EQUATIONS DIFFERENTIELLES 1

RAHAL MOHAMED
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES,
FACULTE DES SCIENCES, UNIVERSITE FERHAT ABBAS SETIF 1

October 8, 2018

Introduction. Beaucoup de problèmes de physique et de mécanique se ramènent à la recherche de fonctions dont les dérivées satisfont à certaines relations.
Considérons l'exemple suivant (équation de la corde vibrante, équation de la chaleur,...etc.): On laisse tomber un corps de masse m d'une certaine hauteur. On demande d'établir la loi de variation de la vitesse de chute v, si le corps éprouve une résistance de frainage de la part de l'air propotionnelle à la vitesse (le coeficient de propotionnalité étant k), c'est-à-dire de trouver une fonction $v = f(t)$.
En vertu de la seconde loi de Newton: $m.\frac{dv}{dt} = F$ où $\frac{dv}{dt}$ est l'accélération du corps en mouvement (la dérivée de la vitesse par rapport au temps $t; v' = \frac{dv}{dt}$) et F la force agissant sur le corps dans le sens du mouvement. Cette force est constituée de deux forces $F = F_1 + F_2$: de la force de pesanteur $m.g$ et de la résistance de l'air $-k.v$ (on prend le signe moins car cette force est oppsée à la vitesse). Ainsi:

$$m.\frac{dv}{dt} = m.g - k.v, \tag{1}$$

nous avons donc une relation entre la fonction inconnue v et sa dérivée $v' = \frac{dv}{dt}$, c'est-à-dire une **équation différentielle,** on peut vérifier facilement que toute fonction de la forme

$$v = c.e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{m.g}{k} \tag{2}$$

vérifie l'équation (1) $\forall$ la constante c.(donc nous avons une infinité de solutions). Mais laquelle de ces fonctions qui donne la relation cherchée entre v et t pour la trouver**?**, imposons une condition supplémentaire: une **vitesse**

initiale v_0 (qui peut être nulle) a été communiquée au corps au départ ($t = 0$) au début de mouvement. Subtituant $t = 0$ et v_0 dans l'équation (2), on trouve:

$$v_0 = c + \frac{m.g}{k} \Rightarrow c = v_0 - \frac{m.g}{k}$$

d'où la constante c est déterminée, la dépendance entre v et t s'exprime donc:

$$v = (v_0 - \frac{m.g}{k}).e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{m.g}{k}.$$

Les équations différentielles sont le principale instrument utilisée par les scientifiques pour formuler des modèles mathématiques de situations réelles. Elles jouent donc un rôle tout à fait central dans l'utilisation de la puissance des mathématiques pour décrire le monde qui nous entoure.

Définitions et classification des équations différentielles

Définition 1 On appelle **équation différentielle** une équation établissant une relation entre la variable indépendante x, la fonction inconnue $y = f(x)$ et ses dérivées $y^{'}, y^{''}, ..., y^{(n)}$ ((n) désigne la dérivée $n^{ième}$). On peut écrire symboliquement une équation différentielle comme suit:

$$F(x, y, y^{'}, y^{''}, ..., y^{(n)}) = 0 \text{ ou } F(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{d^2x}, ..., \frac{d^ny}{d^nx}) = 0.$$

Si la fonction cherchée $y = y(x)$ est une fonction de la seule variable x, l'équation différentielle est dite **ordinaire (**en abrégé **E.D.O.),** par exemple: $\frac{dy}{dx} + xy = 1$ ou $y^{'} + xy = 1$. Lorsque la fonction inconnue y dépend de deux ou de plusieurs variables, par exemple si $y = y(x, t)$, l'équation de la forme :

$$F(x, t, \frac{dy}{dx}, \frac{dy}{dt}, ..., \frac{\partial^m y}{\partial x^k \partial t^p}) = 0 \text{ où } k, p \in \mathbb{N} \ / \ k + p = m.$$

est dite **équation au dérivées partielles** (en abrégé **E.D.P.),** par exemple: $\frac{dy}{dt} - \frac{dy}{dx} = 2$.

On appelle **ordre** de l'équation différentielle l'ordre de la dérivée la plus élevée figurant dans l'équation différentielles, par exemple: $y^{''} + xy^{'} - y = e^x$ est une E.D.O. du second ordre.

On dit qu'une équation différentielle est **linéaire** si on peut la décomposer en une somme de terms ayant chacun la forme d'un produit dont l'un des facteurs est une fonction connue de x et l'autre facteur est la fonction y ou l'une de ses dérivées, alors que les **E.D.O** qui contiennent des puissances ou des produits de y et/ou de ses dérivées, ne sont pas linéaires, exemple:

$xy^{''} + y = 0$ (E.D.O. linéaire), $yy^{''} + 2(y^{'})^2 = 2$ (E.D.O non linéaire).
On appelle **solution** ou **intégrale** d'une équation différentielle ordinaire d'ordre n sur un intervale $]a, b[$, toute fonction $y = \varphi(x)$ définie sur cet intervalle vérifiant identiquement cette équation.

Equations différentielles ordinaires du premier ordre
Une équation différentielle du premier ordre est de la forme:

$$F(x, y, y^{'}) = 0.$$

Lorsque cette équation est résoluble en $y^{'}$, on peut la mettre sous la forme

$$y^{'} = f(x, y) \quad \text{(forme normale de E.D.O. du } 1^{er} \text{ ordre).} \tag{1}$$

où la fonction $f(x, y)$ est définie dans un certain domaine D du plan xOy.
($e^{y^{'}} - xy^{'} = 1$ n'est pas résoluble par rapport à $y^{'}$).

Définition 2 On appelle **solution générale** d'une équation différentielle du premier ordre une fonction

$$y = \varphi(x, c), \tag{2}$$

dépendant d'une constante arbitraire c.
Une équation différentielle admet donc une infinité de solution. Dans la pratique, l'unicité est obtenue en adjoignant des équations supplémentaires à l'équation différentielle. Ces équations vont permettre de donner des valeurs précises à nos constantes arbitraires et d'obtenir ainsi une fonction $y(x)$ unique vérifiant simultanément l'équation différentielle et ces conditions.
- Dans le cas des équations du premier ordre, il n'y a qu'une constante à déterminer, il suffit donc d'une équation supplémentaire, il s'agit donc d'une équation de la forme:

$$y(x_0) = y_0 \tag{3}$$

où x_0 et y_0 sont des quantités connues, cette condition (3) s'appelle **condition initiale.**
- Dans le cas des E.D.O. du deuxième ordre il faut fournir deux conditions initiales, en précisant les valeurs initiales de la fonction et sa dérivée première.

$$\begin{cases} y^{''} = x \Rightarrow y^{'} = \frac{x^2}{2} + c_1 \Rightarrow y = \frac{x^3}{6} + c_1 x + c_2 \\ y(x_0) = y_0,\ y^{'}(x_0) = y_1. \end{cases}$$

La solution générale d'une E.D.O. du premier ordre $y = \varphi(x, c)$ vérifie deux choses:

a- elle satisfait à l'équation différentielle $\forall$ la constante c.

b- quelle que soit la condition initiale $y(x_0) = y_0$, on peut trouver une valeur $c = c_0$ telle que la fonctions $y = \varphi(x, c_0)$ vérifie la condition initiale donnée.

Remarque Souvent la solution générale d'une E.D.O. conduits à une relation de la forme :

$$\phi(x, y, c) \tag{2'}$$

non résolue en y (il n'est pas toujours possible d'exprimer y à partir de $(2')$ on conserve alors la solution générale sous forme **implicite** (le cas contraire de forme **explicite**).

Définition 3 On appelle **solution particulière** toute fonction $y = \varphi(x, c_0)$ déduite de la solution générale $y = \varphi(x, c)$, en posant dans cette dernière $c = c_0$.

Exemple: l'équation différentielle : $y' = -\frac{y}{x}$ de 1^{er} ordre a pour solution générale une famille de fonctions $y = \frac{c}{x}$, cherchons la solution particulière satisfaisant à la condition initiale $y(2) = 1/x_0 = 1$. Substituant cette valeur dans la formule $y =$, on obtient $1 = \frac{c}{2}$ ou $c = 2$, la solution particulière cherchée est donc la fonction $y = \frac{2}{x}$.

$\circ$ La courbe solution d'une équation différentielle est appellée **courbe intégrale** de cette équation. Du point de vue géométrique, la solution générale (courbe intégrale) représente une **famille de courbes** planes dépendant d'un paramètre c. Ces courbes sont appelées les **courbes intégrales** de l'équation différentielle donnée. Une **intégrale particulière** est représentée par une courbe de cette famille passant par un point donné du plan.

Voir l'exemple ci-dessous.

Définition 4 On appelle **solution singulière,** de l'équation (1) toute solution définie sur des points où la solution n'est pas unique.

Exemple Soit l'équation différentielle du 1^{er} ordre: $y' = 2\sqrt{y}$, $y \geq 0$, $y(2) = 0$ (condition initiale).

1- On a $\frac{y'}{2\sqrt{y}} = 1$, $y \neq 0 \Rightarrow \frac{dy}{2\sqrt{y}} = dx \Rightarrow \sqrt{y} = x + c/$ c constante/ $x + c > 0$, $x > -c \Rightarrow y = (x + c)^2 = \varphi(x, c)$ (solution générale explicite).

$y(2) = (2 + c)^2 = 0 \Rightarrow 2 + c = 0 \Rightarrow c = -2$, donc $y = (x - 2)^2$ est une solution particulière.

2- $y = 0/\;\; x + c \geq 0 \Rightarrow x \geq -c$

$y \equiv 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $y(x) = 0$, $y \equiv 0$ solution singulière (verifie aussi la condition initiale).

$Figure 1.$

1 Problème de Cauchy

On appelle **problème de Cauchy** un problème qui consiste à trouver une solution $y = y(x)$ de l'équation différentielle du 1^{er} ordre: $y^{'} = f(x, y)$ qui satisfait à la condition initiale $y(x_0) = y_0$.
Le problème de Cauchy donc est le système d'équation suivant:

$$\begin{cases} y^{'} = f(x, y), \quad x \in \mathbb{J} \subset \mathbb{I}, \mathbb{J} \text{ un intervalle} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{3}$$

où $\mathbb{I}$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : \mathbb{I} \times \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ et $\mathbb{D}$ un domaine non vide de $\mathbb{R}$.
En interprétation géométrique cela signifie qu'on cherche une courbe intégrale qui passe un point donné $M_0(x_0, y_0)$ du plan xOy (voir Figure 2)

$Figure2$

Résoudre le problème de Cauchy (localement) revient à trouver un intervalle $\mathbb{J} \subset \mathbb{I}$ contenant x_0 et une fonction y de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{J}$ satisfaisant (3).

Nous nous intérréssons maintenant à l'étude de **l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy** (3).
○ Lorsque la fonction f est <seulement> continue sur un espace de dimension infinie, on peut rien dire.
○ Si la fonction f est continue sur un espace de dimension finie, le Théorème de Cauchy-Arzela suivant affirme l'éxistence d'au moins une solution du problème (3) quelque soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{I} \times \mathbb{D}$. Mais il n'y a pas unicité en général.

Théorème de Cauchy-Arzela Soit $\mathbb{D}$ un domaine non vide de $\mathbb{R}$, ($U = \mathbb{I} \times \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$) où $\mathbb{I}$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ une fonction **continue** de U dans $\mathbb{R}$ ($f : U = \mathbb{I} \times \mathbb{D} \to \mathbb{R}$), pour tout (x_0, y_0) de U, il existe au moins une solution de l'équation différentielle $y^{'} = f(x, y)$ définie sur un voisinage de x_0 et satisfaisant à $y(x_0) = y_0$.

Preuve La démonstration du théorème de Cauchy-Arzela est fondée sur la construction de solutions approchées de (3) définies de la manière suivante: Désignons par

....
......

Définition Fonction lipschitzienne

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, on dit que f satisfait à la condition de Lipschitz par rapport à y dans U, ou f est lipschitzienne dans U s'il existe une constante $L > 0$ telle que:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2|\,,\ \forall (x, y_1), (x, y_2) \in U.$$

Définition On dit que f est localement lipschitzienne dans U si $\forall (x, y) \in U$, $\exists V(x, y)$ (voisinage) tel que f est lipschitzienne dans V.

Exemple Soit $f(x, y) = 2\,|y| \cos x$ est une fonction lipschitzienne par rapport à la variable y : en effet:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |2\,|y_1| \cos x - 2\,|y_2| \cos x| = 2\,|\cos x|\,||y_1| - |y_2||$$

puisque $|\cos x| \leq 1$ et $||y_1| - |y_2|| \leq |y_1 - y_2|$ donc

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq 2\,|y_1 - y_2|\,,$$

donc f est lipschitzienne de constante de Lipschitz $L = 2$.

2 Continuité et condition de Lipschitz

Proposition 1 Si la fonction f est définie sur un domaine U (voir si U est compact) est lipschitzienne par rapport à y, elle est uniformément continue par rapport à y.
Preuve En effet la condition de Lipschitz implique immédiatement que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que:

$$\text{si } \ |y_1 - y_2| < \eta \Rightarrow |f(x, y_1) - f(x, y_2)| < \varepsilon.$$

Il suffit qu'on choisisse $\eta \leq \frac{\varepsilon}{L}$.

