1. Introduction

La programmation linéaire est une méthode de la recherche opérationnelle. Même si l'on peut dire que ses origines remontent aux premiers problèmes d'optimisation, ce n'est que depuis 1947 qu'elle s'est couramment répandue. George Dantzig dans sa contribution au projet (Computation of Optimum Program, un projet de recherche de la U.S. Air Force) formula et résolut le problème général de programmation linéaire. Il développa à cette époque la méthode du simplexe qui permet de résoudre le modèle de programmation linéaire.
L'efficacité de cette méthode de calcul, jointe à la possibilité d'utiliser l'ordinateur, permet d'employer le modèle de programmation linéaire pour résoudre des problèmes touchant à la production, les finances, le marketing, etc.
L'apparition de logiciels puissants permet, aujourd'hui, de mettre cet outil à la disposition d'un large public.
La **programmation linéaire** consiste à rechercher les conditions qui optimisent une fonction, lorsqu'on dispose de ressources en quantités limitées.

2. Le modèle de la programmation linéaire

Les problèmes de la programmation linéaire se présentent formellement ainsi : Chercher la solution d'un programme linéaire à **n** variables et **m** contraintes consiste à déterminer les valeurs **non négatives** des variables : $\left(\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2,\ ..,\mathbf{x}_j,....,\ \mathbf{x}_n\right)$

Qui maximisent (ou minimisent) la fonction **linéaire** dite économique :
$\mathbf{Z}=\mathbf{c}_1\mathbf{x}_1+\mathbf{c}_2\mathbf{x}_2+\ldots+\mathbf{c}_j\mathbf{x}_j+\ldots+\mathbf{c}_n\mathbf{x}_n$
Tout en respectant les contraintes sous forme d'un système d'équations et /ou d'inéquations **linéaires** :

$$\begin{cases}\mathbf{a}_{11}\mathbf{x}_1+\mathbf{a}_{12}\mathbf{x}_2+\ldots+\mathbf{a}_{1j}\mathbf{x}_j+\ldots+\mathbf{a}_{1n}\mathbf{x}_n\left(\le\ =\ \ge\right)\ \mathbf{b}_1\\ \mathbf{a}_{21}\mathbf{x}_1+\mathbf{a}_{22}\mathbf{x}_2+\ldots+\mathbf{a}_{2j}\mathbf{x}_j+\ldots+\mathbf{a}_{2n}\mathbf{x}_n\left(\le\ =\ \ge\right)\ \mathbf{b}_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \mathbf{a}_{i1}\mathbf{x}_1+\mathbf{a}_{i2}\mathbf{x}_2+\ldots+\mathbf{a}_{ij}\mathbf{x}_j+\ldots+\mathbf{a}_{in}\mathbf{x}_n\left(\le\ =\ \ge\right)\ \mathbf{b}_i\\ \\ \mathbf{a}_{m1}\mathbf{x}_1+\mathbf{a}_{m2}\mathbf{x}_2+\ldots+\mathbf{a}_{mj}\mathbf{x}_j+\ldots+\mathbf{a}_{mn}\mathbf{x}_n\left(\le\ =\ \ge\right)\ \mathbf{b}_m\\ \mathbf{x}_j\ge\ \mathbf{0},\ pour\ \mathbf{j}=\mathbf{1},\mathbf{n}\end{cases}$$

Où les $\mathbf{c_j}$, $\mathbf{a_{ij}}$, $\mathbf{b_i}$ sont des valeurs connues quel que soit **i=1,m** et quel que soit **j=1,n.**
La notation **(≤ = ≥)** signifie que chaque contrainte possède l'un de ces signes.

Résumé:

La programmation linéaire est un outil ***mathématique*** permettant de résoudre un modèle mathématique ***déterministe*** satisfaisant aux hypothèses de ***linéarité***, d'***additivité*** et de ***non-négativité*** des variables.

