient a_n est strictement positif. Alors on a $\lim_{-\infty} P = -\infty$ et $\lim_{+\infty} P = +\infty$. En particulier, il existe deux réels a et b tels que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$ et on conclut grâce au corollaire précédent.

Voici une formulation théorique du théorème des valeurs intermédiaires.

Corollaire 2.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I. Alors $f(I)$ est un intervalle.

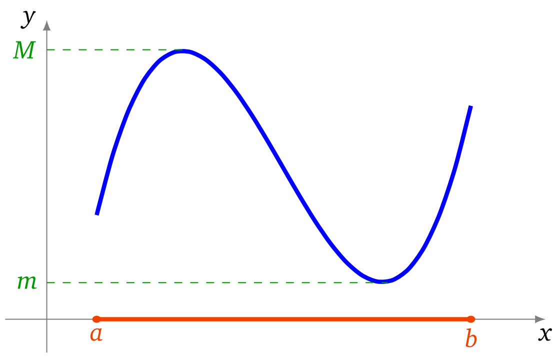
Attention ! Il serait faux de croire que l'image par une fonction f de l'intervalle $[a,b]$ soit l'intervalle $[f(a), f(b)]$ (voir la figure ci-dessous).



Démonstration. Soient $y_1, y_2 \in f(I)$, $y_1 \leqslant y_2$. Montrons que si $y \in [y_1, y_2]$, alors $y \in f(I)$. Par hypothèse, il existe $x_1, x_2 \in I$ tels que $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ et donc y est compris entre $f(x_1)$ et $f(x_2)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, comme f est continue, il existe donc $x \in I$ tel que $y = f(x)$, et ainsi $y \in f(I)$. □

4.3. Fonctions continues sur un segment

Théorème 2.
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment. Alors il existe deux réels m et M tels que $f([a,b]) = [m, M]$. Autrement dit, l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.



Comme on sait déjà par le théorème des valeurs intermédiaires que $f([a,b])$ est un intervalle, le théorème précédent signifie exactement que

Si f est continue sur $[a,b]$
alors f est bornée sur $[a,b]$, et elle atteint ses bornes.

Donc m est le minimum de la fonction sur l'intervalle $[a,b]$ alors que M est le maximum.

Démonstration.

1. Montrons d'abord que f est bornée.
   - Pour $r \in \mathbb{R}$, on note $A_r = \{x \in [a,b] \mid f(x) \geqslant r\}$. Fixons r tel que $A_r \neq \varnothing$, comme $A_r \subset [a,b]$, le nombre $s = \sup A_r$ existe. Soit $x_n \to s$ avec $x_n \in A_r$. Par définition $f(x_n) \geqslant r$ donc, f étant continue, à la limite $f(s) \geqslant r$ et ainsi $s \in A_r$.
   - Supposons par l'absurde que f ne soit pas bornée. Alors pour tout $n \geqslant 0$, A_n est non vide. Notons $s_n = \sup A_n$. Comme $f(x) \geqslant n+1$ implique $f(x) \geqslant n$ alors $A_{n+1} \subset A_n$, ce qui entraîne $s_{n+1} \leqslant s_n$. Bilan : (s_n) est une suite décroissante, minorée par a donc converge vers $\ell \in [a,b]$. Encore une fois f est continue donc $s_n \to \ell$, implique $f(s_n) \to f(\ell)$. Mais $f(s_n) \geqslant n$ donc $\lim f(s_n) = +\infty$. Cela contredit $\lim f(s_n) = f(\ell) < +\infty$. Conclusion : f est majorée.
   - Un raisonnement tout à fait similaire prouve que f est aussi minorée, donc bornée. Par ailleurs on sait déjà que $f(I)$ est un intervalle (c'est le théorème des valeurs intermédiaires), donc maintenant $f(I)$ est un intervalle borné. Il reste à montrer qu'il du type $[m,M]$ (et pas $]m,M[$ par exemple).
2. Montrons maintenant que $f(I)$ est un intervalle fermé. Sachant déjà que $f(I)$ est un intervalle borné, notons m et M ses extrémités : $m = \inf f(I)$ et $M = \sup f(I)$. Supposons par l'absurde que $M \notin f(I)$. Alors pour $t \in [a,b]$, $M > f(t)$. La fonction $g : t \mapsto \frac{1}{M-f(t)}$ est donc bien définie. La fonction g est continue sur I donc d'après le premier point de cette preuve (appliqué à g) elle est bornée, disons par un réel K. Mais il existe $y_n \to M$, $y_n \in f(I)$. Donc il existe $x_n \in [a,b]$ tel que $y_n = f(x_n) \to M$ et alors $g(x_n) = \frac{1}{M-f(x_n)} \to +\infty$. Cela contredit que g soit une fonction bornée par K. Bilan : $M \in f(I)$. De même on a $m \in f(I)$. Conclusion finale : $f(I) = [m,M]$.

□

Mini-exercices.

1. Soient $P(x) = x^5 - 3x - 2$ et $f(x) = x2^x - 1$ deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Montrer que l'équation $P(x) = 0$ a au moins une racine dans $[1,2]$; l'équation $f(x) = 0$ a au moins une racine dans $[0,1]$; l'équation $P(x) = f(x)$ a au moins une racine dans $]0,2[$.
2. Montrer qu'il existe $x > 0$ tel que $2^x + 3^x = 7^x$.
3. Dessiner le graphe d'une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $f(\mathbb{R}) = [0,1]$. Puis $f(\mathbb{R}) =]0,1[$; $f(\mathbb{R}) = [0,1[$; $f(\mathbb{R}) =]-\infty,1]$, $f(\mathbb{R}) =]-\infty,1[$.
4. Soient $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Quelles sont, parmi les fonctions suivantes, celles dont on peut affirmer qu'elles sont bornées : $f+g$, $f \times g$, f/g ?
5. Soient f et g deux fonctions continues sur $[0,1]$ telles que $\forall x \in [0,1]\ f(x) < g(x)$. Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que $\forall x \in [0,1]\ f(x) + m < g(x)$. Ce résultat est-il vrai si on remplace $[0,1]$ par $\mathbb{R}$?

5. Fonctions monotones et bijections

5.1. Rappels : injection, surjection, bijection

Dans cette section nous rappelons le matériel nécessaire concernant les applications bijectives.

Définition 13.
Soit $f : E \to F$ une fonction, où E et F sont des parties de $\mathbb{R}$.

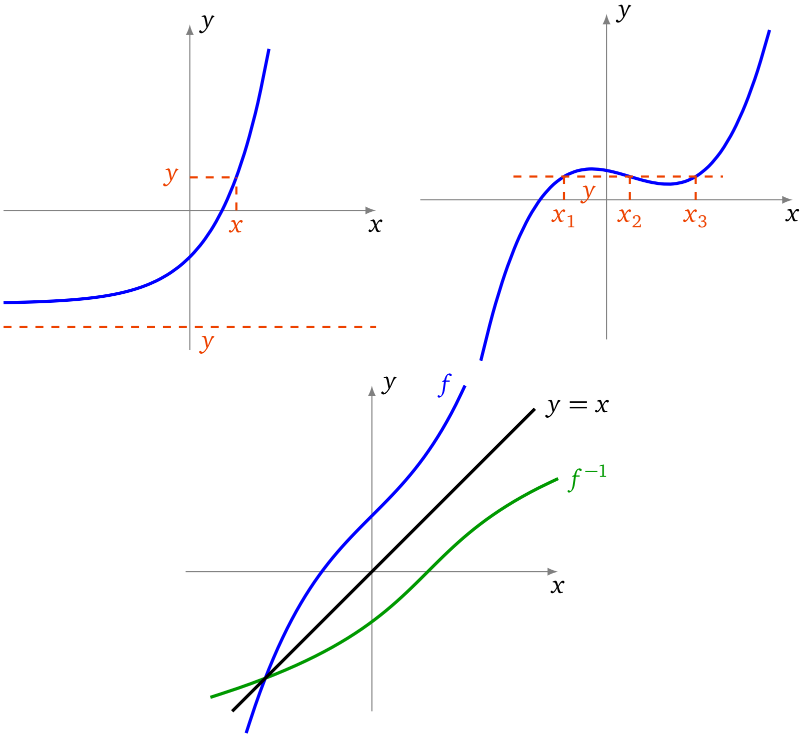
- f est ***injective*** si $\forall x, x' \in E \quad f(x) = f(x') \implies x = x'$;
- f est ***surjective*** si $\forall y \in F \quad \exists x \in E \quad y = f(x)$;
- f est ***bijective*** si f est à la fois injective et surjective, c'est-à-dire si $\forall y \in F \quad \exists! x \in E \quad y = f(x)$.

Proposition 8.
Si $f : E \to F$ est une fonction bijective alors il existe une unique application $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$. La fonction g est la **bijection réciproque** *de f et se note f^{-1}.*

Remarque.

- On rappelle que l'***identité***, $\mathrm{id}_E : E \to E$ est simplement définie par $x \mapsto x$.
- $g \circ f = \mathrm{id}_E$ se reformule ainsi : $\forall x \in E \quad g\big(f(x)\big) = x$.
- Alors que $f \circ g = \mathrm{id}_F$ s'écrit : $\forall y \in F \quad f\big(g(y)\big) = y$.
- Dans un repère orthonormé les graphes des fonctions f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

Voici le graphe d'une fonction injective (à gauche), d'une fonction surjective (à droite) et enfin le graphe d'une fonction bijective ainsi que le graphe de sa bijection réciproque.

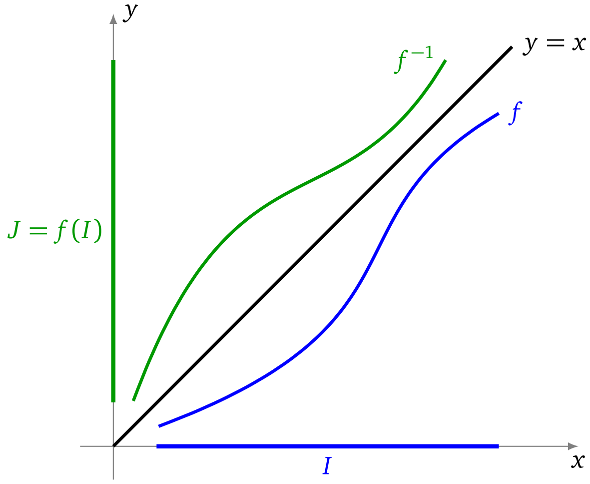


5.2. Fonctions monotones et bijections

Voici un théorème très utilisé dans la pratique pour montrer qu'une fonction est bijective.

Théorème 3 (Théorème de la bijection).
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si f est continue et strictement monotone sur I, alors

1. *f établit une bijection de l'intervalle I dans l'intervalle image $J = f(I)$,*
2. *la fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue et strictement monotone sur J et elle a le même sens de variation que f.*



En pratique, si on veut appliquer ce théorème à une fonction continue $f : I \to \mathbb{R}$, on découpe l'intervalle I en sous-intervalles sur lesquels la fonction f est strictement monotone.