Remarque 1 Notons que si l'existence d'une condition de Lipschitz par rapport à y implique la continuité uniforme par rapport à y, elle n'implique aucune sorte de continuité par rapport à x.

Proposition 2 Si une fonction $f(x, y)$ définie dans un domaine U, est localement lipschitzienne par rapport à y, elle est continue par rapport à y.

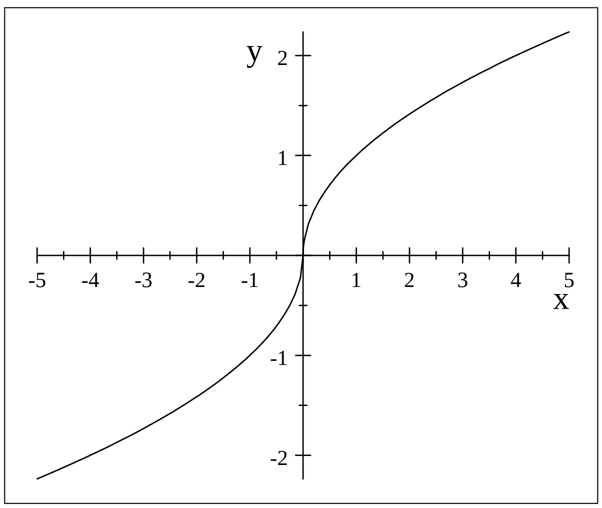
Démonstration Soit y_0 un point quelconque de U. Par hypothèse, il existe un voisinage V de y_0 tel que pour tout $y \in V$ (f localement lipschitzienne) on ait

$$|f(x, y_0) - f(x, y)| \leq L\,|y_0 - y|$$

où $L > 0$ est une constante réelle. Il en résulte immédiatement que: $\lim\limits_{\substack{y \to y_0 \\ y \in V}} f(x,y) = f(x,y_0)$ donc f est continue par rapport à y.

Remarque 2 Les deux propositions qu'on vient de démontrer ont des réciproques fausses. Ni la continuité, ni même la continuité uniforme par rapport à y d'une fonction $f(x,y)$ n'entraînent l'éxistence d'une innégalié de Lipschitz pour cette fonction. Considérons à titre de contre-exemple, la fonction d'une seule variable x définie comme suit sur l'intervalle $]-1,1[$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 \le x < 1 \\ -\sqrt{-x} & -1 < x < 0 \end{cases}$$



Bien qu'elle soit uniformément continue, elle n'est ni lipschitzienne, ni localement lipschitzienne. En effet, soient les points $x = 0$ et $x = \xi$, il n'existe pas de constante L telle que:

$$\left| \sqrt{\xi} - \sqrt{0} \right| \le L \left| \xi - 0 \right|,$$

car ceci impliquerait que $L \ge \frac{1}{\sqrt{\xi}}$, relation fausse pour ξ suffisamment petit ($\xi \to 0 \Rightarrow L \to \infty$).

3 Différentiabilité et condition de Lipschitz

Proposition 3 Soit $f : U \to \mathbb{R}$, une application continument différentiable sur un intervalle fermé et borné $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, alors f satisfait à la condition

de Lipschitz ayant pour constante L la borne supérieure de la dérivée de f sur $[a,b]$; $L = \sup\limits_{x\in[a,b]} \left|f^{'}(x)\right|$.
D'après le théorème des accroissement finis on a :

$$\begin{aligned} \exists c &\in \left]a,b\right[/ \;\; f(b)-f(a) = f^{'}(c)(b-a) \\ |f(b)-f(a)| &= \left|f^{'}(c)\right| |b-a| \leq \sup_{c\in]a,b[} \left|f^{'}(c)\right| |b-a| . \end{aligned}$$

Donc f est lipschitzienne de constante de Lipschitz L.
Proposition 1 Si une fonction $f(x,y)$, définie sur un **ouvert** Ω, possède des dérivées partielles continues par rapport à y, elle est localement lipschitzienne dans Ω.
Proposition 2 Si une fonction $f(x,y)$ définie sur un **ouvert convexe** Ω a des dérivées partielles en y continues, elle est lipschitzienne $\Leftrightarrow$ ces dérivées sont bornées.
Proposition 3 Si une fonction $f(x,y)$ est localement lipschitzienne sur un **compact**, elle est lipschitzienne sur ce **compact**.
En utilisant le lemme suivant:
Lemme Nous avons :

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \left|\int_a^b |f(x)|\, dx\right|$$

et $|AB| \leq |A|\,|B|$.
Démonstration de la proposition 3. Joignons par un segment les points $x,y \in [a,b]$: posons $z(t) = x + t(y-x)$ d'où $z^{'}(t) = y-x$. D'après la formule de Newton-Leibnitz on a :

$$f(y)-f(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt}(f(z(t)))dt = \int_0^1 f^{'}(z(t))z^{'}(t)dt$$

et le lemme précédent:

$$|f(y)-f(x)| = \left|\int_0^1 f^{'}(z(t))z^{'}(t)dt\right| \leq \int_0^1 \left|f^{'}(z(t))\right| \left|z^{'}(t)\right| dt \leq \int_0^1 L\,|y-x|\,dt = L\,|y-x| ,$$

(où $L = \sup\limits_{x\in[a,b]} \left|f^{'}(x)\right|$) d'où f est lipschitzienne de constante $L > 0$. Ce qui'il falait démontrer.

Remarque $\left|f^{'}(x)\right|$ atteint son maximum sur $[a,b]$, en effet: $f \in \mathcal{C}^1$ par hypothèse, la dérivée $f^{'}(x)$ est donc continue, par conséquent $\left|f^{'}(x)\right|$ atteint son maximum L sur $[a,b]$, donc $\sup\limits_{x\in[a,b]} \left|f^{'}(x)\right|$ existe.

Conclusion Si f possède une dérivée $f^{'}$ bornée dans un domaine D alors f est lipschitzienne sur D.

Exemple: soit la fonction $f(x) = \sin x$, on a $f^{'}(x) = \cos x \Rightarrow \sup \left|f^{'}(x)\right| = 1 \Rightarrow f^{'}$ est bornée$\Rightarrow f$ est lipschitzienne avec $L = 1$.

c-à-d

$$|f(x) - f(y)| = |\sin x - \sin y| \leq \sup \left|f^{'}(x)\right| |x - y| = |x - y| .$$

Attention: la réciproque n'est pas toujours vraie :

exemple: $f(x) = 2|x|$ n'est pas dérivable au point $x = 0$, mais la condition de Lipschitz est satisfaite au voisinage de ce point, en effet

$$|f(x) - f(y)| = |2|x| - 2|y|| = 2||x| - |y|| \leq 2|x - y| .$$

Donc f est lipschitzienne de constante de Lipschitz $L = 2$.

Proposition 4 Si une fonction $f(x,y)$ possède une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}$ continue dans un rectangle $U = [a,b] \times [c,d]$, alors $f(x,y)$ admet une constante de Lipschitz par rapport à y sur U, et la plus petite vaut: $L = \sup \sup\limits_{(x,y)\in U} \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$.

Démonstration Remarquons d'abord que, puisque U est fermé et borné et $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue alors le nombre L existe:

d'après le théorème des accroissements finis appliqué à $f(x,y)$ considéré comme fonction de y donne:

$$f(x,y_1) - f(x,y_2) = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x,y^*)} (y_1 - y_2) ,$$

avec $y_1 < y^* < y_2$, on a donc:

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L|y_1 - y_2| .$$

Le nombre L est donc une constante de Lipschitz et on pourra vérifier que c'est bien la plus petite.

Exemple 1 L'équation: $y^{'} = f(x,y) = ay + b$ admet $L = |a|$ comme constante de lipschitz.

Exemple 2 soit l'équation $y^{'} = f(x,y) = \sin xy$ dans $U = [0,3] \times [-5,5]$. On a

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial (\sin xy)}{\partial y} = x\cos xy \text{ et donc } \sup \left| \frac{\partial (\sin xy)}{\partial y} \right| \leq |x| \leq 3.$$

De plus, si $x = 3$ et $y = 0$,on a $\frac{\partial (\sin xy)}{\partial y} = 3$, donc 3 est la meilleure constante de Lipschitz de $f(x,y)$ dans ce rectangle U.

Exemple 3 Soit l'équation: $y^{'} = f(x,y) = -c\,|y|$ on a

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \begin{cases} -c \text{ si } y > 0 \\ \text{non définie si } y = 0 \\ c \text{ si } y < 0 \end{cases}$$

La fonction $f(x,y) = -c\,|y|$ n'est pas dérivable par rapport à y en $y = 0$, mais on a toujours

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = c\,|-|y_1| + |y_2|| \leq c\,|y_1 - y_2|,$$

f est lipschitzienne .

Exemple 4 Soit l'équation: $y^{'} = f(x,y) = -c\sqrt{|y|}$ la fonction $-c\sqrt{|y|}$ n'est pas dérivable par rapport à y en $y = 0$.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \begin{cases} \frac{-c}{2\sqrt{y}} \text{si } y > 0 \\ \text{non définie si } y = 0 \\ \frac{c}{2\sqrt{-y}} \text{ si } y < 0, \end{cases}$$

mais on a $\lim\limits_{y \to 0} \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| = +\infty$, le théorème des accroissements finis permet alors de montrer qu'il n'existe pas une constante de Lipschitz dans aucune région rencontrant l'axe des x. f n'est pas dérivable et n'est pas lipschitzienne.

Théorème d'existence et d'unicité de la solution du problème de Cauchy.

Nous allons chercher quelle condition que doit vérifier la fonction f pour que le problème de Cauchy admette une et une seule solution?

Théorème de Cauchy-Lipschitz Soit le problème de Cauchy suivant:

$$\begin{cases} y^{'} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{4}$$

Si : 1) f est continue dans le rectangle $U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\right\}$

2) f est lipschitzienne par rapport à y dans le rectangle U.

Alors il existe une seule solution du problème de Cauchy (4) définie dans l'intervalle $[x_0 - h, x_0 + h]$ où

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right) \quad \text{et } M = \sup_{(x,y)\in U} |f(x,y)|\,.$$

Démonstration Le théorème de Cauchy-Lipschitz constitue le résultat fondamental de la théorie des équations différentièlles. Pour démontrer ce théorème, nous allons utiliser la méthode des approximations successives de **Picard.**

Proposition 5 Une fonction $y(x)$ est une solution du problème de Cauchy si et seulement si $y(x)$ est solution continue de l'équation integrale:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt \tag{5}$$

i.e.,

$$\text{équation diff} \begin{cases} y^{'} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{équation intégrale } y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt.$$

Démonstration $(\Rightarrow)$ on suppose que $y(x)$ est une solution du problème de Cauchy (4) dans U alors $y^{'} = f(x,y)$ donc il existe un intervalle J contenant x_0 tel que $y(x)$ et $y^{'}(x)$ sont continues dans J. En intégrant les deux côtés de l'équation diff pour $x \in J$, on obtient:

$$\int_{x_0}^{x} y^{'}(t)dt \equiv y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt \Rightarrow y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt.$$

$(\Leftarrow)$ Soit $y(x)$ une solution continue de l'équation intégrale (5) dans J. Puisque f est continue, $f(t, y(t))$ est aussi continue dans J, alors $y(x)$ est différentiable, cependant:

$$y^{'}(x) = 0 + f(t, y(t))|_{x_0}^{x} = f(x, y(x)) \text{ et } y(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} f(t, y(t))dt.$$

$$\left(\text{ si } g(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt \text{ alors } g^{'}(x) = v^{'}(x)f(v(x)) - u^{'}(x)f(u(x))\right).$$

D'où $y(x)$ vérifie le problème de Cauchy.

Itération de Picard:

Construisons la solution de l'équation intégrale (5) par la méthode des approximations successives de Picard qui consiste à former une suite de fonctions $\{y_n(x)\}_{n\geq 0}$ définie par la relation de récurrence suivante:

$$\begin{aligned}
y_0(x) &= y_0 \text{ (l'élément initial)} \\
y_1(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0(t))dt \\
&\dots \\
y_{n+1}(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt \text{ pour } n = 0, 1, ...
\end{aligned}$$

Le noeud de la démonstration consiste alors à réecrire le problème de Cauchy (4) sous la forme intégrale (5) et à chercher une solution comme limite de la suite $\{y_n(x)\}_{n\geq 0}$.

$1^{ère}$ étape: on montre que $y_n(x) \in U$ pour tout n.

$2^{ème}$ étape: on montre que la suite $\{y_n(x)\}_{n\geq 0}$ converge uniformément sur $[x_0 - h, x_0 + h]$.

$3^{ème}$ étape existence de solution $y(x) = \lim\limits_{n\to\infty} y_n(x)$ est continue sur $[x_0 - h, x_0 + h]$ et une solution de l'équation (5).

$4^{ème}$ étape: unicité de la solution .

Tout d'abord, la continuité de f au point (x_0, y_0) de U entraine l'existence d'un voisinage de ce point sur lequel la fonction f soit bornée, donc $\exists M > 0 : |f(x, y)| \leq M$.