Explicitons chacun des termes.

a) Par modèle ***mathématique,*** on entend une représentation d'écriture mathématique la plus fidèle possible d'une réalité.

b) Le terme ***déterministe*** s'applique aux coefficients : a_{ij} , c_j et b_i qui doivent être connus avec certitude. Un tel qualificatif paraît extrême et d'ordre peu pratique. En tirant avantage d'une étude d'analyse de sensibilité, nous pouvons utiliser la programmation linéaire même si ces coefficients ne sont pas connus avec certitude.

c) L'hypothèse de ***linéarité*** oblige les variables à être du premier degré tant dans la fonction économique que dans les contraintes. Notons qu'un modèle constitué d'une fonction économique quadratique et d'un système de contraintes linéaires se résout à l'aide d'une technique appelée programmation quadratique.

d) L'hypothèse d'***additivité*** des variables signifie que l'effet total est obtenu par la somme des effets particuliers à chaque variable. Un modèle ne respectant pas les hypothèses d'additivité et/ou de linéarité peut se résoudre, sous certaines conditions, par une technique appelée programmation dynamique.

e) Enfin les variables doivent être ***non-négatives***. Plus tard nous verrons qu'à l'aide d'une transformation, il est possible d'utiliser la programmation linéaire même si cette hypothèse n'est par vérifiée. Cependant, lorsque le modèle oblige les variables à être entières, il faut faire appel à une autre technique appelée programmation en nombres entiers. Dans un tel cas, la solution bien qu'approximative obtenue par la programmation linéaire est plus que satisfaisante et beaucoup moins coûteuse que celle obtenue par la programmation en nombres entiers

3. Méthodes de résolution

Pour parvenir à la solution de ce modèle, plusieurs algorithmes, que l'on peut exploiter à l'aide de l'ordinateur ont été élaborés : exemple, méthode de la matrice inverse et surtout la méthode du simplexe.
La méthode du simplexe est l'algorithme le plus efficace permettant de solutionner un programme linéaire. Il a été élaboré par George Dantzig (mathématicien américain) dans les années 40 dans le cadre d'un projet de l'armée de l'air des états unis d'Amérique pour l'optimisation de l'installation des radars sur le territoire britannique durant la seconde guerre mondiale. Depuis plusieurs variantes ont étés dérivés de l'algorithme initial. Sans trop s'attarder, ici, sur cette méthode très connue(elle sera l'objet d'une étude très détaillée), disant simplement que le principe est de passer d'une solution de base à une autre en améliorant la fonction économique par un système de pivotement jusqu'à obtenir la solution optimale.

4. Autre description

Étant donnée l'existence de ressources, en quantité limitée, qui peuvent être utilisées à diverses activités, la programmation linéaire consiste à déterminer la quantité de chacune des ressources qu'on doit allouer à chaque activité afin d'atteindre un objectif prédéterminé tel que la maximisation des profits ou des ventes, la minimisation des coûts ou du temps d'opération, etc.

Lions cette description à la définition mathématique du modèle.

b_i : Quantité disponible de la ressource i

x_j : Niveau de l'activité j

a_{ij} : Quantité de la ressource i nécessaire à chaque unité de 1'activité j

$a_{ij}x_j$: Quantité de la ressource i allouée à l'activité j lorsqu'elle est de niveau

c_j : Rendement en termes de l'objectif prédéterminé d'une unité de 1'activité j

Une telle description, bien que fort compréhensible pour des problèmes de type "production", s'avère parfois difficile de compréhension pour d'autres réalités.
Les prochaines illustrations permettront d'affermir la compréhension du modèle.

5. Exemple de modélisation

1) <u>Exemple 1 : Un problème d'allocation de ressources limitées</u>

Une entreprise fabrique *un* produit qu'elle vend à deux types de clients:
1) Les hôpitaux
2) et les entreprises de produits chimiques(EPC).
La compagnie estime que le profit est de 10 DA et 15 DA pour chaque unité vendue respectivement aux hôpitaux et aux EPC

-Les quatre vendeurs de la compagnie se font fort de fournir 4 000 heures pour rencontrer les clients durant les prochains six mois.
-Un montant de 14 000 DA est alloué à la publicité dans des revues spécialisées pour cette même période.

La compagnie estime que, pour vendre une unité de son produit aux entreprises de produits chimiques, il faut 1 DA de publicité et une rencontre de 30 minutes avec le client.
Quant au secteur hospitalier, il faut 2 DA de publicité et 15 minutes de contact pour assurer le même résultat.
-Pour rester en bons termes avec ses clients, l'entreprise évalue qu'elle devra fournir au moins 3 000 unités à chacun des deux secteurs.

L'entreprise désire déterminer l'effort de vente qui lui permettrait de maximiser son profit.