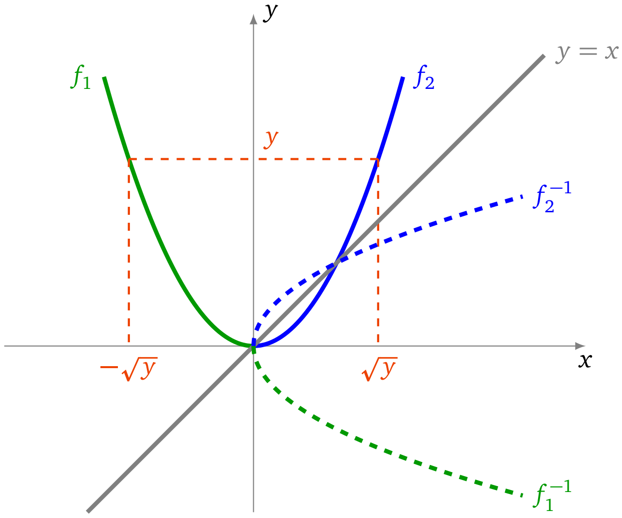
Exemple 14.
Considérons la fonction carrée définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. La fonction f n'est pas strictement monotone sur $\mathbb{R}$: elle n'est pas même pas injective car un nombre et son opposé ont même carré. Cependant, en restreignant son ensemble de définition à $]-\infty, 0]$ d'une part et à $[0, +\infty[$ d'autre part, on définit deux fonctions strictement monotones :

$$f_1 : \left\{ \begin{array}{ccc}]-\infty, 0] & \longrightarrow & [0, +\infty[\\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad f_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \longrightarrow & [0, +\infty[\\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$$

On remarque que $f(]-\infty, 0]) = f([0, +\infty[) = [0, +\infty[$. D'après le théorème précédent, les fonctions f_1 et f_2 sont des bijections. Déterminons leurs fonctions réciproques $f_1^{-1} : [0, +\infty[\to]-\infty, 0]$ et $f_2^{-1} : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$. Soient deux réels x et y tels que $y \geqslant 0$. Alors

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff y = x^2 \\ &\iff x = \sqrt{y} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{y}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire y admet (au plus) deux antécédents, l'un dans $[0, +\infty[$ et l'autre dans $]-\infty, 0]$. Et donc $f_1^{-1}(y) = -\sqrt{y}$ et $f_2^{-1}(y) = \sqrt{y}$. On vérifie bien que chacune des deux fonctions f_1 et f_2 a le même sens de variation que sa réciproque.



On remarque que la courbe totale en pointillé (à la fois la partie bleue et la verte), qui est l'image du graphe de f par la symétrie par rapport à la première bissectrice, ne peut pas être le graphe d'une fonction : c'est une autre manière de voir que f n'est pas bijective.

Généralisons en partie l'exemple précédent.

Exemple 15.
Soit $n \geqslant 1$. Soit $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ définie par $f(x) = x^n$. Alors f est continue et strictement croissante. Comme $\lim_{+\infty} f = +\infty$ alors f est une bijection. Sa bijection réciproque f^{-1} est notée : $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ (ou aussi $x \mapsto \sqrt[n]{x}$) : c'est la fonction racine n-ième. Elle est continue et strictement croissante.

5.3. Démonstration

On établit d'abord un lemme utile à la démonstration du « théorème de la bijection ».

Lemme 2.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si f est strictement monotone sur I, alors f est injective sur I.

Démonstration. Soient $x, x' \in I$ tels que $f(x) = f(x')$. Montrons que $x = x'$. Si on avait $x < x'$, alors on aurait nécessairement $f(x) < f(x')$ ou $f(x) > f(x')$, suivant que f est strictement croissante, ou strictement décroissante. Comme c'est impossible, on en déduit que $x \geqslant x'$. En échangeant les rôles de x et de x', on montre de même que $x \leqslant x'$. On en conclut que $x = x'$ et donc que f est injective. □

Démonstration du théorème.

1. D'après le lemme précédent, f est injective sur I. En restreignant son ensemble d'arrivée à son image $J = f(I)$, on obtient que f établit une bijection de I dans J. Comme f est continue, par le théorème des valeurs intermédiaires, l'ensemble J est un intervalle.
2. Supposons pour fixer les idées que f est strictement croissante.
   (a) Montrons que f^{-1} est strictement croissante sur J. Soient $y, y' \in J$ tels que $y < y'$. Notons $x = f^{-1}(y) \in I$ et $x' = f^{-1}(y') \in I$. Alors $y = f(x)$, $y' = f(x')$ et donc
   $$\begin{aligned} y < y' &\implies f(x) < f(x') \\ &\implies x < x' \qquad \text{(car } f \text{ est strictement croissante)} \\ &\implies f^{-1}(y) < f^{-1}(y'), \end{aligned}$$
   c'est-à-dire f^{-1} est strictement croissante sur J.

(b) Montrons que f^{-1} est continue sur J. On se limite au cas où I est de la forme $]a,b[$, les autres cas se montrent de la même manière. Soit $y_0 \in J$. On note $x_0 = f^{-1}(y_0) \in I$. Soit $\epsilon > 0$. On peut toujours supposer que $[x_0-\epsilon, x_0+\epsilon] \subset I$. On cherche un réel $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in J$ on ait

$$y_0-\delta < y < y_0+\delta \implies f^{-1}(y_0)-\epsilon < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0)+\epsilon$$

c'est-à-dire tel que pour tout $x \in I$ on ait

$$y_0-\delta < f(x) < y_0+\delta \implies f^{-1}(y_0)-\epsilon < x < f^{-1}(y_0)+\epsilon.$$

Or, comme f est strictement croissante, on a pour tout $x \in I$

$$\begin{aligned} f(x_0-\epsilon) < f(x) < f(x_0+\epsilon) &\implies x_0-\epsilon < x < x_0+\epsilon \\ &\implies f^{-1}(y_0)-\epsilon < x < f^{-1}(y_0)+\epsilon. \end{aligned}$$

Comme $f(x_0-\epsilon) < y_0 < f(x_0+\epsilon)$, on peut choisir le réel $\delta > 0$ tel que

$$f(x_0-\epsilon) < y_0-\delta \quad \text{et} \quad f(x_0+\epsilon) > y_0+\delta$$

et on a bien alors pour tout $x \in I$

$$\begin{aligned} y_0-\delta < f(x) < y_0+\delta &\implies f(x_0-\epsilon) < f(x) < f(x_0+\epsilon) \\ &\implies f^{-1}(y_0)-\epsilon < x < f^{-1}(y_0)+\epsilon. \end{aligned}$$

La fonction f^{-1} est donc continue sur J.

□

Mini-exercices.

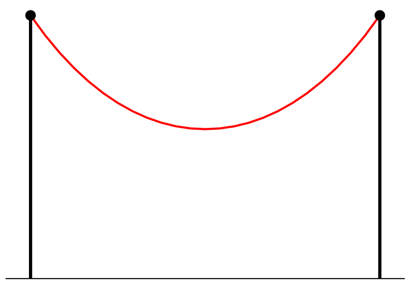
1. Montrer que chacune des hypothèses « continue » et « strictement monotone » est nécessaire dans l'énoncé du théorème de la bijection.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 + x$. Montrer que f est bijective, tracer le graphe de f et de f^{-1}.
3. Soit $n \geqslant 1$. Montrer que $f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$ définit une bijection de l'intervalle $[0,1]$ vers un intervalle à préciser.
4. Existe-t-il une fonction continue : $f : [0,1[\to]0,1[$ qui soit bijective ? $f : [0,1[\to]0,1[$ qui soit injective ? $f :]0,1[\to [0,1]$ qui soit surjective ?
5. Pour $y \in \mathbb{R}$ on considère l'équation $x + \exp x = y$. Montrer qu'il existe une unique solution y. Comment varie y en fonction de x ? Comme varie x en fonction de y ?

Fonctions usuelles

Chapitre 5

Vous connaissez déjà des fonctions classiques : exp, ln, cos, sin, tan. Dans ce chapitre il s'agit d'ajouter à notre catalogue de nouvelles fonctions : ch, sh, th, arccos, arcsin, arctan, Argch, Argsh, Argth.
Ces fonctions apparaissent naturellement dans la résolution de problèmes simples, en particulier issus de la physique. Par exemple lorsqu'un fil est suspendu entre deux poteaux (ou un collier tenu entre deux mains) alors la courbe dessinée est une ***chaînette*** dont l'équation fait intervenir le cosinus hyperbolique et un paramètre a (qui dépend de la longueur du fil et de l'écartement des poteaux) :

$$y = a\,\mathrm{ch}\left(\frac{x}{a}\right)$$



1. Logarithme et exponentielle

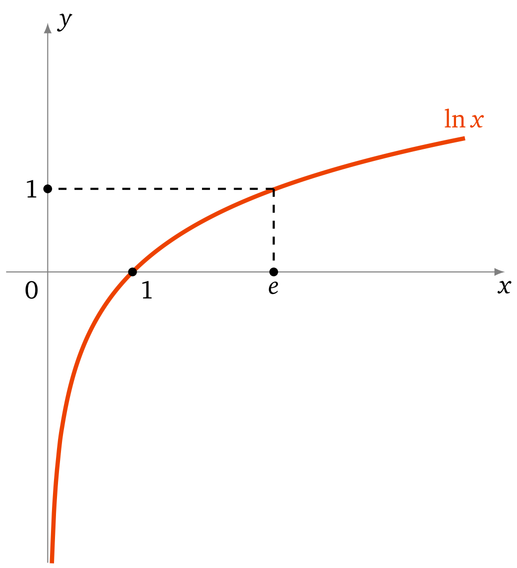
1.1. Logarithme

Proposition 1.
Il existe une unique fonction, notée $\ln :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ *telle que :*

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} \quad (\textit{pour tout } x > 0) \qquad \textit{et} \qquad \ln(1) = 0.$$

De plus cette fonction vérifie (pour tout $a, b > 0$*) :*

1. $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$,
2. $\ln(\frac{1}{a}) = -\ln a$,
3. $\ln(a^n) = n \ln a$, *(pour tout* $n \in \mathbb{N}$*)*
4. $\ln$ *est une fonction continue, strictement croissante et définit une bijection de* $]0,+\infty[$ *sur* $\mathbb{R}$,
5. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$,
6. *la fonction* $\ln$ *est concave et* $\ln x \leqslant x - 1$ *(pour tout* $x > 0$*).*



Remarque.
$\ln x$ s'appelle le ***logarithme naturel*** ou aussi ***logarithme néperien***. Il est caractérisé par $\ln(e) = 1$.
On définit le ***logarithme en base a*** par

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

De sorte que $\log_a(a) = 1$.
Pour $a = 10$ on obtient le ***logarithme décimal*** $\log_{10}$ qui vérifie $\log_{10}(10) = 1$ (et donc $\log_{10}(10^n) = n$).
Dans la pratique on utilise l'équivalence :

$$\boxed{x = 10^y \iff y = \log_{10}(x)}$$

En informatique intervient aussi le logarithme en base 2 : $\log_2(2^n) = n$.

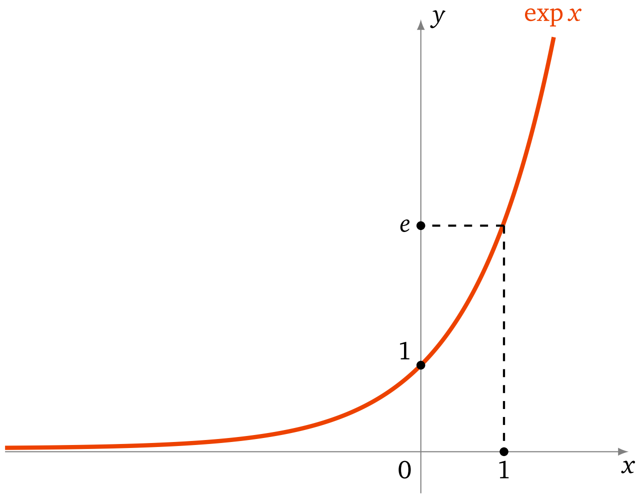
Démonstration. L'existence et l'unicité viennent de la théorie de l'intégrale : $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$. Passons aux propriétés.

1. Posons $f(x) = \ln(xy) - \ln(x)$ où $y > 0$ est fixé. Alors $f'(x) = y\ln'(xy) - \ln'(x) = \frac{y}{xy} - \frac{1}{x} = 0$. Donc $x \mapsto f(x)$ a une dérivée nulle, donc est constante et vaut $f(1) = \ln(y) - \ln(1) = \ln(y)$. Donc $\ln(xy) - \ln(x) = \ln(y)$.
2. D'une part $\ln(a \times \frac{1}{a}) = \ln a + \ln \frac{1}{a}$, mais d'autre part $\ln(a \times \frac{1}{a}) = \ln(1) = 0$. Donc $\ln a + \ln \frac{1}{a} = 0$.
3. Similaire ou récurrence.
4. ln est dérivable donc continue, $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$ donc la fonction est strictement croissante. Comme $\ln(2) > \ln(1) = 0$ alors $\ln(2^n) = n\ln(2) \to +\infty$ (lorsque $n \to +\infty$). Donc $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$. De $\ln x = -\ln \frac{1}{x}$ on déduit $\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$. Par le théorème sur les fonctions continues et strictement croissantes, $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est une bijection.
5. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ est la dérivée de ln au point $x_0 = 1$, donc cette limite existe et vaut $\ln'(1) = 1$.
6. $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ est décroissante, donc la fonction ln est concave. Posons $f(x) = x - 1 - \ln x$; $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$. Par une étude de fonction f atteint son minimum en $x_0 = 1$. Donc $f(x) \geqslant f(1) = 0$. Donc $\ln x \leqslant x - 1$.