I-Nous allons montrer que la suite $\{y_n(x)\}_{n\geq 0}$ est définie sur $[x_0 - h, x_0 + h]$ (ou le graphe de $y_n \subset U$). Cela veut dire que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [x_0 - h, x_0 + h] \Rightarrow (x, y_n(x)) \in U$? on fait le résonnement par récurrence:

on a évidemment $y_0(x) = y_0 \in U$ par induction). Formulons la différence suivante:

$$\begin{aligned}
|y_1(x) - y_0| &= \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y_0(t))dt \right| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y_0(t))| \, dt \\
&\leq M \int_{x_0}^{x} dt = M (x - x_0) \leq M |x - x_0| \leq b \Rightarrow |x - x_0| \leq \frac{b}{M} \\
\text{et } |x - x_0| &\leq a \Rightarrow |x - x_0| \leq \min(a, \frac{b}{M}).
\end{aligned}$$

figure

Posons $h = \min(a, \frac{b}{M})$. De même en supposant que $(x, y_n(x)) \in U$ et on montre que $(x, y_{n+1}(x)) \in U$, on a

$$|y_{n+1}(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t)) dt \right| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y_n(t))| \, dt \leq M \, (x - x_0) \leq Mh \leq b.$$

C'est à dire le graphe de y_{n+1} contenu dans U. Donc $(x, y_n(x)) \in U$, $\forall x \in [x_0 - h, x_0 + h]$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

II-Nous allons montrer que la suite $\{y_n(x)\}_{n \geq 0}$ converge uniformément sur $[x_0 - h, x_0 + h]$.

Nous avons

$$\begin{aligned} |y_{k+1}(x) - y_k(x)| &\leq \left| \int_{x_0}^{x} |f(t, y_k(t)) - f(t, y_{k-1}(t))| \, dt \right| \leq L \left| \int_{x_0}^{x} |y_k(t) - y_{k-1}(t)| \, dt \right| \\ & \text{car } f \text{ est lipschitzienne de constante } L. \end{aligned}$$

Si $k = 1$:

$$|y_2(x) - y_1(x)| \leq L \left| \int_{x_0}^{x} |y_1(t) - y_0(t)| \, dt \right| \leq Lb \, (x - x_0)$$

$k = 2$:

$$|y_3(x) - y_2(x)| \leq L \left| \int_{x_0}^{x} |y_2(t) - y_1(t)| \, dt \right| \leq L \left| \int_{x_0}^{x} Lb \, (t - x_0) \, dt \right| = L^2 b \frac{(x - x_0)^2}{2}.$$

On peut montrer par récurrence que pour $k = n$ on a

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| \leq L^n b \frac{|x - x_0|^n}{n!}.$$

Montrons que $\{y_n(x)\}_{n \geq 0}$ est une suite de Cauchy?
Considérons m et n tel que $m > n$, on peut écrire:

$$\begin{aligned} |y_m(x) - y_n(x)| &= \left| \begin{array}{c} y_m(x) - y_{m-1}(x) + y_{m-1}(x) - \\ y_{m-2}(x) + y_{m-2}(x) + ... + y_{n-1}(x) - y_{n-1}(x) \end{array} \right| \\ &= \left| \sum_{k=n}^{m-1} (y_{k+1}(x) - y_k(x)) \right| \leq \sum_{k=n}^{m-1} |y_{k+1}(x) - y_k(x)| \\ &\leq \sum_{k=n}^{m-1} L^k b \frac{|x - x_0|^k}{k!}. \end{aligned}$$

Puisque $x \in [x_0 - h, x_0 + h] \Rightarrow |x - x_0| \leq h$, donc

$$|y_m(x) - y_n(x)| \leq \sum_{k=n}^{m-1} L^k b \frac{h^k}{k!} \leq b \sum_{k=n}^{m-1} \frac{(Lh)^k}{k!}$$

or $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{L^k h^k}{k!} = e^{Lh}$ converge, donc d'après la définition de la convergence:

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0$ tel que $n > N_0 : \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(Lh)^k}{k!} < \varepsilon$ et

$$|y_m(x) - y_n(x)| \leq b \sum_{k=n}^{m-1} \frac{(Lh)^k}{k!} \leq b \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Lh)^k}{k!} < b\varepsilon.$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0$ tel que $n > N_0, \forall x \in [x_0 - h, x_0 + h] \Rightarrow |y_m(x) - y_n(x)| < \varepsilon$.
D'où $\{y_n(x)\}_{n \geq 0}$ est une suite de Cauchy converge uniformément sur $[x_0 - h, x_0 + h]$.

III- Existence de solution. Nous allons montrer que $y(x) = \lim\limits_{n \to \infty} y_n(x)$ et $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ est une solution du problème de Cauchy, on a:

$y_{n+1}(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt$, faisant le passage à la limite quand $n \to \infty$

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to \infty} y_{n+1}(x) &= \lim_{n \to \infty} \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt \right) \\
&= y_0 + \lim_{n \to \infty} \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt = y_0 + \int_{x_0}^{x} \lim_{n \to \infty} f(t, y_n(t))dt \\
&= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \lim_{n \to \infty} y_n(t))dt = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt = y(x).
\end{aligned}$$

Donc la solution du problème de Cauchy existe.

IV- Unicité de la solution. Soit $z(x)$ une autre solution du problème de Cauchy donc $z(x)$ est solution de l'équation intégrale

$$\begin{aligned}
z(x) &= z_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, z(t))dt \\
\text{et } y(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt \text{ avec } y(x_0) = z(x_0),
\end{aligned}$$

soit $M = \sup\limits_{x\in[x_0-h,x_0+h]} |y(x)-z(x)|$ on a

$$\begin{aligned}|z(x)-y(x)| &\leq \left|\int\limits_{x_0}^{x} |f(t,z(t))-f(t,y(t))|\,dt\right| \leq L\left|\int\limits_{x_0}^{x} |z(t)-y(t)|\,dt\right| \\ &\leq LM\int\limits_{x_0}^{x} dt \leq LM\,(x-x_0)\,.\end{aligned}$$

Aussi on a

$$|z(x)-y(x)| \leq L\left|\int\limits_{x_0}^{x} LM\,(t-x_0)\,dt\right| \leq L^2M\left|\int\limits_{x_0}^{x} (t-x_0)\,dt\right| \leq L^2M\frac{(x-x_0)^2}{2}.$$

D'où $\forall n, \forall x \in [x_0-h, x_0+h]$:

$0 \leq |z(x)-y(x)| \leq ML^n\dfrac{|x-x_0|^n}{n!} \leq ML^n\dfrac{h^n}{n!}$ qui tend vers 0 quand $n \to \infty$.

Finalement $z(x) = y(x), \forall x \in [x_0-h, x_0+h]$, d'où l'unicité de la solution du problème de Cauchy.
Remarque. Pour note sachez qu'il existe d'autres preuves du théorème de Cauchy Lipschitz s'appuyant elles-aussi sur un théorème du point fixe.

Un outil indispensable La théorie des équations différentièlles utiliseabondamment le lemme (ou l'inégalité de Gronwall). Si une fonction u à valeurs dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, satisfait une inégalité différentièlle du type:

$$u^{'}(t) \leq b(t) + a(t)u(t) \text{ pour tout } t \in [0,T] \tag{1}$$

alors

$$u(t) \leq e^{\int\limits_0^t a(s)ds} u(0) + \int b(\tau)e^{\int\limits_\tau^t a(s)ds} d\tau \ ,\forall t \in [0,T]$$

l'inégalité différentièlle implique

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-\int\limits_0^t a(s)ds} u(t)\right) \leq e^{-\int\limits_0^t a(s)ds}.b(t) \tag{2}$$

$$\left[-a(t)+e^{-\int_0^t a(s)ds}\right].u(t)+e^{-\int_0^t a(s)ds}.u^{'}(t) \quad \leq \quad e^{-\int_0^t a(s)ds}.b(t)$$

$$\Rightarrow \quad u^{'}(t) \leq b(t)+a(t)u(t)$$

par intégration entre 0 et t l'inégalité (2) on obtient l'inégalité annoncée.

Lemme de Gronwall Si $u \in \mathcal{C}(\,[0,T]\,,\mathbb{R}^{+})$ est telle qu'il existe a et $b \in \mathcal{C}(\,[0,T]\,,\mathbb{R}^{+})$ avec

$$u(t) \leq b(t)+\int_0^t a(\tau)u(\tau)d\tau, \forall t \in [0,T]\,,$$

alors

$$u(t) \leq b(t)+\int_0^t b(\tau)a(\tau)e^{\int_\tau^t a(s)ds}d\tau, \forall t \in [0,T]\,.$$

Démonstration La seule astuce consiste à majorer l'intégrale $v(t)=\int_0^t a(\tau)u(\tau)d\tau$ comme

$$\begin{aligned} v^{'}(t) &= a(t)u(t) \leq a(t)\left(b(t)+v(t)\right) \text{ (d'après le lemme)} \\ &\Rightarrow v^{'}(t) \leq a(t)b(t)+a(t)v(t) \end{aligned}$$

d'après l'inégalité (1) on a

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-\int_0^t a(s)ds}v(t)\right) \leq e^{-\int_0^t a(s)ds}.a(t).b(t)$$

$(v(0)=0)$ d'où d'après intégration:

$$v(t) \leq \int_0^t a(\tau)b(\tau)e^{\int_\tau^t a(s)ds}d\tau, \forall t \in [0,T]\,.$$

En majorant de cette façon $v(t)$ dans l'inégalité de départ, on obtient le résultat.
On peut prouver l'unicité de la solution du problème de Cauchy grâce au lemme de Gronwall:
Soit $y(x)$ la solution unique du problème de Cauchy et soit $z(x)$ est une autre solution sur $[x_0, x]$, on a

$$\begin{aligned} y(x) - z(x) &= y(x_0) - z(x_0) + \int_{x_0}^{x} (f(t, y(t)) - f(t, z(t)))\, dt \\ |y(x) - z(x)| &\leq |y(x_0) - z(x_0)| + L\int_{x_0}^{x} |y(t) - z(t)|\, dt, \end{aligned}$$

posons

$$\begin{cases} u(t) = |y(x) - z(x)| \\ b(t) = |y(x_0) - z(x_0)| \geq 0 \\ a(t) = L > 0. \end{cases}$$

D'après l'inégalité de Gronwall on a

$$\begin{aligned} |y(x) - z(x)| &\leq \underbrace{|y(x_0) - z(x_0)|}_{=0} + L\int_{x_0}^{x} |y(x_0) - z(x_0)|\,.Le^{\int_t^x Lds}\, dt \\ &\leq L\,|y(x_0) - z(x_0)| \int_{x_0}^{x} e^{\int_t^x Lds}\, dt = L\,|y(x_0) - z(x_0)| \int_{x_0}^{x} e^{L(x-t)}dt \\ &= L\,|y(x_0) - z(x_0)|\,.\left(\frac{-1}{L}\right) e^{L(x-t)}\Big]_{x_0}^{x} = |y(x_0) - z(x_0)| \left(e^{L(x-x_0)} - 1\right) \\ &\Rightarrow\ 0 \leq |y(x) - z(x)| \leq \underbrace{|y(x_0) - z(x_0)|}_{=0} \left(e^{L(x-x_0)} - 1\right) \end{aligned}$$

$\Rightarrow y(x) = z(x)$ d'où l'unicité de la solution.

Exercice Démontrer la variante suivante du lemme de Gronwall:
Soit $t_0 < t_1$ et soient f, u et v trois fonctions positives et continues de $[t_0, t_1] \to \mathbb{R}$, si pour tout $t \in [t_0, t_1]$,

$$f(t) \leq a + \int_{t_0}^{t} [f(\tau)u(\tau) + v(\tau)]\, d\tau$$

où a est une constante positive, alors pour tout $t \in [t_0, t_1]$

$$f(t) \leq a.e^{\int\limits_{t_0}^{t} \left[u(\tau) + \frac{v(\tau)}{a}\right] d\tau}.$$

Exemple 1 Trouver par la méthode des approximations successives la solution du problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}, x_0 = 0, y_0 = 1, f(x, y) = y.$$

On a $f(x, y)$ est continue $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ et

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |y_1 - y_2| \leq L\,|y_1 - y_2| \text{ où } L = 1$$

d'où f est lipschitzienne par rapport à y $\forall (x, y_1), (x, y_2) \in \mathbb{R}^2$.
Il est évident donc que les conditions du théorème de Cauchy Lipschitz sont satisfaites pour ce problème dans tout le plan xoy (d'où l'existence et l'unicité de la solution). Construisons la suite de fonctions $\{y_n(x)\}_{n \geq 0}$ par :

$$\begin{aligned}
y_0(x) &= 1 \\
y_1(x) &= y_0 + \int\limits_0^x y_0(t)dt = 1 + x \\
y_2(x) &= y_0 + \int\limits_0^x y_1(t)dt = 1 + x + \frac{x^2}{2!} \\
&\dots \\
y_n(x) &= 1 + \int\limits_0^x y_{n-1}(t)dt = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}
\end{aligned}$$

Il est clair que $\underset{n \to \infty}{y_n(x)} \to \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x$ donc la fonction $y(x) = e^x$ est la solution unique du problème de Cauchy posé sur l'intervalle $[0 - h, 0 + h]$ puisque $x_0 = 0$, on doit avoir la convergence uniforme :$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$, $M = \sup\limits_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} |f(x, y)| = \sup |y| = 1 + b$ car $|y - 1| < b$
$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right) \leq \frac{b}{1+b} \leq 1$, $(|x - 0| \leq a, |y - 1| \leq b)$ donc il existe une seule solution sur l'intervalle $[-1, 1]$.