Modélisation du problème:

Dès qu'on décide de représenter un problème donné par un modèle mathématique, la première tâche est de préciser ce que l'on cherche, de définir les variables du problème.

Dans le problème ci-dessus, on désire trouver l'effort de vente qui maximise le profit. L'effort de vente se traduit par le nombre d'unités de notre produit que l'on vendra durant une période de six mois aux hôpitaux et aux entreprises de produits chimiques.

Nous définirons les variables du problème par:

- **X_1** : Le nombre d'unités qui devront être vendues durant une période de six mois aux entreprises de produits chimiques
- **X_2** *:* Le nombre d'unités qui devront être vendues durant *une* période de six mois aux hôpitaux

La fonction économique Z représentant le profit devient **$Z = 15X_1+10X_2$**, et nous chercherons les valeurs de X_1, et X_2 qui maximisent cette fonction.

Il est évident que nous ne pouvons pas donner des valeurs quelconques aux variables X_1, et X_2. Nous devons tenir compte d'un certain nombre de contraintes qui sont ici la disponibilité en heures pour rencontrer les clients, le budget alloué à la publicité et l'obligation de vendre au moins 3 000 unités du produit à chacun des secteurs.

Représentons algébriquement chacune de ces contraintes:

- Disponibilité en heures pour rencontrer les clients

Selon les données du problème, l'entreprise dispose d'un maximum de 4 000 heures et évalue à 1/2 heure le contact nécessaire avec un client du secteur des entreprises de produits chimiques pour lui vendre une unité du produit et à 1/4 d'heure le contact nécessaire avec un client du secteur hospitalier pour lui vendre une unité du produit. Algébriquement, on représente cette contrainte par l'inéquation :

$$\tfrac{1}{2}X_1+\tfrac{1}{4}X_2 \leq 4\,000$$

Cette inéquation a un sens puisque les deux membres de l'inéquation sont exprimes en heure.

Si au lieu d'utiliser le signe (≤) nous avions utilisé le signe (=), c'est que nous aurions voulu que l'effort de vente corresponde exactement à 4 000 heures. Il est évident que l'utilisation du signe (=) est beaucoup plus restrictive que l'utilisation du signe (≤).

- Budget alloué a la publicité

Selon les données du problème, l'entreprise dispose d'un budget de 14 000 DA et évalue qu'il faut 1 DA de publicité pour chaque unité vendue aux EPC et 2 DA de pub pour les hôpitaux.

Algébriquement, on représente cette contrainte par l'inéquation. $X_1 + 2X_2 \leq 14\ 000$
Cette inéquation a un sens puisque les deux membres de l'inéquation sont exprimés en

- Contraintes de bons termes avec les clients

$X1 \geq 3000$
$X2 \geq 3000$

- Modèle mathématique:

Quelles sont les valeurs non négatives des variables X_1 et X_2 qui maximisent la fonction économique

$Z = 15X_1 + 10X_2$ et qui vérifient les contraintes

C'est à dire :

$\mathrm{Max}Z = 15X_1 + 10X_2$

$$\text{Tel que : } \begin{cases} 0.5X1 + 0.25X_2 \leq 4\ 000 \\ X_1 + 2X_2 \leq 14000 \\ X_1 \geq 3000 \\ X_2 \geq 3000 \\ X_1 \geq 0 \\ X_2 \geq 0 \end{cases}$$

Voilà un modèle de programmation linéaire.

Les étapes à suivre lorsque l'on veut décrire un problème de ce genre sont :

1) **Définition des variables du problème**
2) **Description de la fonction économique**
3) **Description de chacune des ontraintes**

Afin de se familiariser avec la formulation du modèle, je vous recommande de faire ce même cheminement autant de fois que possible en faisant porter votre effort sur la définition des variables, la pierre d'achoppement de la formulation.

2) Exemple 2 : Un problème de mélange

Une compagnie d'alimentation dispose de 1 000 Kg de café africain, 2 000 Kg de café brésilien et 500 Kg de café colombien. Elle ensache deux sortes de café: la première sorte est un mélange à parties égales de café africain et brésilien et se vend 60 DA le Kg. La deuxième sorte est un mélange de trois parties de café brésilien pour une partie de café colombien, et se vend 80 DA le Kg. Pour maximiser son revenu, quelle quantité de chaque sorte de café, la compagnie devrait-elle ensacher?