$\square$

1.2. Exponentielle

Définition 1.
La bijection réciproque de $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ s'appelle la fonction ***exponentielle***, notée $\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$.



Pour $x \in \mathbb{R}$ on note aussi e^x pour $\exp x$.

Proposition 2.
La fonction exponentielle vérifie les propriétés suivantes :
- $\boxed{\exp(\ln x) = x \textit{ pour tout } x > 0}$ *et* $\boxed{\ln(\exp x) = x \textit{ pour tout } x \in \mathbb{R}}$
- $\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$
- $\exp(nx) = (\exp x)^n$
- $\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ *est une fonction continue, strictement croissante vérifiant* $\lim_{x \to -\infty} \exp x = 0$ *et* $\lim_{x \to +\infty} \exp = +\infty$.
- *La fonction exponentielle est dérivable et* $\exp' x = \exp x$, *pour tout* $x \in \mathbb{R}$. *Elle est convexe et* $\exp x \geqslant 1 + x$.

Remarque.
La fonction exponentielle est l'unique fonction qui vérifie $\exp'(x) = \exp(x)$ (pour tout $x \in \mathbb{R}$) et $\exp(1) = e$. Où $e \simeq 2,718\ldots$ est le nombre qui vérifie $\ln e = 1$.

Démonstration. Ce sont les propriétés du logarithme retranscrites pour sa bijection réciproque.
Par exemple pour la dérivée : on part de l'égalité $\ln(\exp x) = x$ que l'on dérive. Cela donne $\exp'(x) \times \ln'(\exp x) = 1$ donc $\exp'(x) \times \frac{1}{\exp x} = 1$ et ainsi $\exp'(x) = \exp x$. □

1.3. Puissance et comparaison

Par définition, pour $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{a^b = \exp\left(b \ln a\right)}$$

Remarque.
- $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} = \exp\left(\frac{1}{2} \ln a\right)$
- $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n} \ln a\right)$ (la ***racine n-ème*** de a)
- On note aussi $\exp x$ par e^x ce qui se justifie par le calcul : $e^x = \exp\left(x \ln e\right) = \exp(x)$.

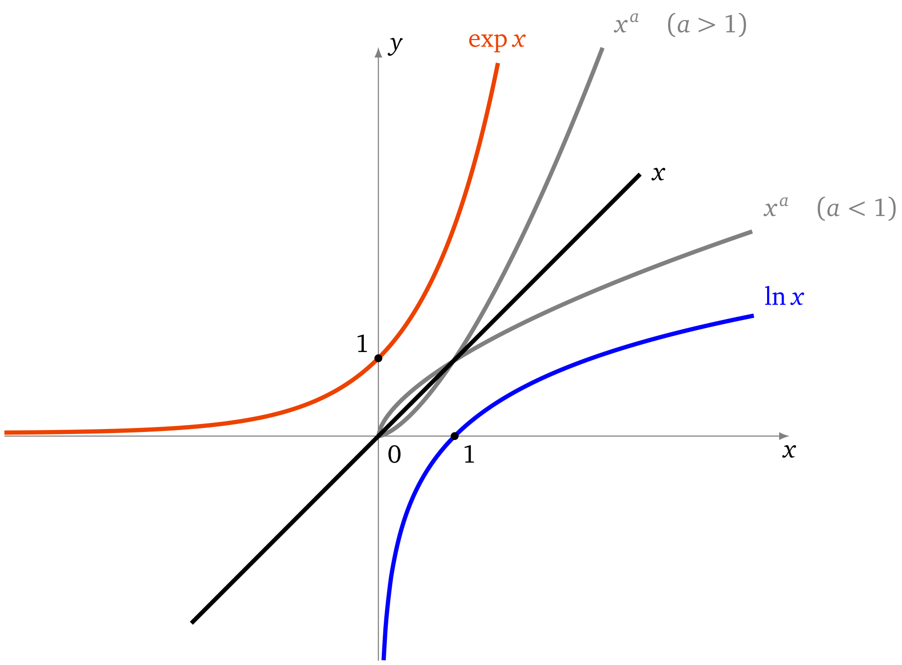
- Les fonctions $x \mapsto a^x$ s'appellent aussi des fonctions exponentielles et se ramènent systématiquement à la fonction exponentielle classique par l'égalité $a^x = \exp(x \ln a)$. Il ne faut surtout pas les confondre avec les fonctions puissances $x \mapsto x^a$.

Proposition 3.
Soit $x, y > 0$ *et* $a, b \in \mathbb{R}$.
- $\boxed{x^{a+b} = x^a x^b}$
- $\boxed{x^{-a} = \frac{1}{x^a}}$
- $\boxed{(xy)^a = x^a y^a}$
- $\boxed{(x^a)^b = x^{ab}}$
- $\boxed{\ln(x^a) = a \ln x}$

Comparons les fonctions $\ln x$, $\exp x$ avec x :

Proposition 4.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\exp x}{x} = +\infty.$$



Démonstration.
1. On a vu $\ln x \leqslant x - 1$ (pour tout $x > 0$). Donc $\ln x \leqslant x$ donc $\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \leqslant 1$. Cela donne
$$0 \leqslant \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln\left(\sqrt{x}^2\right)}{x} = 2\frac{\ln \sqrt{x}}{x} = 2\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{x}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{x}}$$
Cette double inégalité entraîne $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.
2. On a vu $\exp x \geqslant 1 + x$ (pour tout $x \in \mathbb{R}$). Donc $\exp x \to +\infty$ (lorsque $x \to +\infty$).
$$\frac{x}{\exp x} = \frac{\ln(\exp x)}{\exp x} = \frac{\ln u}{u}$$
Lorsque $x \to +\infty$ alors $u = \exp x \to +\infty$ et donc par le premier point $\frac{\ln u}{u} \to 0$. Donc $\frac{x}{\exp x} \to 0$ et reste positive, ainsi $\lim_{x \to +\infty} \frac{\exp x}{x} = +\infty$.

$\square$

Mini-exercices.

1. Montrer que $\ln(1+e^x) = x + \ln(1+e^{-x})$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Étudier la fonction $f(x) = \ln(x^2+1) - \ln(x) - 1$. Tracer son graphe. Résoudre l'équation $(f(x) = 0)$. Idem avec $g(x) = \frac{1+\ln x}{x}$. Idem avec $h(x) = x^x$.
3. Expliquer comment $\log_{10}$ permet de calculer le nombre de chiffres d'un entier n.
4. Montrer $\ln(1+x) \geqslant x - \frac{x^2}{2}$ pour $x \geqslant 0$ (faire une étude de fonction). Idem avec $e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2}$ pour tout $x \geqslant 0$.
5. Calculer la limite de la suite définie par $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ lorsque $n \to +\infty$. Idem avec $v_n = \left(\frac{1}{n}\right)^n$ et $w_n = n^{\frac{1}{n}}$.

2. Fonctions circulaires inverses

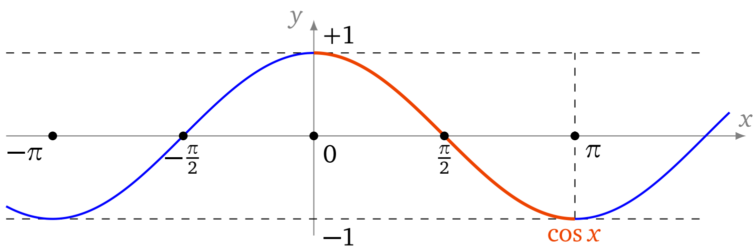
2.1. Arccosinus

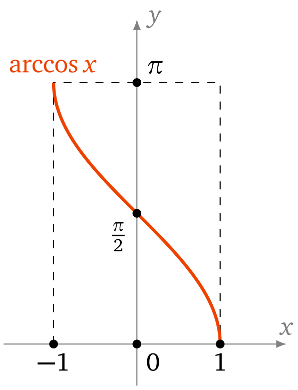
Considérons la fonction cosinus $\cos : \mathbb{R} \to [-1,1]$, $x \mapsto \cos x$. Pour obtenir une bijection à partir de cette fonction, il faut considérer la restriction de cosinus à l'intervalle $[0,\pi]$. Sur cet intervalle la fonction cosinus est continue et strictement décroissante, donc la restriction

$$\cos_| : [0,\pi] \to [-1,1]$$

est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction ***arccosinus*** :

$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$$





On a donc, par définition de la bijection réciproque :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \cos\big(\arccos(x)\big) = x & \forall x \in [-1,1] \\ \arccos\big(\cos(x)\big) = x & \forall x \in [0,\pi] \end{array}}$$

Autrement dit :

$$\boxed{\text{Si} \quad x \in [0,\pi] \qquad \cos(x) = y \iff x = \arccos y}$$

Terminons avec la dérivée de arccos :

$$\boxed{\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \forall x \in]-1,1[}$$

Démonstration. On démarre de l'égalité $\cos(\arccos x) = x$ que l'on dérive :

$$\begin{aligned}
& \cos(\arccos x) = x \\
\implies & -\arccos'(x) \times \sin(\arccos x) = 1 \\
\implies & \arccos'(x) = \frac{-1}{\sin(\arccos x)} \\
\implies & \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}} \qquad (*) \\
\implies & \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}$$

Le point crucial $(*)$ se justifie ainsi : on démarre de l'égalité $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$, en substituant $y = \arccos x$ on obtient $\cos^2(\arccos x) + \sin^2(\arccos x) = 1$ donc $x^2 + \sin^2(\arccos x) = 1$. On en déduit : $\sin(\arccos x) = +\sqrt{1-x^2}$ (avec le signe + car $\arccos x \in [0, \pi]$, et donc on a $\sin(\arccos x) \geqslant 0$). □

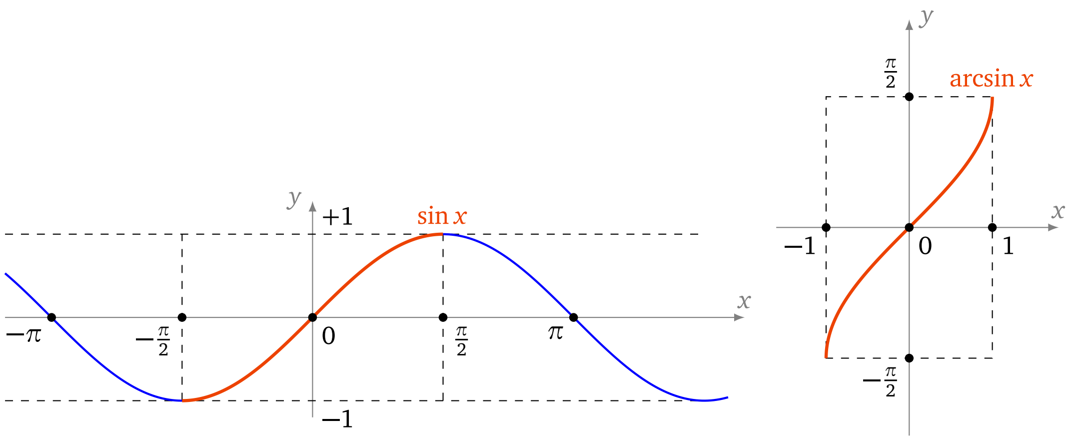
2.2. Arcsinus

La restriction

$$\sin_| : [-\tfrac{\pi}{2}, +\tfrac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$$

est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction ***arcsinus*** :

$$\arcsin : [-1, 1] \to [-\tfrac{\pi}{2}, +\tfrac{\pi}{2}]$$



$$\boxed{\begin{array}{ll} \sin\big(\arcsin(x)\big) = x & \forall x \in [-1, 1] \\ \arcsin\big(\sin(x)\big) = x & \forall x \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}] \end{array}}$$

$$\boxed{\text{Si} \quad x \in [-\tfrac{\pi}{2}, +\tfrac{\pi}{2}] \qquad \sin(x) = y \iff x = \arcsin y}$$

$$\boxed{\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \forall x \in]-1, 1[}$$