Application pratique du théorème d'existence
Pour appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz il faut reconnaitre si l'application f est localement lipschitzienne. A cet effet, on utilisera souvent la remarque suivante:

Remarque Pour que $f(x, y)$ soit localement lipschitzienne par rapport à y, il suffit que la différentielle $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y^{'}(x, y)$ existe et qu'elle soit bornée.
Du théorème de Cauchy-Lipschitz, on déduit le résultat pratique suivant:

Théorème Soit $f(x, y)$ une fonction numérique continue sur un rectangle U de $\mathbb{R}^2$, telle que $\frac{\partial f}{\partial y}$ existe et soit continue sur U. Pour chaque (x_0, y_0) de U il existe un intervalle $]x_0 - h, x_0 + h[$ sur lequel l'équation différentielle $y^{'} = f(x, y)$ admet une solution unique satisfaisant à la condition initiale $y(x_0) = y_0$.
Ce théorème peut être utile de savoir ce qui se passe pour une équation différentielle lorsque la fonction f est non plus nécessairement lipschitzienne en y. Donc ce théorème fournit les conditions suffisantes d'existences de l'unique solution, mais ces conditions ne sont pas nécessaires.
Si la fonction f n'est pas lipschitzienne par rapport à y l'exemple suivant montre que le problème de Cauchy peut admettre plusieurs solutions définies sur un même voisinage de x_0 et satisfaisant à $y(x_0) = y_0$.

Exemple 1 L'équation diff: $y^{'} = f(x, y) = \frac{3}{2}\left|y\right|^{1/3}$ admet deux solutions définies sur tout $\mathbb{R}$ et vérifiant $y(0) = 0$: la fonction nulle $y \equiv 0$ et la fonction $y(x) = x\left|x\right|^{1/2}$. En effet $\left|y\right|^{1/3}$ n'est pas lipschitzienne au voisinage de $y = 0$. Il n'y a pas d'unicité de solution.

Exemple 2 Soit l'équation diff: $y^{'} = f(x, y) = \frac{1}{y^2}$, ici on a $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2}{y^3}$.
Nous avons $f(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ ne sont pas bornée pour $y \to 0$. Aux points $(x_0, 0)$ de l'axe Ox les conditions du théorème de Cauchy ne sont pas satisfaites, mais pour chaque point de l'axe Ox il passe l'unique courbe intégrale (solution) $y = \sqrt[3]{3(x - x_0)}$, on a unicité de solution.
Exemple 3 Pour l'équation diff $y^{'} = f(x, y) = xy + e^{-y}$ on a $\frac{\partial f}{\partial y} = x - e^{-y}$, $f(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en x et y en tout les points du plan xOy, les conditions du théorème sont satisfaites, d'où cette équation admet une solution vérifiant $y(x_0) = y_0$.

Exemple 4 L'équation diff: $y^{'} = f(x, y) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{y}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt[3]{y^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial y} \to \infty$ si $y \to 0$.
De sorte que pour $y = 0$ la condition du théorème d'existence et d'unicité n'esi pas satisfaite, on vérifiera aisément que la fonction $y = \frac{(x+c)^3}{8}$ est une

solution, de plus $y \equiv 0$ est une autre solution donc l'unicité n'est pas vérifiée aux points de l'axe Ox.

Exemple 5 soit L'équation diff: $y^{'} = f(x,y)$ où $f(x,y) = \begin{cases} \frac{4x^3y}{x^4+y^2} \text{ pour } x^2+y^2>0 \\ 0 \text{ pour } x=y=0 \end{cases}$
La condition de Lipschitz est essentielle pour l'unicité de la solution du problème de Cauchy:
$f(x,y)$ est continue mais:

$$f(x,y_1) - f(x,y_2) = \frac{4x^3(x^4-y_1)}{(x^4+y_2^2)(x^4+y_1^2)}.(y_1-y_2)$$

Si $y_2 = \alpha x^2$ et $y_1 = \beta x^2$ alors

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = \frac{4}{|x|}\left|\frac{1-\alpha\beta}{(1+\alpha^2)(1+\beta^2)}\right| |y_1-y_2|$$

et la condition de Lipschitz n'est remplie dans aucune région comprenant l'origine $(0,0)$ parceque le facteur $|y_1-y_2|$ se trouve non borné quand $x \to 0$. Cette équa-diff admet une solution $y = c^2 - \sqrt{x^4+c^4}$ où c est une constante arbitraire. On en déduit qu'il existe une infinité de solutions satisfaisant $y(0) = 0$.

Exercice Soit l'équa-diff $y^{'} = \alpha y + \beta$, avec $\alpha, \beta, y \in \mathbb{R}$. Elle admet la solution $y = -\frac{\beta}{\alpha}$. Malgré la régularité du seconf membre, cette solution est discontinue en $\alpha = 0$. Expliquez c paradoxe?.

Solution maximale d'une équation différentielle
En pratique, il est important de connaître le plus grand intervalle J de $\mathbb{R}$ pour lequel la conclusion théorème de Cauchy soit vraie.
Soit l'équa-diff

$$y^{'} = f(x,y) \tag{1}$$

Définition On dira qu'une solution $z : \left]\alpha, \beta^{'}\right[\to \mathbb{R}$ est un prolongement à droite d'une solution $y :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ si

$$\beta^{'} > \beta \text{ et si } \forall x \in]\alpha, \beta[: y(x) = z(x),$$

on définit de même un prolongement à gauche.
Ces deux notations sont des cas particuliers de la notion de prolongement, i.e., une solution $z : J \to \mathbb{R}$ de (1) sera appelée prolongement d'une solution $y : I \to \mathbb{R}$ de (1) si I est un sous-intervalle de J et si $\forall x \in I : y(x) = z(x)$.

Il est évident de dire que la trajectoire de y est contenu dans la trajectoire de z.

exemple

Solutions maximales

Définition *Une solution y de* (1)*, définie sur un intervalle J de $\mathbb{R}$, est appelée une solution maximale si elle n'admet pas de prolongement à un intervalle contenant J.*

Théorème *Soit $f : U \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$, une application localement lipschitzienne en y et continue. A tout point $(x_0, y_0) \in U$ est assiciée une et une seule solution maximale $y : I \to \mathbb{R}$ de l'équation -diff $y^{'} = f(x, y)$ telle que $y(x_0) = y_0$.*

La définition de la solution maximale montre qu'il existe un plus grand intervalle J sur lequel le problème de Cauchy admet une solution unique.
Par définition, on ne peut pas la prolonger à $I \setminus J$, lorsque $J = I$ on dit que cette solution est globale.
On peut parfois, montrer que toutes les solutions maximales sont globales. C'est la cas si la fonction f est définie sur X tout entier et si elle est globalement lipschitzienne.
Exemple 1 L'équa-diff $y^{'} = y^2$ admet pour solution maximale les fonctions $y(x) = \frac{1}{a-x}$, $x > a$ et les solutions $y(x) = \frac{1}{a-x}$, $x > a$ où a est une constante réelle arbitraire.

$$figure$$

Exemple 2 L'équa-diff $y^{'} = 1+y^2$ admet pour solution maximale les fonctions $y(x) = \tan(x - a)$, $a - \frac{\pi}{2} < x < a + \frac{\pi}{2}$.
Exemple 3 Toutes solutions maximales des équa-diff de types $y^{'} = a(x)y + b(x)$ sont globales.
Exemple 4 La solution $y(x) = e^x$ de l'équa-diff $y^{'} = y$, $y(0) = 1$ est une solution globale parceque elle est définie sur tout $\mathbb{R}$.

Champs de vecteurs (définitions)

Un champs de vecteurs est une construction qui associe un vecteur à chaque point de l'espace euclidien. Les champs de vecteurs sont souvent utilisés en physique pour modéliser par exemple la vitesse et la direction d'un fluide en mouvement dns l'espace, ou la valeur et la direction d'une force, comme la force magnétique ou gravitationnelle (chute libre).
Autrement dit: un champs de vecteur est une application continue f qui à un point de $\mathbb{R}^n$ associe un vecteur.

$$f : \underset{p \mapsto f(p)=(p,v)}{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n}$$

Exemple 1 $\quad f : \underset{\substack{p \mapsto f(p)=(p,v) \\ v=(1,0)}}{\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2}$

Exemple 2 $\quad f : \underset{\substack{p \mapsto f(p)=(p,v) \\ v=(x,y)}}{\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2}$

Exemple 3 $f : \underset{p=(p_1,p_2,\ldots,p_n) \mapsto f(p)=(p,v)}{U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n}$ on prendera le champs de vecteur $\mathcal{C}^\infty$ de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Champs de vecteurs et les équations différentielles ordinaires
Soit l'équation -diff

$$y^{'} = f(x, y) \tag{1}$$

la fonction f supposée définie sur un domaine U de $\mathbb{R}^2$. Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$, une fonction $y(x) : J \to \mathbb{R}$ s'appelle solution de (1) dans J si y est diffrentiable dans J et si le graphe de y est un sous-ensemble de U et si y vérifie (1) i.e.,

$$(x, y(x)) \in U \text{ et } y^{'} = f(x, y(x)) \text{ pour tout } x \in J.$$

L'interprétation géométrique de l'équation (1)
Si $y(x)$ est une (courbe intégrale) solution de (1) qui passe par un point (x_0, y_0) (i.e., $y(x_0) = y_0$), ou (x_0, y_0) est un point du graphe de y, et en ce point la pente de la tengente au graphe est $y^{'}(x_0) = f(x_0, y(x_0))$.

$$figure$$

Donc a chaque point (x, y) du plan , on associe une direction donnée par la pente $y^{'}(x) = f(x, y) = \tan\alpha = \frac{\triangle y}{\triangle x}$. L'ensemble de toutes les directions s'appelle champde directions de l'équa-diff (ou encore de son champ de vecteurs).

$$figure$$

Résultat. Le graphe d'une solution de l'équa-diff est en tout point tangent au champ de directions.
(c'est pour cela qu'on dit qu'une solution est une ligne de champ).
Le tracé du champ de vecteurs est très important dans l'étude des solutions d'une équation différentielle. Il permet de deviner sur le dessin le comportement des solutions.

Exemple1 $y^{'} = f(x)$, f continue sur J (intervalle de $\mathbb{R}$).$y(\xi) = 0$ condition initiale.

$$y(x) = \int\limits_{\xi}^{x} f(t)dt, \text{ vérifie } y(\xi) = 0.$$

exemple: $y^{'} = x^3 + \cos x$, $y(1) = 1 \Rightarrow y(x) = \frac{1}{4}x^4 + \sin x - \sin 1 + \frac{3}{4}$.

$$figure$$

Exemple 2 $y^{'} = g(y)$, $y(\xi) = \eta$

$$x(\eta) = \xi \Rightarrow x(y) = \xi + \int\limits_{\eta}^{y} \tfrac{dz}{g(z)}.$$

exemple $y^{'} = -2y \Rightarrow y(x) = ce^{-2x}$, $c \in \mathbb{R}$

$$figure$$

Définition *Le champ de vecteurs v sur U associe à chaque point x du domaine U un vecteur $v(x)$ admettant ce point pour origine.*

$$figure$$

$y^{'}(x) = f(x, y) = \frac{\partial y}{\partial x}$ vitesse, par conséquent, les vecteurs vitesse engenfrent sur l'espace U un champ de vecteurs v.
Exemple Soit l'équa-diff $y^{'} = -ky = f(x, y)$ avec $k > 0$
$v(x) = -ky$ est la vitesse (champ de vecteurs) sur $U = \{y/y > 0\}$.
i.e., le champ de vecteurs v sur la demi-droite est orienté versl'origine et le vecteur vitesse est propotionnel à y

$$figure$$

Enveloppe d'une famille de courbes
Soit une équation diff de la forme

$$\Phi(x, y, c) \tag{1}$$

où c un paramètre, pour chaque valeur donnée du paramètre c, l'équation (1) définit une certaine courbe (solution de l'équa-diff) dans le plan xoy. Donnons à c toutes les valeurs possibles, nous obtenons un famille de courbes dépendant d'un paramètre. Par conséqient l'équation (1) est l'équation d'une famille de courbes.