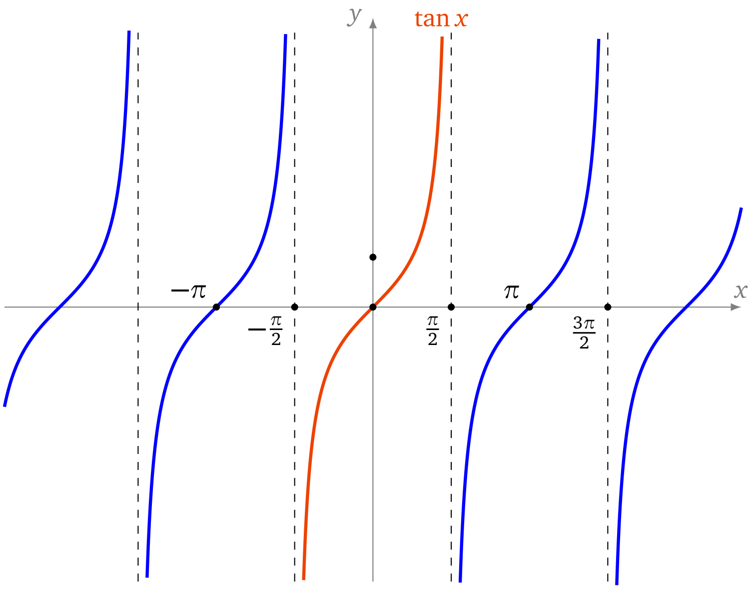
2.3. Arctangente

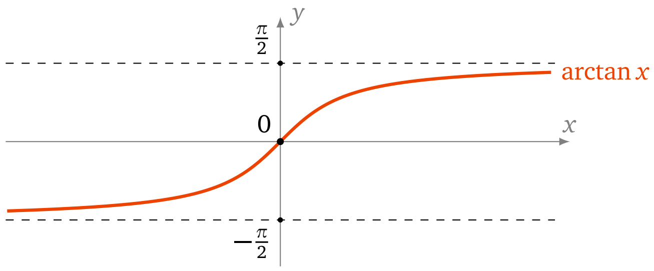
La restriction

$$\tan_| :]-\tfrac{\pi}{2}, +\tfrac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$$

est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction ***arctangente*** :

$$\arctan : \mathbb{R} \to]-\tfrac{\pi}{2}, +\tfrac{\pi}{2}[$$





$$\boxed{\begin{array}{ll} \tan\big(\arctan(x)\big) = x & \forall x \in \mathbb{R} \\ \arctan\big(\tan(x)\big) = x & \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[\end{array}}$$

$$\boxed{\text{Si} \quad x \in \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[\qquad \tan(x) = y \iff x = \arctan y}$$

$$\boxed{\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}}$$

Mini-exercices.

1. Calculer les valeurs de arccos et arcsin en 0, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Idem pour arctan en 0, 1, $\sqrt{3}$ et $\frac{1}{\sqrt{3}}$.
2. Calculer $\arccos(\cos\frac{7\pi}{3})$. Idem avec $\arcsin(\sin\frac{7\pi}{3})$ et $\arctan(\tan\frac{7\pi}{3})$ (attention aux intervalles !)
3. Calculer $\cos(\arctan x)$, $\cos(\arcsin x)$, $\tan(\arcsin x)$.
4. Calculer la dérivée de $f(x) = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$. En déduire que $f(x) = \arcsin x$, pour tout $x \in]-1,1[$.
5. Montrer que $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$, pour tout $x \in [-1,1]$.

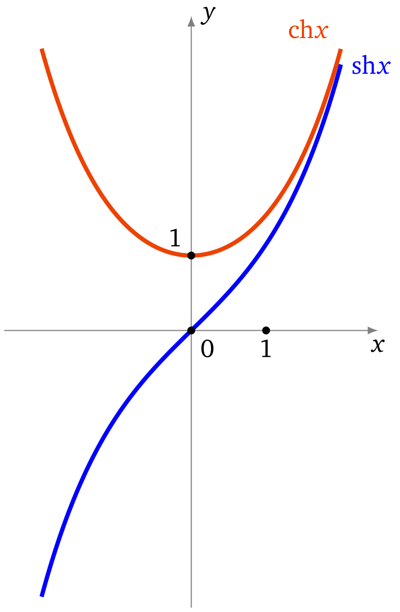
3. Fonctions hyperboliques et hyperboliques inverses

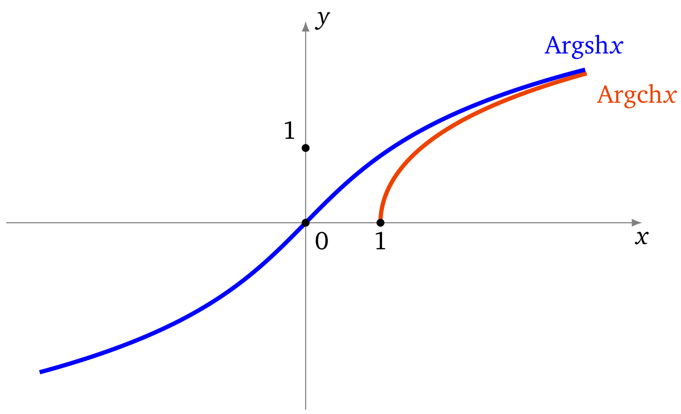
3.1. Cosinus hyperbolique et son inverse

Pour $x \in \mathbb{R}$, le ***cosinus hyperbolique*** est :

$$\boxed{\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}}$$

La restriction $\operatorname{ch}_| : [0,+\infty[\to [1,+\infty[$ est une bijection. Sa bijection réciproque est $\operatorname{Argch} : [1,+\infty[\to [0,+\infty[$.





3.2. Sinus hyperbolique et son inverse

Pour $x \in \mathbb{R}$, le ***sinus hyperbolique*** est :

$$\boxed{\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}}$$

$\operatorname{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, dérivable, strictement croissante vérifiant $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{sh} x = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sh} x = +\infty$, c'est donc une bijection. Sa bijection réciproque est $\operatorname{Argsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Proposition 5.

- $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$
- $\operatorname{ch}' x = \operatorname{sh} x, \ \operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x$
- $\operatorname{Argsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est strictement croissante et continue.*
- Argsh *est dérivable et* $\operatorname{Argsh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.
- $\operatorname{Argsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

Démonstration.

- $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{4}\left[(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2\right] = \frac{1}{4}\left[(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})\right] = 1.$
- $\frac{d}{dx}(\operatorname{ch} x) = \frac{d}{dx}\frac{e^x+e^{-x}}{2} = \frac{e^x-e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x$. Idem pour la dérivée de $\operatorname{sh} x$.
- Car c'est la réciproque de sh.

- Comme la fonction $x \mapsto \mathrm{sh}' x$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ alors la fonction Argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$. On calcule la dérivée par dérivation de l'égalité $\mathrm{sh}(\mathrm{Argsh}\, x) = x$:
$$\mathrm{Argsh}' x = \frac{1}{\mathrm{ch}(\mathrm{Argsh}\, x)} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{sh}^2(\mathrm{Argsh}\, x) + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$
- Notons $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ alors
$$f'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \mathrm{Argsh}' x$$
Comme de plus $f(0) = \ln(1) = 0$ et $\mathrm{Argsh}\, 0 = 0$ (car $\mathrm{sh}\, 0 = 0$), on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{Argsh}\, x$.

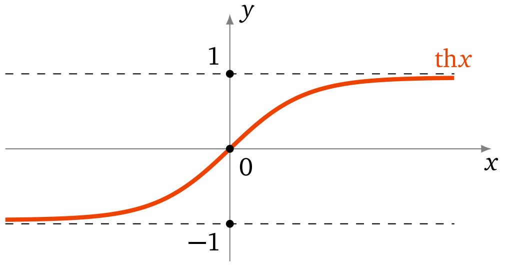
□

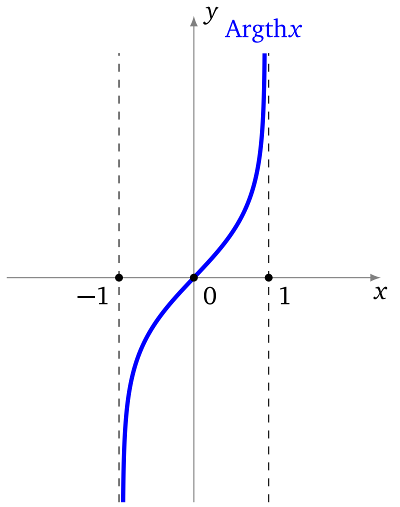
3.3. Tangente hyperbolique et son inverse

Par définition la ***tangente hyperbolique*** est :

$$\boxed{\mathrm{th}\, x = \frac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x}}$$

La fonction $\mathrm{th} : \mathbb{R} \to]-1,1[$ est une bijection, on note $\mathrm{Argth} :]-1,1[\to \mathbb{R}$ sa bijection réciproque.





3.4. Trigonométrie hyperbolique

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$$

$$\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}\, a \cdot \mathrm{ch}\, b + \mathrm{sh}\, a \cdot \mathrm{sh}\, b$$
$$\mathrm{ch}(2a) = \mathrm{ch}^2 a + \mathrm{sh}^2 a = 2\,\mathrm{ch}^2 a - 1 = 1 + 2\,\mathrm{sh}^2 a$$

$$\mathrm{sh}(a+b) = \mathrm{sh}\, a \cdot \mathrm{ch}\, b + \mathrm{sh}\, b \cdot \mathrm{ch}\, a$$
$$\mathrm{sh}(2a) = 2\,\mathrm{sh}\, a \cdot \mathrm{ch}\, a$$

$$\mathrm{th}(a+b) = \frac{\mathrm{th}\, a + \mathrm{th}\, b}{1 + \mathrm{th}\, a \cdot \mathrm{th}\, b}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}' x &= \operatorname{sh} x \\
\operatorname{sh}' x &= \operatorname{ch} x \\
\operatorname{th}' x &= 1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Argch}' x &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (x > 1) \\
\operatorname{Argsh}' x &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \\
\operatorname{Argth}' x &= \frac{1}{1-x^2} \quad (|x| < 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Argch} x &= \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \quad (x \geqslant 1) \\
\operatorname{Argsh} x &= \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \quad (x \in \mathbb{R}) \\
\operatorname{Argth} x &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad (-1 < x < 1)
\end{aligned}$$

Mini-exercices.

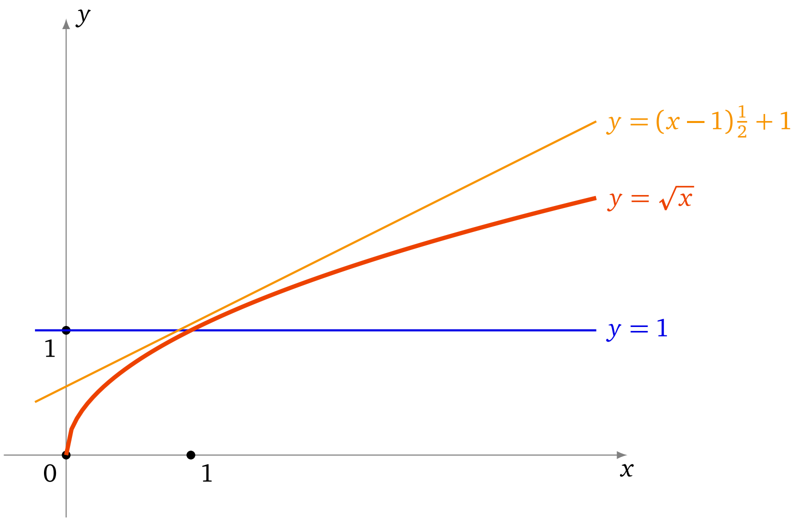
1. Dessiner les courbes paramétrées $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ et $t \mapsto (\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)$. Pourquoi cos et sin s'appellent des fonctions trigonométriques *circulaires* alors que ch et sh sont des fonctions trigonométriques *hyperboliques* ?
2. Prouver par le calcul la formule $\operatorname{ch}(a+b) = \ldots$ En utilisant que $\cos x = \frac{e^{\mathrm{i}x}+e^{-\mathrm{i}x}}{2}$ retrouver la formule pour $\cos(a+b)$.
3. Résoudre l'équation $\operatorname{sh} x = 3$.
4. Montrer que $\frac{\operatorname{sh}(2x)}{1+\operatorname{ch}(2x)} = \operatorname{th} x$.
5. Calculer les dérivées des fonctions définies par : $\operatorname{th}(1+x^2)$, $\ln(\operatorname{ch} x)$, $\operatorname{Argch}(\exp x)$, $\operatorname{Argth}(\cos x)$.

Chapitre 6

Dérivée d'une fonction

Motivation

Nous souhaitons calculer $\sqrt{1,01}$ ou du moins en trouver une valeur approchée. Comme $1,01$ est proche de 1 et que $\sqrt{1} = 1$ on se doute bien que $\sqrt{1,01}$ sera proche de 1. Peut-on être plus précis ? Si l'on appelle f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x}$, alors la fonction f est une fonction continue en $x_0 = 1$. La continuité nous affirme que pour x suffisamment proche de x_0, $f(x)$ est proche de $f(x_0)$. Cela revient à dire que pour x au voisinage de x_0 on approche $f(x)$ par la constante $f(x_0)$.



Nous pouvons faire mieux qu'approcher notre fonction par une droite horizontale ! Essayons avec une droite quelconque. Quelle droite se rapproche le plus du graphe de f autour de x_0 ? Elle doit passer par le point $(x_0, f(x_0))$ et doit « coller » le plus possible au graphe : c'est la tangente au graphe en x_0. Une équation de la tangente est

$$y = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0)$$

où $f'(x_0)$ désigne le nombre dérivé de f en x_0.
On sait que pour $f(x) = \sqrt{x}$, on a $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Une équation de la tangente en $x_0 = 1$ est donc $y = (x-1)\frac{1}{2} + 1$. Et donc pour x proche de 1 on a $f(x) \approx (x-1)\frac{1}{2} + 1$. Qu'est-ce que cela donne pour notre calcul de $\sqrt{1,01}$? On pose $x = 1,01$ donc $f(x) \approx 1 + \frac{1}{2}(x-1) = 1 + \frac{0,01}{2} = 1,005$. Et c'est effectivement une très bonne de approximation de $\sqrt{0,01} = 1,00498\ldots$. En posant $h = x - 1$ on peut reformuler notre approximation en : $\sqrt{1+h} \approx 1 + \frac{1}{2}h$ qui est valable pour h proche de 0.
Dans ce chapitre nous allons donc définir ce qu'est la dérivée d'une fonction et établir les formules des dérivées des fonctions usuelles. Enfin, pour connaître l'erreur des approximations, il nous faudra travailler beaucoup plus afin d'obtenir le théorème des accroissements finis.

1. Dérivée

1.1. Dérivée en un point

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $x_0 \in I$.

Définition 1.
f est ***dérivable en x_0*** si le ***taux d'accroissement*** $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite finie lorsque x tend vers x_0. La limite s'appelle alors le ***nombre dérivé*** de f en x_0 et est noté $f'(x_0)$. Ainsi

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

Définition 2.
f est ***dérivable sur I*** si f est dérivable en tout point $x_0 \in I$. La fonction $x \mapsto f'(x)$ est la ***fonction dérivée*** de f, elle se note f' ou $\frac{df}{dx}$.

Exemple 1.
La fonction définie par $f(x) = x^2$ est dérivable en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$. En effet :

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = \frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0} = x + x_0 \xrightarrow[x\to x_0]{} 2x_0.$$

On a même montré que le nombre dérivé de f en x_0 est $2x_0$, autrement dit : $f'(x) = 2x$.

Exemple 2.
Montrons que la dérivée de $f(x) = \sin x$ est $f'(x) = \cos x$. Nous allons utiliser les deux assertions suivantes :

$$\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \qquad \text{et} \qquad \sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cdot\cos\frac{p+q}{2}.$$

Remarquons déjà que la première assertion prouve $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\sin x}{x} \to 1$ et donc f est dérivable en $x_0 = 0$ et $f'(0) = 1$.
Pour x_0 quelconque on écrit :

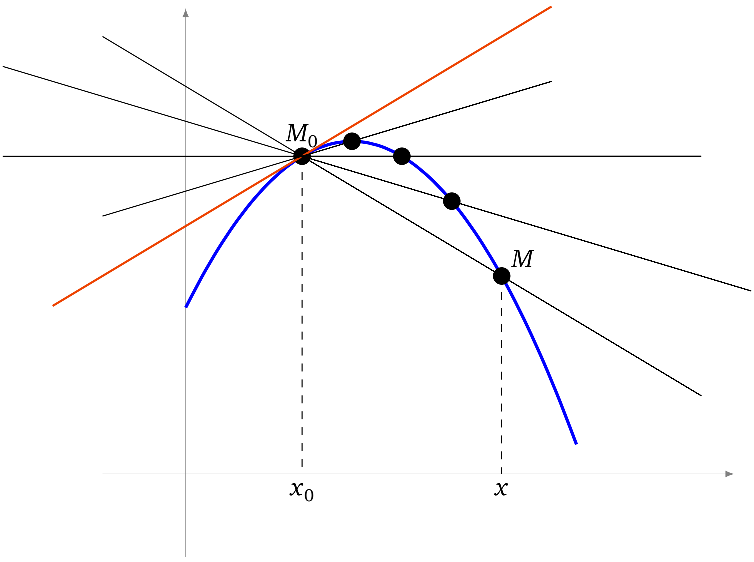
$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\sin x - \sin x_0}{x-x_0} = \frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}\cdot\cos\frac{x+x_0}{2}.$$

Lorsque $x \to x_0$ alors d'une part $\cos\frac{x+x_0}{2} \to \cos x_0$ et d'autre part en posant $u = \frac{x-x_0}{2}$ alors $u \to 0$ et on a $\frac{\sin u}{u} \to 1$. Ainsi $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \to \cos x_0$ et donc $f'(x) = \cos x$.

1.2. Tangente

La droite qui passe par les points distincts $(x_0, f(x_0))$ et $(x, f(x))$ a pour coefficient directeur $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. À la limite on trouve que le coefficient directeur de la tangente est $f'(x_0)$. Une équation de la ***tangente*** au point $(x_0, f(x_0))$ est donc :

$$\boxed{y = (x-x_0)f'(x_0) + f(x_0)}$$



1.3. Autres écritures de la dérivée

Voici deux autres formulations de la dérivabilité de f en x_0.

Proposition 1.

- *f est dérivable en x_0 si et seulement si $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existe et est finie.*
- *f est dérivable en x_0 si et seulement s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ (qui sera $f'(x_0)$) et une fonction $\epsilon : I \to \mathbb{R}$ telle que $\epsilon(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$ avec*

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)\ell + (x-x_0)\epsilon(x).$$

Démonstration. Il s'agit juste de reformuler la définition de $f'(x_0)$. Par exemple, après division par $x - x_0$, la deuxième écriture devient

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell + \epsilon(x).$$

□

Proposition 2.

Soit I un intervalle ouvert, $x_0 \in I$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

- *Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.*
- *Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I.*

Démonstration. Supposons f dérivable en x_0 et montrons qu'elle est aussi continue en ce point. Voici une démonstration concise : partant de l'écriture alternative donnée dans la proposition 1, nous écrivons

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{(x-x_0)\ell}_{\to 0} + \underbrace{(x-x_0)\epsilon(x)}_{\to 0}.$$

Donc $f(x) \to f(x_0)$ lorsque $x \to x_0$ et ainsi f est continue en x_0.

On reprend cette démonstration sans utiliser les limites mais uniquement la définition de continuité et dérivabilité : fixons $\epsilon' > 0$ et écrivons $f(x) = f(x_0) + (x-x_0)\ell + (x-x_0)\epsilon(x)$ grâce à la proposition 1, où $\epsilon(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$ et $\ell = f'(x_0)$. Choisissons $\delta > 0$ de sorte qu'il vérifie tous les points suivants :

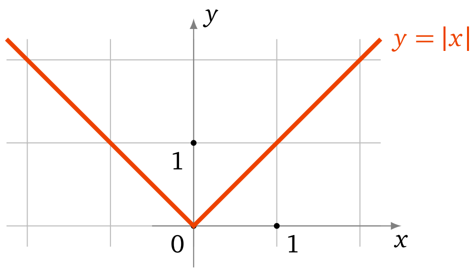
- $\delta \leqslant 1$,
- $\delta|\ell| < \epsilon'$,
- si $|x-x_0| < \delta$ alors $|\epsilon(x)| < \epsilon'$ (c'est possible car $\epsilon(x) \to 0$).

Alors l'égalité ci-dessus devient :

$$\begin{aligned}
\left|f(x)-f(x_0)\right| &= \left|(x-x_0)\ell+(x-x_0)\epsilon(x)\right| \\
&\leqslant |x-x_0|\cdot|\ell|+|x-x_0|\cdot|\epsilon(x)| \\
&\leqslant \delta|\ell| \quad + \quad \delta\epsilon' \qquad \text{pour } |x-x_0|<\delta \\
&\leqslant \epsilon'+\epsilon' = 2\epsilon'
\end{aligned}$$

Nous venons de prouver que si $|x-x_0|<\delta$ alors $\left|f(x)-f(x_0)\right|<2\epsilon'$, ce qui exprime exactement que f est continue en x_0. □

Remarque.
La réciproque est **fausse** : par exemple, la fonction valeur absolue est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.



En effet, le taux d'accroissement de $f(x)=|x|$ en $x_0=0$ vérifie :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{|x|}{x}=\begin{cases}+1 & \text{si } x>0\\ -1 & \text{si } x<0\end{cases}.$$

Il y a bien une limite à droite (qui vaut $+1$), une limite à gauche (qui vaut -1) mais elles ne sont pas égales : il n'y a pas de limite en 0. Ainsi f n'est pas dérivable en $x=0$.
Cela se lit aussi sur le dessin, il y a une demi-tangente à droite, une demi-tangente à gauche, mais elles ont des directions différentes.

Mini-exercices.

1. Montrer que la fonction $f(x)=x^3$ est dérivable en tout point $x_0\in\mathbb{R}$ et que $f'(x_0)=3x_0^2$.
2. Montrer que la fonction $f(x)=\sqrt{x}$ est dérivable en tout point $x_0>0$ et que $f'(x_0)=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$.
3. Montrer que la fonction $f(x)=\sqrt{x}$ (qui est continue en $x_0=0$) n'est pas dérivable en $x_0=0$.
4. Calculer l'équation de la tangente (T_0) à la courbe d'équation $y=x^3-x^2-x$ au point d'abscisse $x_0=2$. Calculer x_1 afin que la tangente (T_1) au point d'abscisse x_1 soit parallèle à (T_0).
5. Montrer que si une fonction f est paire et dérivable, alors f' est une fonction impaire.