Définition *On appelle enveloppe L d'une famille de courbes à un paramètre une courbe tengente en chacun de ses points à une courbe de la famille (voir figure).*

$$figure$$

Exemple 1 Considérons la famille de courbes: $(x-c)^2 + y^2 = r^2$ où r est une constante et c un paramètre. C'est l'équation d'une famille de cercles de rayon r centrés sur l'axe ox. Il est évident que cette famille admet poue enveloppe les droites $y = r$ et $y = -r$ (voir figure)

$$figure2$$

Equation de l'enveloppe d'une famille de courbes Soit la famille de courbes

$$\Phi(x, y, c) \tag{1}$$

c :paramètre
Supposons que cette famille ait une enveloppe dont l'équation puisse être mise sous la forme $y = \varphi(x)$, $\varphi(x)$ étant une fonction continue dérivable. Par conséquent, on détermine l'envelope par les deux équations suivantes (voir le détail dans Piscounov,tome II, 1ère partie, p45).

$$\begin{cases} \Phi(x, y, c) = 0 \\ \Phi'_c(x, y, c) = 0 \text{ est la dérivée de } \Phi \text{ par rapport à } c. \end{cases}$$

Exemple 1: Trouver l'enveloppe de la famille de cercles dépendant d'un paramètre c :

$$(x-c)^2 + y^2 - r^2 = 0. \tag{1}$$

En dérivant l'équation par rapport à c : $2(x-c) = 0 \Rightarrow c = x$, en utilisant (1) (voir figure 2), on a $y^2 - r^2 = 0 \Rightarrow y = \pm r$ (l'équation de l'enveloppe) (il faut éliminer le paramètre c pour trouver l'équation de l'enveloppe).
Exemple 2 Trouver l'enveloppe de la famille de droites:

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0, \ \alpha \text{ est le paramètre} \tag{2}$$

en dérivant parapport à α on

$$-x \sin\alpha + y \cos\alpha = 0 \tag{3}$$

Pour éliminer α, en miltiplions (1) par $\cos\alpha$ et (2) par $\sin\alpha$, on obtient $x = p\cos\alpha$, elevons les deux membres des (1) et (2) au carré et ajouton les, on a:

$$x^2 + y^2 = p^{2\cdot}$$

C'est l'équation d'un cercle. Ce cercle est l'enveloppe de la famille de droites voir figure.

$$figure$$

Solutions singulières des équations différentielles du premier ordre

Supposons que l'équa-diff:

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

ait pour intégrale (solution) générale:

$$\Phi(x, y, c) = 0 \tag{2}$$

Supposons que la famille de courbes intégrales de (1) ait une enveloppe. On peut montrer que cette enveloppe est également une courbe intégrale (solution) de (1) (voir pourquoi dans la page 51 de Piscounov). Il peut exister, des solutions de (1) vérifiant , en certains points, la relation

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, y') = 0 \tag{3}$$

où $\frac{\partial F}{\partial z}$ désigne la dérivée par rapport à la troisième variable (i.e., $y' = z$).
et il peut exister plusieurs solutions de (1) prenant la même valeur en l'un de ces points (dans ce cas le théorème de Cauchy Lipschitz ne s'applique pas), par exemple: l'équa-diff:$\left(y'\right)^2 = 1 - y^2$ admet deux solutions vérifiant $y(0) = 0$ à savoir $y_1(x) = \sin x$ et $y_2(x) = -\sin x$.
Il peut même arriver (mais ce cas est relativement plus exceptionnel) qu'il existe des solutions de (1) vérifiant (3) en chaque point de leur intervalle de définition. Une telle solution sont dites **Singulières** plus généralement, nous paserons la définition suivantes:

Définition *Soit F une fonction numérique de classe C^1 sur un domaine de R^{n+2}. Une solution de l'équa-diff*

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$$

est dite singulière si , entout point x de son intervalle de définition, elle vérifie:

$$\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}(x, y, y^{'}, y^{''}, ..., y^{(n)}) = 0.$$

Exemple 1 soit l'équa-diff: $\left(y^{'}\right)^2 - xy + y = 0$ admet pour seule solution singulière la fonction $y(x) = \frac{x^2}{4}$ en effet si on pose:

$$F(x, y, y^{'}) = F(x, y, z) = xz - z^2 - y \quad (y^{'} = z)$$

on a $\frac{\partial F}{\partial z} = x - 2z = 0 \Leftrightarrow z = \frac{x}{2} \Rightarrow y(x) = \frac{x^2}{4}$, et la fonction $y(x) = \frac{x^2}{4}$ est la seule solution vérifiant à la fois $F(x, y, y^{'}) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial y^{'}}(x, y, y^{'}) = 0$.
Exemple 2 Trouver la solution singulière de l'équa-diff:

$$y^2(1 + \left(y^{'}\right)^2) = r^2 \qquad (*)$$

Trouvons sont intégrale générale. Résolvons par rapport à $y^{'}$: $y^{'} = \pm\frac{\sqrt{r^2-y^2}}{y}$ on trouve on séparant les variables: $\frac{ydy}{\pm\sqrt{r^2-y^2}} = dx$.
On déduit l'intégrale (solution) générale: $(x-c)^2 + y^2 = r^2 \Leftrightarrow \Phi(x, y, c) = (x-c)^2 + y^2 - r^2$.
On voit que la famille de courbes intégrale est la famille de cercles de rayon r centés sur l'axe des abscisses. L'enveloppe de cette famille de courbes de cercles est donnée par les deux droites $y = \pm r$. (voir l'exemple sur l'enveloppe) $\Phi(x, y, c) = 0$ et $\Phi_c^{'}(x, y, c) = 0$.
soit $F(x, y, z) = y^2(1+z^2) - r^2 / y^{'} = z$, $\frac{\partial F}{\partial z} = 2y^2 z = 0 \Leftrightarrow z = y^{'} = 0 \Rightarrow y = c$ on a

$$y^{'} = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y^2(1 + \left(y^{'}\right)^2) = r^2 \\ y = c \end{array} \right. \Rightarrow c^2(1+0) = r^2 \Rightarrow c = \pm r.$$

$\Rightarrow y = \pm r$ ces fonctions vérifiant l'équation $(*)$ et $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$ elle représentent les solutions singulières.

Remarques
1- Toutes fois, on rencontre des équa-diff admettant des solutions qui ne s'obtiennent pas à partir de la solution générale, quelles que soient les valeurs de la constante c, de telles solutions dites singulières.
2- La courbe représentative d'une solution singulière est la courbe intégrale qui en chacyn de sec points admet une tengente commune à l'une des courbes

intégrales définies par la solution générale, une telle courbe est dite enveloppe de la famille de courbes intégrales. Le graphe de la solution singulières est l'enveloppe de la famille des courbes intégrales.
3- On appelle solution singulière du problème de Cauchy toute solution sur des points où la solution n'est pas unique.
Exemple l'équa-diff $\left(y'\right)^2 = 1 - y^2$ admet la solution générale $y = \sin(x+c)$, alors que la fonction $y(x) = 1$qui ne peut pas être obtenue à partir de la solution générale $\forall c$, est quand^même une solution de l'équa-diff en question, il s'agit donc d'une solution singulière.
$F(x, y, y') = 0, \frac{\partial F}{\partial z} = y' = 0 \Rightarrow y = c/\ \sqrt{1-c^2} = 0 \Rightarrow c = \pm 1 \Rightarrow y = \pm 1$ des solutions singulières.

$$figure$$

Exemple 2 $\left(y'\right)^2 - xy + y = 0$ (*) admet deux solutions vérifiant $y(x_0) = y_0$ à savoir $y_1(x) = m_1 x - m_1^2$ et $y_2(x) = m_2 x - m_2^2$ où m_1 et m_2 sont les racines de l'équation $m^2 - m x_0 + y_0 = 0$ (équation de Clairaut). Mais l'équation (*) admet aussi la solution singulière $y_3(x) = \frac{x^2}{4}$.

$$figure$$

Remarque qu'il passe au moins deux courbes intégrales singulières, c'est-à-dire l'unicité de la solution est violée en chaque point d'une solution singulière.

Equation différentielle d'ordre supérieure à un
Une équation différentielle d'ordre n est de la forme

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$$

ou encore si elle est résoluble par rapport à $y^{(n)}$, i.e.,

$$y^{(n)} = f(x, y, y, y, ..., y^{(n-1)}) \tag{1}$$

Le problème qui consiste à trouver une solution $y = \varphi(x)$ de l'équation (1) satisfait aux conditions initiales:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \tag{2}$$

s'appelle problème de Cauchy pour l'équation (1).

Théorème d'existence et d'unicité de la solution du problème de Cauchy

Si, dans l'équation (1), *la fonction* $f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)})$

1- est continue en tous ses arguments $x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}$ *dans un certaindomaine* D *de leur variation.*

2- possède dans le domaine D *des dérivées partielles :* $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, ..., \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ *par rapport aux arguments* $y, y', y'', ..., y^{(n-1)}$, *alors il existe un intervalle* $]x_0 - h, x_0 + h[$ *dans lequel il existe une solution unique* $y = \varphi(x)$ *de l'équation* (1) *satisfait aux conditions initiales* (2).

Pour une équat-diff du second ordre $y'' = f(x, y, y')$ les conditions initiales sont de la forme $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0$ où x_0, y_0, y'_0 sont des nombres donnés.

Définition *On appelle solution générale d'une équation différentielle du* $n-$ *ième ordre une fonction:* $y = \varphi(x, c_1, c_2, ..., c_n)$ *dépendant de* n *constantes arbitraires* $c_1, c_2, ..., c_n$.

Toute fonction se déduisant de la solution générale, en concrétisant les valeurs $c_1, c_2, ..., c_n$ est une solution particulière.

Exemple1: Considérons l'équa-diff $y'' = \sin y + e^{-x^2 y}$ et les conditions initiales $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0$, dans ce cas $f(x, y, y') = \sin y + e^{-x^2 y}$ cette fonction est définie et continue pour toutes les valeurs de x, y, y'. Ses dérivées partielles par rapport à y, y' sont

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x^2 e^{-x^2 y} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y'} = \cos y'$$

et sont partout des fonctions continues et bornées par suites, quelles que soient les conditions initiales $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0$, il existe toujours une solution et une seule de cette équa-diff qui satisfait à ces conditions.

Exemple 2 l'équa-diff : $y'' - 2\sqrt{y'} = 0$ possède deux solutions $y_1(x) = 0$ et $y_2(x) = \frac{x^3}{3}$ qui satisfont aux conditions initiales $y(0) = 0, y'(0) = 0$.

Pour quoi ce résultat n'est -il pas en contradiction avec le théorème d'existence et d'unicité de la solution du problème de Cauchy?

(la condition $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}$ bornés est une condition suffisante et n'est pas nécessaire)

Proposition *Si la fonction* f *est continue dans un certain domaine* D, *quelque soit le point* $x_0, y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)}$ *de* D, *il existe une solution de* (1) *définie sur un intervalle de centre* x_0 *et satisfaisant à* $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

Si de plus, la fonction f *est localement lipschitzienne par rapport à l'ensemble des variables* $y, y', y'', ..., y^{(n-1)}$ *alors la solution précdemment définie est unique.*

Remarque Dire que f est localement lipschitzienne par rapport à l'ensemble des variables $y, y^{'}, y^{''}, ..., y^{(n-1)}$, c'est-à-dire que chaque point $x_0, y_0, y_0^{'}, ..., y_0^{(n-1)}$ *de* D admet un voisinage V auquel on peut associer une constante $L > 0$ telle que l'on ait:

$$\left\| f(x, y, y^{'}, y^{''}, ..., y^{(n-1)}) - f(x, z, z^{'}, z^{''}, ..., z^{(n-1)}) \right\| \leq L \left[|y - z| + \sum_{i=1}^{n-1} \left| y^{(i)} - z^{(i)} \right| \right]$$

$\forall (x, y, y^{'}, y^{''}, ..., y^{(n-1)}), (x, z, z^{'}, z^{''}, ..., z^{(n-1)}) \in V$, (i) :désigne la dérivée d'ordre i.
Cette hypothèse est certainement réalisée si la fonction f est pourvue de dérivées partielles continues par rapport aux variables $y, y^{'}, y^{''}, ..., y^{(n-1)}$.

Equation de la forme $y^{(n)}(x) = f(x) \quad (1)$
C'est l'équation la plus simple du $n - ième$ ordre. Trouvons son intégrale générale. Intégrons par rapport à x les deux membres de (1) on a

$$y^{(n)}(x) = \left(y^{(n-1)}(x) \right)^{'} \Rightarrow y^{(n-1)}(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt + c_1$$

c_1 une constante d'intégration, x_0 une valeur arbitraire fixe de x, intégrons encore une fois:

$$y^{(n-2)}(x) = \int_{x_0}^{x} \left(\int_{x_0}^{x} f(t)dt \right) dt + c_1(x - x_0) + c_2$$

continuant ainsi, ob obtient (après n intégrations) l'expression de l'intégrale générale:

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} ... \int_{x_0}^{x} f(t)dt...dt + c_1 \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + c_2 \frac{(x - x_0)^{n-2}}{(n-2)!} + ... + c_n$$

où $c_1, c_2, ..., c_n$ sont des constantes. Pour trouver la solution particulière vérifiant les conditions initiales: $y(x_0) = y_0, y^{'}(x_0) = y_0^{'}, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$, il suffit de poser $c_n = y_0, c_{n-1} = y_0^{'}, ..., c_1 = y_0^{(n-1)}$.