2. Calcul des dérivées

2.1. Somme, produit,...

Proposition 3.
Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I. Alors pour tout $x \in I$:
- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$ *où λ est un réel fixé*
- $(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$ *(si $f(x) \neq 0$)*
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$ *(si $g(x) \neq 0$)*

Remarque.
Il est plus facile de mémoriser les égalités de fonctions :

$$\boxed{(f+g)' = f' + g' \qquad (\lambda f)' = \lambda f' \qquad (f \times g)' = f'g + fg'}$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}}$$

Démonstration. Prouvons par exemple $(f \times g)' = f'g + fg'$.
Fixons $x_0 \in I$. Nous allons réécrire le taux d'accroissement de $f(x) \times g(x)$:

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} f(x_0)$$
$$\xrightarrow[x \to x_0]{} f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0).$$

Ceci étant vrai pour tout $x_0 \in I$ la fonction $f \times g$ est dérivable sur I de dérivée $f'g + fg'$. □

2.2. Dérivée de fonctions usuelles

Le tableau de gauche est un résumé des principales formules à connaître, x est une variable. Le tableau de droite est celui des compositions (voir paragraphe suivant), u représente une fonction $x \mapsto u(x)$.

Fonction	Dérivée
x^n	$nx^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

Fonction	Dérivée
u^n	$nu'u^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{1}{2}\frac{u'}{\sqrt{u}}$
u^α	$\alpha u'u^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
e^u	$u'e^u$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$\cos u$	$-u' \sin u$
$\sin u$	$u' \cos u$
$\tan u$	$u'(1 + \tan^2 u) = \frac{u'}{\cos^2 u}$

Remarque.

- Notez que les formules pour x^n, $\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}$ et x^α sont aussi des conséquences de la dérivée de l'exponentielle. Par exemple $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ et donc
$$\frac{d}{dx}(x^\alpha) = \frac{d}{dx}(e^{\alpha \ln x}) = \alpha \frac{1}{x} e^{\alpha \ln x} = \alpha \frac{1}{x} x^\alpha = \alpha x^{\alpha - 1}.$$
- Si vous devez dériver une fonction avec un exposant dépendant de x il faut absolument repasser à la forme exponentielle. Par exemple si $f(x) = 2^x$ alors on réécrit d'abord $f(x) = e^{x \ln 2}$ pour pouvoir calculer $f'(x) = \ln 2 \cdot e^{x \ln 2} = \ln 2 \cdot 2^x$.

2.3. Composition

Proposition 4.
Si f est dérivable en x et g est dérivable en $f(x)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x de dérivée :

$$\boxed{\big(g \circ f\big)'(x) = g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x)}$$

Démonstration. La preuve est similaire à celle ci-dessus pour le produit en écrivant cette fois :
$$\begin{aligned}\frac{g \circ f(x) - g \circ f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{g\big(f(x)\big) - g\big(f(x_0)\big)}{f(x) - f(x_0)} \times \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &\xrightarrow[x \to x_0]{} g'\big(f(x_0)\big) \times f'(x_0).\end{aligned}$$
□

Exemple 3.
Calculons la dérivée de $\ln(1 + x^2)$. Nous avons $g(x) = \ln(x)$ avec $g'(x) = \frac{1}{x}$; et $f(x) = 1 + x^2$ avec $f'(x) = 2x$. Alors la dérivée de $\ln(1 + x^2) = g \circ f(x)$ est
$$\big(g \circ f\big)'(x) = g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x) = g'\big(1 + x^2\big) \cdot 2x = \frac{2x}{1 + x^2}.$$

Corollaire 1.
Soit I un intervalle ouvert. Soit $f : I \to J$ dérivable et bijective dont on note $f^{-1} : J \to I$ la bijection réciproque. Si f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable et on a pour tout $x \in J$:

$$\boxed{\big(f^{-1}\big)'(x) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)}}$$

Démonstration. Notons $g = f^{-1}$ la bijection réciproque de f. Soit $y_0 \in J$ et $x_0 \in I$ tel que $y_0 = f(x_0)$. Le taux d'accroissement de g en y_0 est :
$$\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{g(y) - x_0}{f\big(g(y)\big) - f(x_0)}$$
Lorsque $y \to y_0$ alors $g(y) \to g(y_0) = x_0$ et donc ce taux d'accroissement tend vers $\frac{1}{f'(x_0)}$. Ainsi $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$. □

Remarque.
Il peut être plus simple de retrouver la formule à chaque fois en dérivant l'égalité
$$f\big(g(x)\big) = x$$
où $g = f^{-1}$ est la bijection réciproque de f.

En effet à droite la dérivée de x est 1 ; à gauche la dérivée de $f\big(g(x)\big) = f \circ g(x)$ est $f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$. L'égalité $f\big(g(x)\big) = x$ conduit donc à l'égalité des dérivées :

$$f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x) = 1.$$

Mais $g = f^{-1}$ donc

$$\big(f^{-1}\big)'(x) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)}.$$

Exemple 4.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x + \exp(x)$. Étudions f en détail.
Tout d'abord :

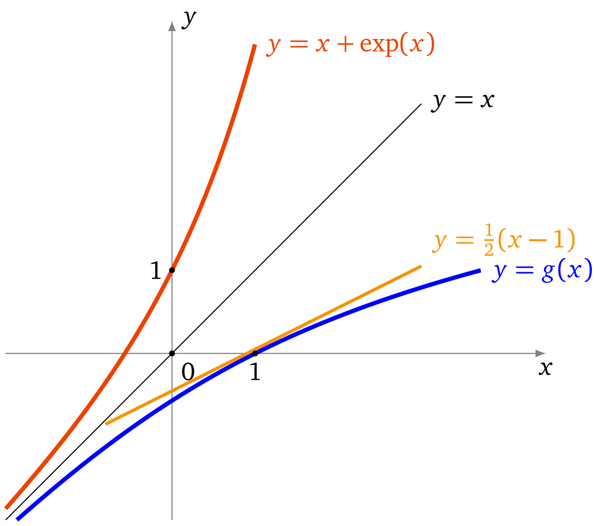
1. f est dérivable car f est la somme de deux fonctions dérivables. En particulier f est continue.
2. f est strictement croissante car f est la somme de deux fonctions strictement croissante.
3. f est une bijection car $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
4. $f'(x) = 1 + \exp(x)$ ne s'annule jamais (pour tout $x \in \mathbb{R}$).

Notons $g = f^{-1}$ la bijection réciproque de f. Même si on ne sait pas a priori exprimer g, on peut malgré tout connaître des informations sur cette fonction : par le corollaire ci-dessus g est dérivable et l'on calcule g' en dérivant l'égalité $f\big(g(x)\big) = x$. Ce qui donne $f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x) = 1$ et donc ici

$$g'(x) = \frac{1}{f'\big(g(x)\big)} = \frac{1}{1 + \exp\big(g(x)\big)}.$$

Pour cette fonction f particulière on peut préciser davantage : comme $f\big(g(x)\big) = x$ alors $g(x) + \exp\big(g(x)\big) = x$ donc $\exp\big(g(x)\big) = x - g(x)$. Cela conduit à :

$$g'(x) = \frac{1}{1 + x - g(x)}.$$



Par exemple $f(0) = 1$ donc $g(1) = 0$ et donc $g'(1) = \frac{1}{2}$. Autrement dit $\big(f^{-1}\big)'(1) = \frac{1}{2}$. L'équation de la tangente au graphe de f^{-1} au point d'abscisse $x_0 = 1$ est donc $y = \frac{1}{2}(x-1)$.

2.4. Dérivées successives

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et soit f' sa dérivée. Si la fonction $f' : I \to \mathbb{R}$ est aussi dérivable on note $f'' = (f')'$ la ***dérivée seconde*** de f. Plus généralement on note :

$$f^{(0)} = f, \quad f^{(1)} = f', \quad f^{(2)} = f'' \quad \text{et} \quad f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$$

Si la ***dérivée n-ième*** $f^{(n)}$ existe on dit que f est ***n fois dérivable***.

Théorème 1 (Formule de Leibniz).

$$\boxed{\left(f \cdot g\right)^{(n)} = f^{(n)} \cdot g + \binom{n}{1} f^{(n-1)} \cdot g^{(1)} + \cdots + \binom{n}{k} f^{(n-k)} \cdot g^{(k)} + \cdots + f \cdot g^{(n)}}$$

Autrement dit :

$$\left(f \cdot g\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} \cdot g^{(k)}.$$

La démonstration est similaire à celle de la formule du binôme de Newton et les coefficients que l'on obtient sont les mêmes.

Exemple 5.

- Pour $n = 1$ on retrouve $(f \cdot g)' = f'g + fg'$.
- Pour $n = 2$, on a $(f \cdot g)'' = f''g + 2f'g' + fg''$.

Exemple 6.

Calculons les dérivées n-ème de $\exp(x) \cdot (x^2 + 1)$ pour tout $n \geqslant 0$. Notons $f(x) = \exp(x)$ alors $f'(x) = \exp(x)$, $f''(x) = \exp(x)$,..., $f^{(k)}(x) = \exp(x)$. Notons $g(x) = x^2 + 1$ alors $g'(x) = 2x$, $g''(x) = 2$ et pour $k \geqslant 3$, $g^{(k)}(x) = 0$.

Appliquons la formule de Leibniz :

$$\begin{aligned}\left(f \cdot g\right)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) \cdot g(x) + \binom{n}{1} f^{(n-1)}(x) \cdot g^{(1)}(x) + \\ + \binom{n}{2} f^{(n-2)}(x) \cdot g^{(2)}(x) + \binom{n}{3} f^{(n-3)}(x) \cdot g^{(3)}(x) + \cdots\end{aligned}$$

On remplace $f^{(k)}(x) = \exp(x)$ et on sait que $g^{(3)}(x) = 0$, $g^{(4)}(x) = 0, \ldots$ Donc cette somme ne contient que les trois premiers termes :

$$\left(f \cdot g\right)^{(n)}(x) = \exp(x) \cdot (x^2 + 1) + \binom{n}{1} \exp(x) \cdot 2x + \binom{n}{2} \exp(x) \cdot 2.$$

Que l'on peut aussi écrire :

$$\left(f \cdot g\right)^{(n)}(x) = \exp(x) \cdot \left(x^2 + 2nx + n(n-1) + 1\right).$$

Mini-exercices.

1. Calculer les dérivées des fonctions suivantes : $f_1(x) = x \ln x$, $f_2(x) = \sin \frac{1}{x}$, $f_3(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1 + x^2}}$, $f_4(x) = \left(\ln(\frac{1+x}{1-x})\right)^{\frac{1}{3}}$, $f_5(x) = x^x$, $f_6(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$.
2. On note $\Delta(f) = \frac{f'}{f}$. Calculer $\Delta(f \times g)$.
3. Soit $f :]1, +\infty[\to]-1, +\infty[$ définie par $f(x) = x\ln(x) - x$. Montrer que f est une bijection. Notons $g = f^{-1}$. Calculer $g(0)$ et $g'(0)$.
4. Calculer les dérivées successives de $f(x) = \ln(1 + x)$.
5. Calculer les dérivées successives de $f(x) = \ln(x) \cdot x^3$.

3. Extremum local, théorème de Rolle

3.1. Extremum local

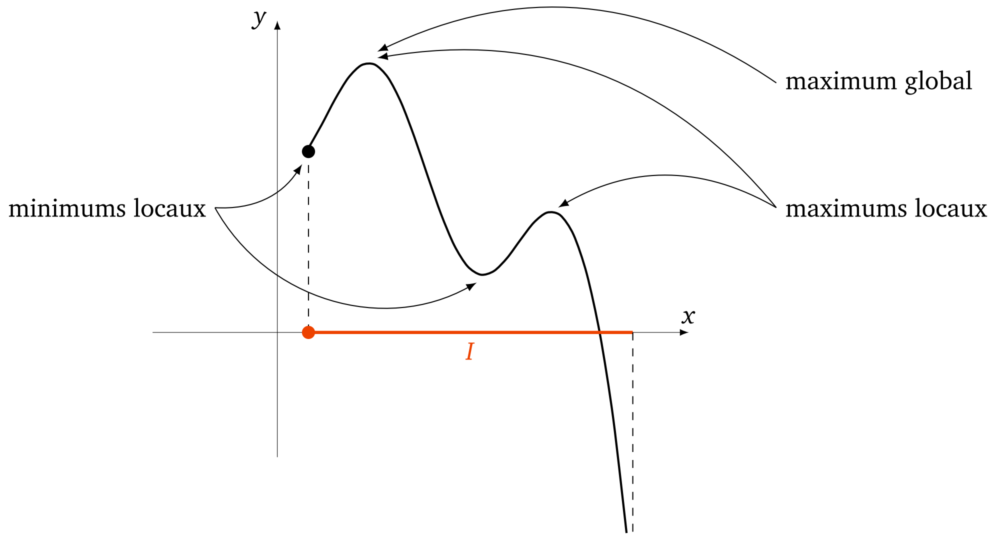
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I.

Définition 3.

- On dit que x_0 est un ***point critique*** de f si $f'(x_0) = 0$.
- On dit que f admet un ***maximum local en x_0*** (resp. un ***minimum local en x_0***) s'il existe un intervalle ouvert J contenant x_0 tel que

$$\text{pour tout } x \in I \cap J \quad f(x) \leqslant f(x_0)$$

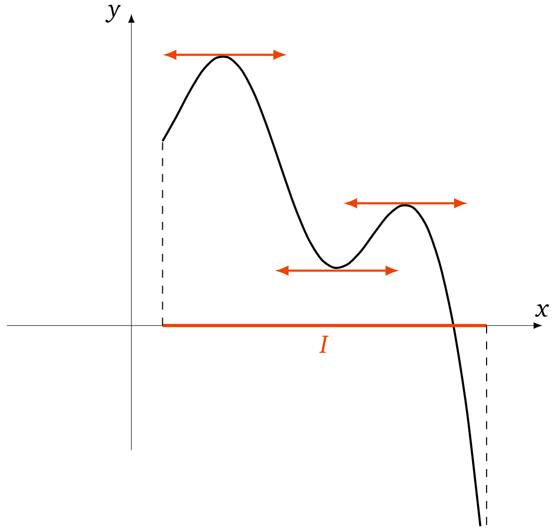
(resp. $f(x) \geqslant f(x_0)$).
- On dit que f admet un ***extremum local en x_0*** si f admet un maximum local ou un minimum local en ce point.



Dire que f a un maximum local en x_0 signifie que $f(x_0)$ est la plus grande des valeurs $f(x)$ pour les x proches de x_0. On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ admet un ***maximum global*** en x_0 si pour toutes les autres valeurs $f(x)$, $x \in I$, on a $f(x) \leqslant f(x_0)$ (on ne regarde donc pas seulement les $f(x)$ pour x proche de x_0). Bien sûr un maximum global est aussi un maximum local, mais la réciproque est fausse.

Théorème 2.
Soit I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Si f admet un maximum local (ou un minimum local) en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.

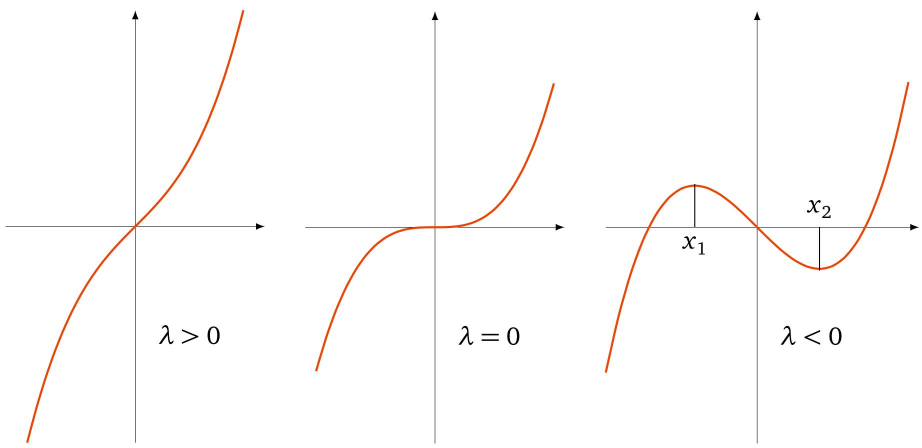
En d'autres termes, un maximum local (ou un minimum local) x_0 est toujours un point critique. Géométriquement, au point $(x_0, f(x_0))$ la tangente au graphe est horizontale.



Exemple 7.

Étudions les extremums de la fonction f_λ définie par $f_\lambda(x) = x^3 + \lambda x$ en fonction du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$. La dérivée est $f_\lambda'(x) = 3x^2 + \lambda$. Si x_0 est un extremum local alors $f_\lambda'(x_0) = 0$.

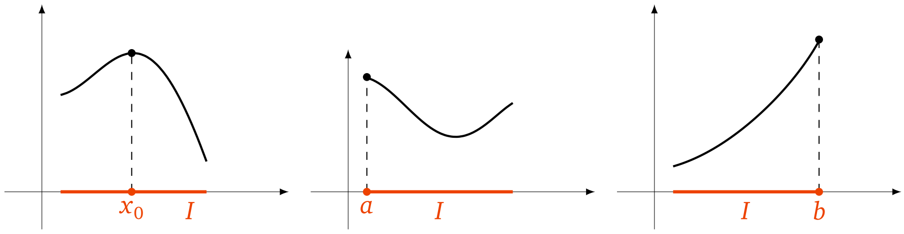
- Si $\lambda > 0$ alors $f_\lambda'(x) > 0$ et ne s'annule jamais il n'y a pas de points critiques donc pas non plus d'extremums. En anticipant sur la suite : f_λ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $\lambda = 0$ alors $f_\lambda'(x) = 3x^2$. Le seul point critique est $x_0 = 0$. Mais ce n'est ni un maximum local, ni un minimum local. En effet si $x < 0$, $f_0(x) < 0 = f_0(0)$ et si $x > 0$, $f_0(x) > 0 = f_0(0)$.
- Si $\lambda < 0$ alors $f_\lambda'(x) = 3x^2 - |\lambda| = 3\left(x + \sqrt{\frac{|\lambda|}{3}}\right)\left(x - \sqrt{\frac{|\lambda|}{3}}\right)$. Il y a deux points critiques $x_1 = -\sqrt{\frac{|\lambda|}{3}}$ et $x_2 = +\sqrt{\frac{|\lambda|}{3}}$. En anticipant sur la suite : $f_\lambda'(x) > 0$ sur $]-\infty, x_1[$ et $]x_2, +\infty[$ et $f_\lambda'(x) < 0$ sur $]x_1, x_2[$; maintenant f_λ est croissante sur $]-\infty, x_1[$, puis décroissante sur $]x_1, x_2[$, donc x_1 est un maximum local. D'autre part f_λ est décroissante sur $]x_1, x_2[$ puis croissante sur $]x_2, +\infty[$ donc x_2 est un minimum local.



Remarque.

1. La réciproque du théorème 2 est fausse. Par exemple la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = x^3$ vérifie $f'(0) = 0$ mais $x_0 = 0$ n'est ni maximum local ni un minimum local.
2. L'intervalle du théorème 2 est ouvert. Pour le cas d'un intervalle fermé, il faut faire attention aux extrémités. Par exemple si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable qui admet un extremum en x_0, alors on est dans l'une des situations suivantes :
   - $x_0 = a$,
   - $x_0 = b$,
   - $x_0 \in]a, b[$ et dans ce cas on a bien $f'(x_0) = 0$ par le théorème 2.

Aux extrémités on ne peut rien dire pour $f'(a)$ et $f'(b)$, comme le montre les différents maximums sur les dessins suivants.



3. Pour déterminer $\max_{[a,b]} f$ et $\min_{[a,b]} f$ (où $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable) il faut comparer les valeurs de f aux différents points critiques et en a et en b.

Preuve du théorème. Supposons que x_0 soit un maximum local de f, soit donc J l'intervalle ouvert de la définition contenant x_0 tel que pour tout $x \in I \cap J$ on a $f(x) \leqslant f(x_0)$.

- Pour $x \in I \cap J$ tel que $x < x_0$ on a $f(x) - f(x_0) \leqslant 0$ et $x - x_0 < 0$ donc $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0$ et donc à la limite $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0$.
- Pour $x \in I \cap J$ tel que $x > x_0$ on a $f(x) - f(x_0) \leqslant 0$ et $x - x_0 > 0$ donc $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant 0$ et donc à la limite $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant 0$.

Or f est dérivable en x_0 donc

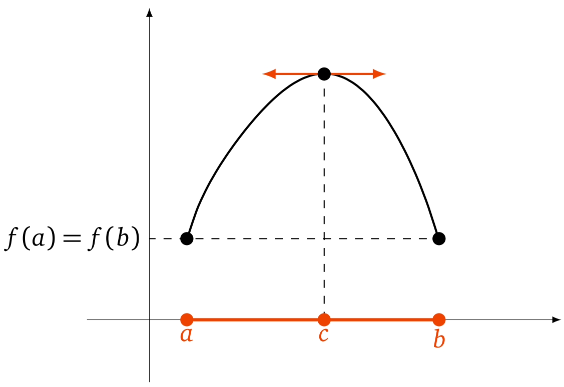
$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0).$$

La première limite est positive, la seconde est négative, la seule possibilité est que $f'(x_0) = 0$. □

3.2. Théorème de Rolle

Théorème 3 (Théorème de Rolle).
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que
- *f est continue sur $[a,b]$,*
- *f est dérivable sur $]a,b[$,*
- *$f(a) = f(b)$.*

Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.



Interprétation géométrique : il existe au moins un point du graphe de f où la tangente est horizontale.

Démonstration. Tout d'abord, si f est constante sur $[a,b]$ alors n'importe quel $c \in]a,b[$ convient. Sinon il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) \neq f(a)$. Supposons par exemple $f(x_0) > f(a)$. Alors f est continue sur l'intervalle fermé et borné $[a,b]$, donc elle admet un maximum en un point $c \in [a,b]$. Mais $f(c) \geqslant f(x_0) > f(a)$ donc $c \neq a$. De même comme $f(a) = f(b)$ alors $c \neq b$. Ainsi $c \in]a,b[$. En c, f est donc dérivable et admet un maximum (local) donc $f'(c) = 0$. □

Exemple 8.
Soit $P(X) = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \cdots (X - \alpha_n)$ un polynôme ayant n racines réelles différentes : $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$.

1. *Montrons que P' a $n-1$ racines distinctes.*

   On considère P comme une fonction polynomiale $x \mapsto P(x)$. P est une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Comme $P(\alpha_1) = 0 = P(\alpha_2)$ alors par le théorème de Rolle il existe $c_1 \in]\alpha_1, \alpha_2[$ tel que $P'(c_1) = 0$. Plus généralement, pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$, comme $P(\alpha_k) = 0 = P(\alpha_{k+1})$ alors le théorème de Rolle implique l'existence de $c_k \in]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$ tel que $P'(c_k) = 0$. Nous avons bien trouvé $n-1$ racines de P' : $c_1 < c_2 < \cdots < c_{n-1}$. Comme P' est un polynôme de degré $n-1$, toutes ses racines sont réelles et distinctes.

2. *Montrons que $P + P'$ a $n-1$ racines distinctes.*

   L'astuce consiste à considérer la fonction auxiliaire $f(x) = P(x)\exp x$. f est une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. f s'annule comme P en $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. La dérivée de f est $f'(x) = \big(P(x) + P'(x)\big)\exp x$. Donc par le théorème de Rolle, pour chaque $1 \leqslant k \leqslant n-1$, comme $f(\alpha_k) = 0 = f(\alpha_{k+1})$ alors il existe $\gamma_k \in]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$ tel que $f'(\gamma_k) = 0$. Mais comme la fonction exponentielle ne s'annule jamais alors $(P + P')(\gamma_k) = 0$. Nous avons bien trouvé $n-1$ racines distinctes de $P + P'$: $\gamma_1 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_{n-1}$.

3. *Déduisons-en que $P + P'$ a toutes ses racines réelles.*

   $P + P'$ est un polynôme à coefficients réels qui admet $n-1$ racines réelles. Donc $(P + P')(X) = (X - \gamma_1) \cdots (X - \gamma_{n-1})Q(X)$ où $Q(x) = X - \gamma_n$ est un polynôme de degré 1. Comme $P + P'$ est à coefficients réels et que les γ_i sont aussi réels, ainsi $\gamma_n \in \mathbb{R}$. Ainsi on a obtenu une n-ème racine réelle γ_n (pas nécessairement distincte des autres γ_i).