Exemple Trouver l'intégrale générale de l'équa-diff $y^{''} = \sin(kx)$, et la solution particulière satisfaisant aux conditions initiales: $y(0) = 0, y^{'}(0) = 1$.

$$\begin{aligned} y'(x) &= \int_0^x \sin(kt)dt + c_1 = -\frac{\cos(kx) - 1}{k} + c_1 \\ y(x) &= -\int_0^x \left(\frac{\cos(kt) - 1}{k}\right) dt + \int_0^x c_1 dt + c_2 \\ &= -\frac{\sin(kx)}{k^2} + \frac{x}{k} + c_1 x + c_2 \text{ solution générale.} \end{aligned}$$

Pour trouver la solution particulière , il suffit de déterminer les valeurs de c_1 et c_2.
$y(0) = 0, c_2 = 0$, $y^{'}(0) = 1, c_1 = 1$, par conséquent la solution particulière s'écrit: $y(x) = -\frac{\sin(kx)}{k^2} + (\frac{1}{k} + 1)x$, k donnée.

Equations différentielles linéaires d'ordres supérieurs
C'est une équation de la forme:

$$y^{(n)} = a_0(x)y + a_1(x)y^{'} + ... + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + b(x) = f(x, y, y^{'}, ..., y^{(n-1)}) \quad (1)$$

où $a_0(x), a_1(x), ..., a_{n-1}(x), b(x)$, sont des fonctions données et continues sur un certain intervalle $]a, b[$, alors f est continue. L'équation (1) est dite linéaire non homogéne ou à second membre. Si toute fois $b(x) \equiv 0$, l'équation est dite linéaire homogéne.

Théorème *Soit ξ l'espace des solutions de l'équation* (1) *avec* $y(x_0) = y_0, y^{'}(x_0) = y_0^{'}, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$,
alors cet espace est un espace vectoriel de dimension n.

Démonstration voir que $(\xi, +)$ est un groupe commutatif et les conditions pour l'opération $\times$.($(\xi, +, \times)$,l'espace vectoriel).

Définition *Etant donné un espace vectoriel ξ de dimension n des solutions de l'quation* (1)*, donc ξ admet une base de n solutions indépendantes de* (1)*, un système de de n solutions indépendantes esi appelé système fondamental.*

Remarque Toute solution de l'équation différentielle linéaire peut s'écrire sous la forme d'une combinaisons linéaire des solutions d'un système fondamental.

Indépendance linéaire des fonctions Soit donné un système fini de n solutions $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ définies sur l'intervalle $]a, b[$. Les fonctions

$y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ sont dites linéairement dépendantes sur $]a, b[$ s'il existe des constantes $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, non toutes nulles et telles que pour toutes les valeurs de x prises dans l'intérvalle on ait l'identité:

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + ... + \alpha_n y_n(x) = 0, \forall x \in \,]a, b[\, .$$

Si cette identité n'est vérifiée que pour $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$, les fonctions $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ sont dites linéairement indépendantes sur $]a, b[$.

Exemple. Montrer que le système de fonctions $e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, e^{k_3 x}$, où k_1, k_2, k_3 sont deux à deux distincts ($k_1 \neq k_2 \neq k_3$) est linéairement indépendante sur $\mathbb{R}$.

Définition *deux fonctions y_1, y_2 sont dites linéairement indépendantes sur le segment $[a, b]$ si leur rapport n'est pas constant sur ce segment, i.e., $\frac{y_1}{y_2} \neq$ const. Sinon, les solutions sont dites linéairement dépendantes.*

Exemple soit l'équa-diff $y'' - y = 0$, on vérifie facilement que les fonctions $e^x, e^{-x}, 3e^x, 5e^{-x}$ sont des solutions de cette équation. Les solution e^x et e^{-x} sont linéairement indépendantes sur tout segment, étant donné que le rapport $\frac{e^x}{e^{-x}} = e^{2x}$ ne reste pas constant lorsque x varié, les fonctions e^x et $3e^x$ sont linéairement dépendantes car $\frac{3e^x}{e^x} = 3$ (const).

Définitions *soient $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ des fonctions, le déterminant*

$$W(y_1, y_2, ..., y_n) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

est appelé le déterminant de Wronski ou wronskien des fonctions $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$.

Equations différentielles linéaires homogénes

Définition *Une équation différentielle d'ordre n est dite homogéne si elle est de la forme*

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = 0 \tag{1}$$

où $a_1(x), a_2(x), ..., a_n(x)$ des fonctions données.

Théorème *Si $y_1, y_2, ..., y_n$ sont des solutions particulières linéairement indépendantes de l'équation (1) alors: $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... c_n y_n$ est la solution générale de cette équation où $c_1, c_2, ..., c_n$ sont des constantes arbitraires.*

La condition suffisante d'indépendance linéaire de n fonctions continues avec leurs dérivées jusqu'au $(n-1)-ième$ ordre sur l'intervalle $]a,b[$ consiste en ce que le déterminant de Wronski $W(y_1,y_2,...,y_n)$ de ces fonctions ne s'annule en aucun point de $]a,b[$, i.e., $W(y_1,y_2,...,y_n)\neq 0$.
Si les n fonctions données sont les solutions particulières d'une équation différentielle homogéne (1) , alors cette condition (non annulation de W) est non seulement suffisante mais égélement une condition nécessaire d'indépendance linéaire de ces n solutions.
Etablissant quelques propriétés fondamentales des équations linéaires homogénes, en nous bornant dans les démonstrations aux équations du second prdre de la forme.

$$y^{''}+a_1(x)y^{'}+a_2(x)y=0. \tag{2}$$

On cherche $(y_1(x),y_2(x))$ base de l'espace des solutions. Le système fondamental se compose de ses deux solutions linéairement indépendantes.

Théorème Si y_1 et y_2 sont deux solutions particulières de l'équation (2) alors $y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ est la solution générale de (2).

Démonstration Etant donné que y_1 et y_2 sont les solutions particulières de l'équation (2) on a

$$\begin{cases} y_1^{''}+a_1(x)y_1^{'}+a_2(x)y_1=0 \\ y_2^{''}+a_1(x)y_2^{'}+a_2(x)y_2=0 \end{cases} \tag{3}$$

Subtituant la somme $c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ dans (2) et prenant en considération les identités (3), aon aura:

$$\begin{aligned} & \left(c_1y_1(x)+c_2y_2(x)\right)^{''}+a_1(x)\left(c_1y_1(x)+c_2y_2(x)\right)^{'}+a_2(x)\left(c_1y_1(x)+c_2y_2(x)\right) \\ = \; & c_1(y_1^{''}+a_1(x)y_1^{'}+a_2(x)y_1)+c_2(y_2^{''}+a_1(x)y_2^{'}+a_2(x)y_2)=c_1.0+c_0.0=0. \end{aligned}$$

Ce qui montre que $c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ est solution de (2).

Conclusion Si y_1 est une solutions de l'équation (2) et si c est une sonstante, alors cy_1 est aussi une solution de cette équation.

Théorème *Si y_1 et y_2 sont les solutions particulières de l'équation* (2) *, sont linéairement dépendantes sur le segment* $[a,b]$*, leur wronskien est identiquement nul sur* $[a,b]$.
En effet, si $y_2=\lambda y_1$, où $\lambda=const.$, $y_2^{'}=\lambda y_1^{'}$ et

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1^{'} & y_2^{'} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y_1 & \lambda y_1 \\ y_1^{'} & \lambda y_1^{'} \end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix} y_1 & y_1 \\ y_1^{'} & y_1^{'} \end{vmatrix}=0.$$

Théorème *Si le déterminant de Wronski $W(y_1, y_2)$ des solutions y_1 et y_2 de l'équation (2) n'est pas nul en un point $x = x_0$ du segment $[a, b]$, il ne s'annule nulle part sur le segment.*

Démonstration y_1 et y_2 étant deux solutions de l'équation (2),

$$y_1^{''} + a_1(x)y_1^{'} + a_2(x)y_1 = 0 \text{ et } y_2^{''} + a_1(x)y_2^{'} + a_2(x)y_2 = 0$$

Multipliant les termes de la 2ième égalité par y_1 et la seconde par $-y_2$ et ajoutant, on obtient:

$$\left(y_1y_2^{''} - y_1^{''}y_2\right) + a_1\left(y_1y_2^{'} - y_1^{'}y_2\right) = 0 \tag{4}$$

le coeficient de a_1 dans (4) est le wronskien $W(y_1, y_2)$ et

$$y_1y_2^{''} - y_1^{''}y_2 = W_x^{'}(y_1, y_2) = \left(y_1y_2^{'} - y_1^{'}y_2\right)^{'}$$

par conséquent, l'égalité (4) s'écrit:

$$W^{'} + a_1W = 0. \tag{5}$$

Trouvons la solution de (5) satisfaisant à la condition intiale $W_{x=x_0} = W_0$. Trouvons d'abord la solution générale de (5). En supposons que $W \neq 0$, on a par séparation des variables

$$\frac{dW}{W} = -a_1dx \Rightarrow W = ce^{-\int\limits_{x_0}^{x} a_1(t)dt} \tag{6}$$

$c = const.$ (l'hypoyhèse $W \neq 0$ n'est plus indispensble).
La formule (6) est appelée formule de Liouville-Ostrogtatski.
Déterminant la constante c de sorte que soit vérifiée la condition initiale $x = x_0$. De (6) on a

$$W(x_0) = ce^{-\int\limits_{x_0}^{x} a_1(t)dt} = c$$

par conséquent la solution de (6) est

$$W = W_0e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a_1(t)dt} \tag{7}$$

En général:

$$W(y_1, y_2, ..., y_n) = W(y_1, y_2, ..., y_n)_{x=x_0}.e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a_1(t)dt}$$

formule deLiouville-Ostrogtatski.

Par hypothèse W_0, alors de (7) $W \neq 0, \forall x$, car $-\int\limits_{x_0}^{x} a_1(t)dt \neq 0$, le théorème est démontré.

Remarque Si le wronskien est nul pour une certaine valeur $x = x_0$, il est alors nul our toute valeur du segement $[a, b]$. Ceci résulte directement de la formule (6) , si $W = 0$ pour $x = x_0$ alors $W(x_0) = c = 0 \Rightarrow W \equiv 0, \forall x \in [a, b]$.

Conclusion si y_1 et y_2 sont deux solutions de l'équation (2) sur $[a, b]$ alors soit $W(x) \equiv 0, \forall x \in [a, b]$ soit $W(x) \neq 0, \forall x \in [a, b]$.

Thorème *y_1 et y_2 solutions de l'équation* (2) *est un* $\underbrace{\text{système fondamental de solutions}}_{a}$ $\Leftrightarrow \underbrace{W(x) \neq 0, \forall x \in [a, b]}_{b}$.

Preuve 1-$a \Rightarrow b$ ($\bar{b} \Rightarrow \bar{a}$)

On suppose que $W(x, y_1, y_2) = 0, \forall c \in [x_0, x_1] \Rightarrow W(c) = 0$ donc le wronskien $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = 0$.

Dans $\mathbb{R}^2$ les vecteurs $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} y_2 \\ y_2' \end{pmatrix}$ ne sont pas linéairement indépendants $\Rightarrow$ il existe $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ tel que

$$\begin{cases} \lambda y_1(c) + \mu y_2(c) = 0 \\ \lambda y_1'(c) + \mu y_2'(c) = 0, \end{cases} \quad \forall c \in [x_0, x_1]$$

d'où $\lambda y_1(x) + \mu y_2(x) = 0, \forall x \in [x_0, x_1], (\lambda, \mu) \neq (0, 0)$, soit y_1 et y_2 non indépendantes.

2- $b \Rightarrow a$ ($\bar{a} \Rightarrow \bar{b}$)

On suppose que y_1 et y_2 ne sont pas linéairement indépentantes, il existe $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ tel que

$$\begin{cases} \lambda y_1(x) + \mu y_2(x) = 0 \\ \lambda y_1'(x) + \mu y_2'(x) = 0, \end{cases}$$

on considére les vecteurs $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_1^{'} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} y_2 \\ y_2^{'} \end{pmatrix}$, pour que λ et μ soient solutions de ce système avec $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$, il est nécessaire que

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1^{'}(x) & y_2^{'}(x) \end{vmatrix} = 0, \forall x \in [x_0, x_1]$$

d'où $W(x, y_1, y_2) \equiv 0, \forall x \in [x_0, x_1]$.

Conclusion: y_1 et y_2 étant deux solutions particulière de l'équation (2), la solutions générale peut s'écrire sous la forme:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \text{ si } W(x, y_1, y_2) \neq 0.$$

Théorème *Si les solutions* y_1 *et* y_2 *de l'équation* (2) *sont linéairement indépendantes sur* $[a, b]$, *le wronskien formé avec ces solutions ne s'annule en aucun point de ce segment, i.e.,* $W(x) \neq 0, \forall x \in [a, b]$.