Mini-exercices.

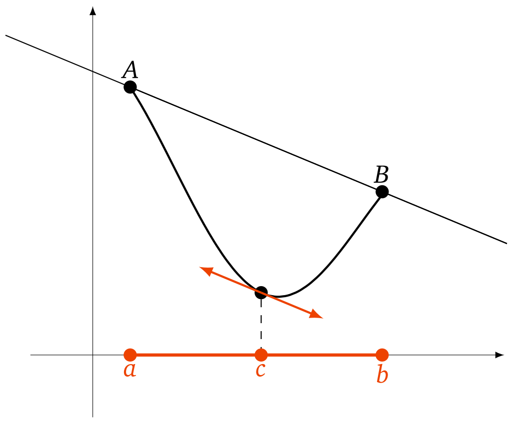
1. Dessiner le graphe de fonctions vérifiant : f_1 admet deux minimums locaux et un maximum local ; f_2 admet un minimum local qui n'est pas global et un maximum local qui est global ; f_3 admet une infinité d'extremums locaux ; f_4 n'admet aucun extremum local.
2. Calculer en quel point la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ admet un extremum local.
3. Soit $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable telle que $f(0) = f(1) = f(2) = 0$. Montrer qu'il existe c_1, c_2 tels que $f'(c_1) = 0$ et $f'(c_2) = 0$. Montrer qu'il existe c_3 tel que $f''(c_3) = 0$.
4. Montrer que chacune des trois hypothèses du théorème de Rolle est nécessaire.

4. Théorème des accroissements finis

4.1. Théorème des accroissements finis

Théorème 4 (Théorème des accroissements finis)**.**
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$\boxed{f(b) - f(a) = f'(c)\,(b-a)}$$



Interprétation géométrique : il existe au moins un point du graphe de f où la tangente est parallèle à la droite (AB) où $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$.

Démonstration. Posons $\ell = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ et $g(x) = f(x) - \ell \cdot (x-a)$. Alors $g(a) = f(a)$, $g(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (b-a) = f(a)$. Par le théorème de Rolle, il existe $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$. Or $g'(x) = f'(x) - \ell$. Ce qui donne $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. □

4.2. Fonction croissante et dérivée

Corollaire 2.
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.

1. $\forall x \in]a,b[\quad f'(x) \geqslant 0 \iff$ *f est croissante ;*
2. $\forall x \in]a,b[\quad f'(x) \leqslant 0 \iff$ *f est décroissante ;*
3. $\forall x \in]a,b[\quad f'(x) = 0 \iff$ *f est constante ;*
4. $\forall x \in]a,b[\quad f'(x) > 0 \implies$ *f est strictement croissante ;*
5. $\forall x \in]a,b[\quad f'(x) < 0 \implies$ *f est strictement décroissante.*

Remarque.
La réciproque au point (4) (et aussi au (5)) est fausse. Par exemple la fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante et pourtant sa dérivée s'annule en 0.

Démonstration. Prouvons par exemple (1).
Sens $\Longrightarrow$. Supposons d'abord la dérivée positive. Soient $x, y \in]a,b[$ avec $x \leqslant y$. Alors par le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x,y[$ tel que $f(x) - f(y) = f'(c)(x-y)$. Mais $f'(c) \geqslant 0$ et $x - y \leqslant 0$ donc $f(x) - f(y) \leqslant 0$. Cela implique que $f(x) \leqslant f(y)$. Ceci étant vrai pour tout x, y alors f est croissante.

Sens $\Longleftarrow$. Réciproquement, supposons que f est croissante. Fixons $x \in]a, b[$. Pour tout $y > x$ nous avons $y - x > 0$ et $f(y) - f(x) \geqslant 0$, ainsi le taux d'accroissement vérifie $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geqslant 0$. À la limite, quand $y \to x$, ce taux d'accroissement tend vers la dérivée de f en x et donc $f'(x) \geqslant 0$. □

4.3. Inégalité des accroissements finis

Corollaire 3 (Inégalité des accroissements finis).
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I ouvert. S'il existe une constante M telle que pour tout $x \in I$, $\left|f'(x)\right| \leqslant M$ alors

$$\boxed{\forall x, y \in I \qquad \left|f(x) - f(y)\right| \leqslant M|x - y|}$$

Démonstration. Fixons $x, y \in I$, il existe alors $c \in]x, y[$ ou $]y, x[$ tel que $f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$ et comme $|f'(c)| \leqslant M$ alors $\left|f(x) - f(y)\right| \leqslant M|x - y|$. □

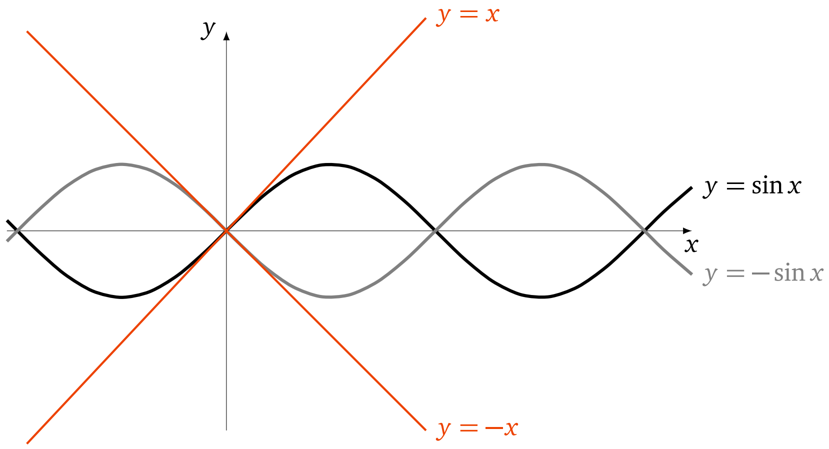
Exemple 9.
Soit $f(x) = \sin(x)$. Comme $f'(x) = \cos x$ alors $|f'(x)| \leqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. L'inégalité des accroissements finis s'écrit alors :

$$\text{pour tout } x, y \in \mathbb{R} \qquad |\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|.$$

En particulier si l'on fixe $y = 0$ alors on obtient

$$\boxed{|\sin x| \leqslant |x|}$$

ce qui est particulièrement intéressant pour x proche de 0.



4.4. Règle de l'Hospital

Corollaire 4 (Règle de l'Hospital).
Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables et soit $x_0 \in I$. On suppose que

- $f(x_0) = g(x_0) = 0$,
- $\forall x \in I \setminus \{x_0\} \quad g'(x) \neq 0$.

$$\boxed{\textit{Si} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \quad (\in \mathbb{R}) \quad \textit{alors} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.}$$

Démonstration. Fixons $a \in I \setminus \{x_0\}$ avec par exemple $a < x_0$. Soit $h : I \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = g(a)f(x) - f(a)g(x)$. Alors

- h est continue sur $[a, x_0] \subset I$,
- h est dérivable sur $]a, x_0[$,
- $h(x_0) = h(a) = 0$.

Donc par le théorème de Rolle il existe $c_a \in]a, x_0[$ tel que $h'(c_a) = 0$. Or $h'(x) = g(a)f'(x) - f(a)g'(x)$ donc $g(a)f'(c_a) - f(a)g'(c_a) = 0$. Comme g' ne s'annule pas sur $I \setminus \{x_0\}$ cela conduit à $\frac{f(a)}{g(a)} = \frac{f'(c_a)}{g'(c_a)}$. Comme $a < c_a < x_0$ lorsque l'on fait tendre a vers x_0 on obtient $c_a \to x_0$. Cela implique

$$\lim_{a \to x_0} \frac{f(a)}{g(a)} = \lim_{a \to x_0} \frac{f'(c_a)}{g'(c_a)} = \lim_{c_a \to x_0} \frac{f'(c_a)}{g'(c_a)} = \ell.$$

□

Exemple 10.

Calculer la limite en 1 de $\frac{\ln(x^2+x-1)}{\ln(x)}$. On vérifie que :

- $f(x) = \ln(x^2 + x - 1)$, $f(1) = 0$, $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x-1}$,
- $g(x) = \ln(x)$, $g(1) = 0$, $g'(x) = \frac{1}{x}$,
- Prenons $I =]0, 1]$, $x_0 = 1$, alors g' ne s'annule pas sur $I \setminus \{x_0\}$.

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x+1}{x^2+x-1} \times x = \frac{2x^2+x}{x^2+x-1} \xrightarrow[x \to 1]{} 3.$$

Donc

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to 1]{} 3.$$

Mini-exercices.

1. Soit $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + 2$. Étudier la fonction f. Tracer son graphe. Montrer que f admet un minimum local et un maximum local.
2. Soit $f(x) = \sqrt{x}$. Appliquer le théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[100, 101]$. En déduire l'encadrement $10 + \frac{1}{22} \leqslant \sqrt{101} \leqslant 10 + \frac{1}{20}$.
3. Appliquer le théorème des accroissements finis pour montrer que $\ln(1+x) - \ln(x) < \frac{1}{x}$ (pour tout $x > 0$).
4. Soit $f(x) = e^x$. Que donne l'inégalité des accroissements finis sur $[0, x]$?
5. Appliquer la règle de l'Hospital pour calculer les limites suivantes (quand $x \to 0$) : $\dfrac{x}{(1+x)^n - 1}$; $\dfrac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}$; $\dfrac{1-\cos x}{\tan x}$; $\dfrac{x - \sin x}{x^3}$.

Index

affixe, 27
arccosinus, 81
archimédien, 6
arcsinus, 82
arctangente, 82
argument, 23

borne inférieure, 12
borne supérieure, 12

conjugué, 17
continuité, 64
convergence, 33
cosinus, 81
cosinus hyperbolique, 84

densité, 9
dérivée, 88
dérivée seconde, 94
développement, 25
divergence, 33
domaine de définition, 53

exponentielle, 78
exponentielle complexe, 24
extremum, 95

fonction
    bornée, 54
    constante, 54
    continue, 64
    croissante, 55
    décroissante, 55
    dérivable, 88
    dérivée, 88, 91
    impaire, 55
    limite, 58, 59
    majorée, 54
    minorée, 54
    monotone, 55
    nulle, 54
    paire, 55
    périodique, 56
formule
    d'Euler, 25
    de Leibniz, 94
    de Moivre, 23

graphe, 53

inégalité
    des accroissements finis, 100
    triangulaire, 7
inégalité triangulaire, 18
intervalle, 9

limite, 32, 58, 59
    à droite, 60
    à gauche, 60
    unicité, 61
linéarisation, 26
logarithme, 76
    décimal, 77
    en base quelconque, 77
    néperien, 77

majorant, 11
maximum, 11, 95
minimum, 11, 95
minorant, 11
module, 17

nombre
    décimal, 2
    imaginaire, 16
    irrationnel, 2

rationnel, 2
réel, 5
nombre complexe, 15

partie entière, 6
partie imaginaire, 16
partie réelle, 16
plus grand élément, 11
plus petit élément, 11
point critique, 95
point fixe, 47
prolongement par continuité, 66

racine n-ème, 78
racine de l'unité, 25
règle
de l'Hospital, 100
relation d'ordre, 5

série géométrique, 38
sinus, 82
sinus hyperbolique, 84
sous-suite, 44
suite, 29
adjacente, 43
bornée, 30
convergente, 33
croissante, 30
décroissante, 30
divergente, 33
extraite, 44
géométrique, 38
limite, 32
majorée, 29
minorée, 30
monotone, 30
récurrente, 47

tangente, 82, 88
tangente hyperbolique, 85
théorème
de Bolzano-Weierstrass, 45
de d'Alembert–Gauss, 21
de la bijection, 73
de Rolle, 97
des accroissements finis, 99
des gendarmes, 36, 62
des valeurs intermédiaires, 68, 69

valeur absolue, 7
voisinage, 9