Théorème *Si l'on connait une solution particulière de l'équation* (2), *alors sa second solution, linéairement indépendante de la première, peut être trouvée d'après la formule (qui est le corollaire de la formule de Liouvile-Ostrogratski).*

Démonstration Soit y_1 une solution particulière de l'équation (2) i.e.,

$$y_1^{''} + a_1(x) y_1^{'} + a_2(x) y_1 = 0 \tag{2}$$

trouvons une autre solution particulière y_2 de l'équation (2) telle que y_1 *et* y_2 soient linéairement indépendantes. La solution générale s'écrira alors $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ où c_1 et c_2 sont des constantes arbitraires, on vertu de la formule (6) on a

$$W(x) = y_2^{'} y_1 - y_2 y_1^{'} = c e^{-\int a_1 dx}$$

par conséquent, pour déterminer y_2 nous avons une équation différentielle linéaire du premier ordre: intégrons-la comme suit: divisons tous les termes par y_1^2 :

$$\begin{aligned}
\frac{y_2^{'}y_1 - y_2 y_1^{'}}{y_1^2} &= \frac{1}{y_1^2} ce^{-\int a_1 dx} \quad \text{ou} \\
\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) &= \frac{1}{y_1^2} ce^{-\int a_1 dx} \quad \text{d'où} \\
\frac{y_2}{y_1} &= \int \frac{ce^{-\int a_1 dx}}{y_1^2} dx + c^{'},
\end{aligned}$$

et comme nous cherchons une solution particulère on aura en posant $c^{'} = 0, c = 1$

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int a_1 dx}}{y_1^2} dx \tag{8}$$

il est évident que y_1 *et* y_2 sont des solutions linéairement indépendantes car $\frac{y_2}{y_1} \neq const.$
La solution générale de l'équation (2) s'écrit donc

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_1 \int \frac{e^{-\int a_1 dx}}{y_1^2} dx.$$

Exemple 1 Trouver la solution générale de l'équation diff

$$y^{''} + \frac{2}{x} y^{'} + y = 0$$

ayant pour solution particulère $y_1 = \frac{\sin x}{x}$. De la formule (8), trouvons la seconde solution

$$y_2(x) = \frac{\sin x}{x} \int \frac{e^{-\int \frac{2}{x} dx}}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2} dx = \frac{\sin x}{x} \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{x}$$

donc la solution générale est $y(x) = c_1 \frac{\sin x}{x} - c_2 \frac{\cos x}{x}$.
Exemple 2 Trouver la solution génrale de l'équation diff

$$(1 - x^2) y^{''} - 2xy^{'} + 2y = 0$$

ayant pour solution particulière $y_1 = x$, remarquon que $a_1(x) = \frac{-2x}{1-x^2}$, de (8) on a $y_2 = \frac{1}{2}x \log \left|\frac{1+x}{1-x}\right| \pm 1$.

Equations différentielles non homogénes

Soit l'équation

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y^{'} + a_n(x)y = f(x) \tag{1}$$

Théorème *Si $u(x)$ est une solution particulière d'une équation non homogéné (1) et que $y_1, y_2, ..., y_n$ est le système fondamental de solutions de l'équation homogéné qssociée ($f(x) = 0$), alors la solution générale de l'équation linéaire non homogéné (1) est de la forme:*

$$y(x) = u(x) + c_1y_1 + c_2y_2 + ... + c_ny_n.$$

Considérons deux méthodes applicables à la recherche de la solution particulière d'une équation linéaire non homogéne:

I-Méthode de la variation des constantes arbitraire:

Cette méthode s'avère utile pour la recherche de la solution particulière d'une équation non homogéne à condition que l'on connaitre la solution générale de l'équation homogéne associée.

La méthode de la variation consiste en ce qui suit:

soit connu le système fondamental de solutions $y_1, y_2, ..., y_n$ de l'équation homogéne, la solution générale de l'équation non homogéne à rechercher sous forme

$$u(x) = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2 + ... + c_n(x)y_n$$

où $c_1(x), c_2(x), ..., c_n(x)$ sont déduites du système d'équations:

$$\begin{cases} c_1^{'}(x)y_1 + c_2^{'}(x)y_2 + ... + c_n^{'}(x)y_n = 0 \\ c_1^{'}(x)y_1^{'} + c_2^{'}(x)y_2^{'} + ... + c_n^{'}(x)y_n^{'} = 0 \\ \cdots \\ c_1^{'}(x)y_1^{(n-1)} + c_2^{'}(x)y_2^{(n-1)} + ... + c_n^{'}(x)y_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases} \tag{$*$}$$

$(*)$ sous forme matricielle par

$$W^{'}(y_1, y_2, ..., y_n). \begin{pmatrix} c_1^{'} \\ c_2^{'} \\ \vdots \\ c_n^{'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(x) \end{pmatrix} \text{ ou } W^{'}.c^{'} = b$$

où

$$W^{'} = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1^{'}(x) & y_2^{'}(x) & \cdots & y_n^{'}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \text{ et } c^{'} = \begin{pmatrix} c_1^{'} \\ c_2^{'} \\ \vdots \\ c_n^{'} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(x) \end{pmatrix}$$

$W^{'}$: (ce n'est pas dérivée, mais juste notation), matrice carrée où $\left|W^{'}\right| = W \neq 0, \forall x \in [a, b]$
le système $W^{'}.c^{'} = b$ admet solution unique $c^{'} = W^{'-1}.b$.

Pour une équation du second ordre

$$y^{''} + a_1(x)y^{'} + a_2(x)y = f(x) \tag{1}$$

le système correspond est de la forme

$$\begin{cases} c_1^{'}(x)y_1 + c_2^{'}(x)y_2 = 0 \\ c_1^{'}(x)y_1^{'} + c_2^{'}(x)y_2^{'} = f(x) \end{cases}$$

Pourquoi ce système ?
écrivons la solution générale de l'équation homogéne

$$y^{''} + a_1(x)y^{'} + a_2(x)y = 0 \tag{2}$$

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) \tag{3}$$

nous allons chercher une solution particulière de l'équation (1) sous la forme (3) en considérons c_1 et c_2 comme des fonctions de x qu'il faut déterminer.
Dérivons l'égalité (3) :

$$y^{'}(x) = c_1y_1^{'}(x) + c_2y_2^{'}(x) + c_1^{'}y_1(x) + c_2^{'}y_2(x)$$

choisissons les fonctions c_1 et c_2 de manière que soit satisfaite:

$$c_1^{'}y_1(x) + c_2^{'}y_2(x) = 0 \tag{4}$$

$\Rightarrow y^{'}(x) = c_1y_1^{'}(x) + c_2y_2^{'}(x)$, dérivons cette ecpression, on trouve

$$y^{''} = c_1y_1^{''}(x) + c_2y_2^{''}(x) + c_1^{'}y_1^{'}(x) + c_2^{'}y_2^{'}(x)$$

subtituons $y, y^{'}, y^{''}$ dans (1) on obtient

$$c_1\underbrace{(y_1^{''} + a_1(x)y_1^{'} + a_2(x)y_1)}_{=0} + c_2\underbrace{(y_2^{''} + a_1(x)y_2^{'} + a_2(x)y_2)}_{=0} + c_1^{'}y_1^{'}(x) + c_2^{'}y_2^{'}(x) = f(x)$$

d'où

$$c_1^{'}y_1^{'}(x) + c_2^{'}y_2^{'}(x) = f(x) \qquad (5)$$

Ainsi, la fonction (3) est une solution de l'équation (1) pourvu que les fonctions $c_1(x)$et $c_2(x)$ satisfaisant aux conditions

$$\begin{cases} c_1^{'}(x)y_1 + c_2^{'}(x)y_2 = 0 \\ c_1^{'}(x)y_1^{'} + c_2^{'}(x)y_2^{'} = f(x) \end{cases}$$

Or le déterminant de ce système est le wronskien des solutions linéairement indépendantes y_1, y_2 de l'équation (2), donc il n'est pas nul, on trouve $c_1^{'}(x)$ et $c_2^{'}(x)$ en résolvant le système précédent d'où

$$\begin{aligned} c_1(x) &= -\int \frac{y_2 f(x)}{W(y_1, y_2)} dx + k_1 \\ c_2(x) &= -\int \frac{y_1 f(x)}{W(y_1, y_2)} dx + k_2 \end{aligned}$$

k_1 et k_2 des constantes d'intégration.
Subtituant les expressions de $c_1(x)$et $c_2(x)$ dans (3) on trouve la solution dépendant de deux constantes arbitraires k_1 et k_2. C'est à dire la solution générale de l'équation (1). Si l'on pose $k_1 = k_2 = 0$, on obtient une solution particulière de l'équation (1).

Exemple $y^{''} - \frac{y^{'}}{x} = x$, trouvons la solution générale de $y^{''} - \frac{y^{'}}{x} = 0$,
on a $\frac{y^{''}}{y^{'}} = \frac{1}{x} \Rightarrow y = c_1x^2 + c_2$ $(y_1 = x^2, y_2 = 1) \Rightarrow \log y^{'} = \log x + \log c$
pour déterminer $c_1$et c_2 comme des fonctions: soit le système:

$$\begin{cases} c_1^{'}(x)x^2 + c_2^{'}(x).1 = 0 \\ 2c_1^{'}(x)x + c_2^{'}(x).0 = x \end{cases} \Rightarrow c_1^{'}(x) = \frac{1}{2}, c_2^{'}(x) = -\frac{1}{2}x^2$$

donc $c_1(x) = \frac{x}{2} + k_1$, $c_2(x) = -\frac{x^3}{6} + k_2 \Rightarrow y(x) = \underbrace{k_1x^2 + k_2}_{\text{solution générale de l'équation homogéne}} +$

$$+ \underbrace{\frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6}}_{\text{solution particulière de l'équation non homogéné}}$$

Théorème *La solution particulière $y^*(x)$ d'une équation de la forme*

$$y^{''} + a_1(x)y^{'} + a_2(x)y = f_1(x) + f_2(x) \text{ (ou } f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x) \text{)}$$

est la somme de deux solutions particulières des deux équations

$$\begin{cases} y_1^{''} + a_1(x)y_1^{'} + a_2(x)y_1 = f_1(x) \\ y_2^{''} + a_1(x)y_2^{'} + a_2(x)y_2 = f_2(x) \end{cases}$$

i.e., $y^*(x) = y_1^*(x) + y_2^*(x)$.

Exemple Trouver la solution particulière de

$$y^{''} + 4y = x + 3e^3 \tag{1}$$

$$\begin{aligned} y_1^{*''} + 4y_1^* &= x \Rightarrow y_1^* = \frac{1}{4}x \\ y_2^{*''} + 4y_2^* &= 3e^3 = \frac{3}{5}e^x \end{aligned}$$

la solution particulière de (1) est $y^*(x) = \frac{1}{4}x + \frac{3}{5}e^x$.

Remarque Il n'existe pas de méthode générale permettant de trouver sous forme finie la solution générale d'une équation différentielle à coefficients variables.

II- Méthode du choix d'une solution particulière (méthode des coefficients indéterminés)

Cette méthode n'est applicable qu'aux équations linéaires à coefficients constant et seulement dans le cas où le second membre est de la forme

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_k(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)$$

α, β des constantes , $P_k(x)$ et $Q_m(x)$ des polynomes en x de degres k et m respectivement.

Equations linéaires homogénes à coefficients constants

Considérons l'équation différentielle:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}y^{'} + a_n y = 0 \tag{1}$$

où $a_1, ..., a_{n-1}, a_n$ sont des constantes.

Pour trouver la solution générale de (1) procédent comme suit:

1-Ecrivons l'équation caractéristique de (1), i.e.,

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \qquad (2)$$

2- Cherchons les racines $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ de l'équation (2).
3- suivant le caractère des racines, on écrit les solutions particulière linéairement indépendantes, en tenant compte du fait que:
a- à chaque racine réelle simple λ de l'équation caractéristique (2) correspond une solution particulière $e^{\lambda x}$ de (1).
b- à chaque couple de racines conjuguées simples: $\lambda_1 = \alpha + \beta i, \lambda_2 = \alpha - \beta i$ de (2) correpondant deux solutions particulières linéairement indépendantes: $e^{\alpha x}\cos\beta x$ et $e^{\alpha x}\sin\beta x$ de (1).
c- à chaque racine réelle λ d'ordre de multiplicité k correspondant k solutions particulières linéairement ibdépendantes:

$$e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, x^2e^{\lambda x}, ..., x^{k-1}e^{\lambda x} \text{ de (1).}$$

d- à chaque couple de racines conjuguées $\lambda_1 = \alpha + \beta i, \lambda_2 = \alpha - \beta i$ de (2) d'ordre de multiplicité k, $2k$ solutions particulières

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x, ..., x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$$
$$e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x, ..., x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$$

Le nombre de ces solutions est égal au degré de l'équation caractéristique (2).
4- Ayant trouvé n solutions linéairement indépendantes $y_1, y_2, ..., y_n$, on écrit la solution générale de (1) sous la forme

$$y(x) = c_1y_1 + c_2y_2 + ... + c_ny_n.$$

Exemple 1 Touver la solution générale de $y^{'''} - 2y^{''} - 3y^{'} = 0$
l'équation caractéristique est$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 3\lambda = 0$
les racines sont $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 3$, la solution générale est $y(x) = c_1e^{0x} + c_2e^{-x} + c_3e^{3x}$
Exemple 2 $y^{'''} + 4y^{''} + 13y^{'} = 0$, l'équation caractéristique est $\lambda^3 + 4\lambda^2 + 13\lambda^{'} = 0$
les racines sont $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -2 - 3i, \lambda_3 = -2 + 3i$, la solution générale est $y(x) = c_1e^{0x} + c_2e^{-2x}\cos 3x + c_3e^{-2x}\sin 3x$.

Equations linéaires non homogénes à coefficients constants

Considérons l'équation différentielle:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \qquad (3)$$

où $a_1, ..., a_{n-1}, a_n$ sont des constantes.

Théorème *La solution générale y de l'équation non homogéne* (3) *est égale à la somme de la solution générale de l'équation homogéne* $\overline{y}$ *associé et l'une quelconque des solutions particulières de l'équation non homogéne* y^* : $y = \overline{y} + y^*$.

Dans le cas général, la solution générale de (3) peut être réalisée par la méthode de variation des constantes arbitraires. La solution particulière de (3) peut être obtenue plus simplement par la méthode des coefficients indéterminés, la forme générale de la fonction second membre de (3) est:

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_k(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)$$

La solution particulière sera cherchée sous la forme:

$$y^* = x^s e^{\alpha x}(P_l(x)\cos\beta x + Q_l(x)\sin\beta x)$$

où s est égal à l'ordre de multiplicité de la racine $\alpha + \beta i$ de l'équation caractéristique.
1- Si $\alpha \pm \beta i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique alors $s = 0$ ($l = \max(k, m)$).
$P_l(x)$ et $Q_l(x)$ des polynomes de degrée l de la forme générale à coefficient indéterminés.

Exemple 1 Trouver la solution générale de l'équation

$$y''' - y'' + y' - y = x^2 + x$$

L'équation caractéristique est $\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0$ possède des racines distincts: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -i, \lambda_3 = i$, de sorte que la solution générale de l'équation homogéne associée sera

$$\overline{y} = c_1 e^x + c_2 \cos x + c_3 \sin x$$

(d'après $f(x) = x^2 + x$, on $\alpha = \beta = 0 \Rightarrow \alpha \pm \beta i = 0 \pm 0i = 0$.
Puisque le nombre $\alpha \pm \beta i = 0$ n'esi pas racine de l'équation caractéristique alors $s = 0$, la solution particulière y^* de l'équa-diff donnée doit être cherchée sous la forme

$y^* = ax^2 + bx + c$ ($l = \max(k, m) = \max(2, 0) = 2$) (voit le tableau ci dessous) où a, b,et c des constantes qu'on doit déterminer. Introduisons l'expression de y^* dans l'équa-diff donnée, on obtient

$$-ax^2 + (2a - b)x + (b - 2a - c) = x^2 + x$$

$\Rightarrow a = -1, b = -3, c = -1 \Rightarrow y^* = -x^2 - 3x - 1$ et la solution générale de l'équa-diff est $y = \overline{y} + y^* = c_1 e^x + c_2 \cos x + c_3 \sin x - x^2 - 3x - 1$.

Tableau récapitulatif de formes des solutions particulières pour les différentes formes des seconds membres

n^0	2 membre, l'équa-diff	Racine, l'équa-caract.	Solu. partic.
1	P_m $\alpha = \beta = 0$ $\alpha \pm \beta i = 0$	1- 0 n'est pas racine 2- 0 est racine d'ordre s	$\widetilde{P}_m$ $x^s \widetilde{P}_m$
2	$P_m e^{\alpha x}$ $\beta = 0, \alpha \pm \beta i = \alpha$	1- α n'est pas racine 2-α est racine d'ordre s	$\widetilde{P}_m e^{\alpha x}$ $x^s \widetilde{P}_m e^{\alpha x}$
3	$P_l \cos \beta x + Q_m \sin \beta x$ $\alpha = 0, \alpha \pm \beta i = \pm \beta i$	1- $\pm \beta i$ ne sont pas racines 2- $\pm \beta i$ sont racines d'ordre s	$\widetilde{P}_k \cos \beta x + \widetilde{Q}_k \sin \beta x$ $x^s \left(\widetilde{P}_k \cos \beta x + \widetilde{Q}_k \sin \beta x \right)$
4	$e^{\alpha x} \left(P_l \cos \beta x + Q_m \sin \beta x \right)$ $\alpha \neq \beta \neq 0$	1-$\alpha \pm \beta i$ ne sont pas racines 2-$\alpha \pm \beta i$ sont racines d'ordre s	$e^{\alpha x} \left(P_k \cos \beta x + Q_k \sin \beta x \right)$ $x^s e^{\alpha x} \left(P_k \cos \beta x + Q_k \sin \beta x \right)$

Equation d'Euler Une équation linéaire à confficient variables de la forme

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} x y^{'} + a_n y = f(x) \qquad (1)$$

ou d'une forme plus générale

$$(ax + b)^n y^{(n)} + a_1 (ax + b)^{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} (ax + b) y^{'} + a_n y = f(x) \quad (2)$$

S'appelle équation d'Euler. Ici a_i sont des constantes. Les subtitutions $x = e^t$ dans (1) et $ax + b = e^t$ dans (2) transforme ces deux équations en équation linéaires à coefficient constants.

Exemple Résoudre l'équa-diff: $x^2 y^{''} - xy^{'} + y = 0$, en posant $x = e^t$ où $t = \log x$, d'où $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} = e^{-t}$, on obtient:

$$\begin{aligned} y^{'} &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} . \frac{dt}{dx} = y_t^{'} e^{-t} \\ y^{''} &= \frac{d}{dt} (y_t^{'} e^{-t}) \frac{dt}{dx} = (y_t^{'} e^{-t})_t^{'} e^{-t} = \left(y_t^{''} - y_t^{'} \right) e^{-2t} \end{aligned}$$

d'où $\left(y_t^{''} - y_t^{'} \right) e^{-2t} e^{2t} - y_t^{'} e^{-t} e^t + y = 0$ ou $y_t^{''} - 2y_t^{'} + y = 0$ équation linéaire à coefficient constants.

Les méthodes de résolution explicites des équations différentielles
I- Equation à variables séparées et séparables.
Considérons une équation-diff de la forme

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x).f_2(y) \tag{1}$$

cette équation peut être transformée comme:

$$\int \frac{1}{f_2(y)} dy = \int f_1(x)dx + c \text{ (après intégration, } c : const.)$$

à partir de

$$\frac{1}{f_2(y)} dy = f_1(x)dx \tag{2}$$

L'équation-diff (2) est de la forme

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \tag{3}$$

est appelée équation à variables séparées. Son intégrale génrale est

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = c.$$

2- Une équation de la forme

$$M_1(x).N_1(y)dx + M_2(x).N_2(y)dy = 0 \tag{4}$$

est appelée équation à variables séparables, elle peut être ramenée comme l'équation (3), en divisant les deux membres de (4) par: $N_1(y).M_2(x)$ on obtient

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)} dy = 0$$

qui est une équation de la forme (3).

2- Equations homogénes du premier ordre

Définition 1 *On dit que la fonction $f(x, y)$ est homogène de degré n par rapport aux variables x et y si l'on a pour tout λ*

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y).$$

Exemple1 la fonction $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$ est homogène et de dgré 1, car $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda \sqrt[3]{x^3+y^3} = \lambda f(x,y)$.
Exemple2 $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{xy}$ est de degré 0.

Définition 2 *L'équa-diff* $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ *est dite homogène par rapport à* x *et* y *si* $f(x,y)$ *est homogène de degré 0.*

Résolution de l'équation homogène Une équa-diff homogène peut être ramenée à la forme

$$y^{'} = g(\frac{y}{x}) \tag{1}$$

Faisons la subtitution $\frac{y}{x} = t \Leftrightarrow y = xt$ on a alors $\frac{dy}{dx} = t + x\frac{dt}{dx}$.
Cette subtitution ramène l'équation (1) à une équation à variables séparables par rapport à la nouvelle fonction t.

Exemple $(x^2 - 2xy)dx + xydy = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-x^2-2xy}{xy} = f(x,y)$ où $f(x,y)$ est homogène de degré 0, posons $\frac{y}{x} = t \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = t + x\frac{dt}{dx}$

$$\begin{aligned}
y^{'} &= \frac{-1-2(\frac{y}{x})}{\frac{y}{x}} = g(\frac{y}{x}) \Leftrightarrow t + x\frac{dt}{dx} = \frac{-1-2t}{t} \Leftrightarrow \frac{dx}{x} + \frac{tdt}{(1+t)^2} \\
&\Rightarrow \log|x| + \log|t+1| + \frac{1}{t+1} + c \\
\frac{y}{x} &= t \Rightarrow \log|x+y| + \frac{x}{x+y} = 0.
\end{aligned}$$

Remarque l'équation $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ ne sera homogène que si $M(x,y)$ et $N(x,y)$ sont homogènes du même degré, ceci résulte que le rapport de ces deux fonctions est une fonction de degré 0.

Equations se ramenant aux équations homogènes
Sont des équations différentielles de la forme

$$y' = f(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}) \tag{1}$$

se ramènent, pour $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, aux équations homogènes en faisant la subtitution $x = u + \alpha, y = v + \beta$, où (α, β) le point d'intersection des droites

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

Si $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ alors la sibtitution $ax + b_1y = t$ permet de séparer les variables.

Exemple $(2x+y+1)dx+(x+2y-1)dy=0 \Leftarrow y^{'}=-\frac{2x+y+1}{x+2y-1}$
$a_1b_2-a_2b_1=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=3\neq 0$, on trouve le point d'intersection des droites $\begin{cases} 2x+y+1=0 \\ x+2y-1=0 \end{cases}$
$\Rightarrow x=\alpha=-1$ et $y=\beta=1$. Soit le changement de variable : $x=u+\alpha=u-1\Rightarrow dx=dy$ et $y=v+\beta=v+1\Rightarrow dy=dv$.
L'équation se ramène $(2u+v)du+(u+2v)dv=0$ (équation homogène).
On pose alors $\frac{v}{u}=t\Leftrightarrow dv=udt+tdu$, on obtien ainsi $2(t^2+t+1)udu+u^2(1+2t)dt=0$ (équation à variables séparables dont la solution générale est $u\sqrt{t^2+t+1}=c$, après la subtitution $\frac{v}{u}=t$ et l'élévation au carré:

$$u^2+uv+v^2=c^2, \text{ on a } u=x+1, v=y-1$$

la solution générale de l'équa-diff initiale est

$$x^2+y^2+xy+x-y=c_1.$$

Equation différentielle linéaire du premier ordre
Elle s'écrit :

$$y^{'}+p(x)y=q(x) \tag{1}$$

où p et q sont des fonctions de x, l'équation (1) est dite linéaire (y et $y^{'}$sont au premier degré sans être multipliés l'une par l'autre). La solution générale de l'équation homogène

$$y^{'}+p(x)y=0 \tag{2}$$

est obtenue au moyen de la séparation des variables

$$\frac{dy}{y}=-p(x)dx\Rightarrow\int\frac{dy}{y}=\int-p(x)dx\Rightarrow y=ce^{-\int p(x)dx}.$$

où c est une constante arbitraire.
On peut trouver la solution générale de l'équation (1) en appliquant la méthode en faisant varier la constante c , i.e., $y=c(x)e^{-\int p(x)dx}$. Pour trouver $c(x)$, en subtitue y dans (1) alors

$$\begin{aligned} c^{'}(x)e^{-\int p(x)dx}-p(x)c(x)e^{-\int p(x)dx}+p(x)c(x)e^{-\int p(x)dx} &= q(x) \\ c^{'}(x)e^{-\int p(x)dx} &= q(x) \end{aligned}$$

$\Rightarrow c(x) = \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx + k$. Donc la solution générale de (1) est

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx} \left[\int q(x) e^{\int p(x)dx} dx + k \right].$$

Equation de Bernoulli C'est une équation de la forme

$$y^{'} + p(x)y = q(x)y^n \tag{3}$$

($n \neq 0, n \neq 1$ sinon on aurait une équation linéaire). Se ramène à une équation linéaire par la transformation suivante. Divisons (3) par y^n, ob obtient:

$$y^{-n}y^{'} + p(x)y^{-n+1} = q(x)$$

En faisant le changement de variable suivant $z = y^{-n+1}$ alors $z^{'} = (-n+1)\, y^{-n}y^{'}$ on a donc,

$$\frac{1}{-n+1} z^{'} + pz = q(x)$$

qui est une équation linéaire du premier ordre par rapport à z.

Remarque on peut chercher la solution de l'équation de Bernoulli sous forme $y(x) = u(x)v(x)$, où v fonction non nulle satisfaisant à l'équation $v^{'} + pv = 0$.

Equation de Riccati Elle est de la forme

$$y^{'} = a(x)y^2 + b(x)y + c(x) \tag{1}$$

où a, b, c sont des fonctions de x. On ne peut intégrer ces équations que si l'on connait une solution particulière $y_1(x)$. La solution générale de (1) peut être obtenue par le changement de variable

$$y(x) = y_1(x) + z(x)$$

$z(x)$ est une nouvelle fonction inconnue. $y(x) = y_1(x) + z(x)$ transforme l'équation (1) en

$$y_1^{'}(x) + z^{'}(x) = a(x)\left(y_1(x) + z(x)\right)^2 + b(x)\left(y_1(x) + z(x)\right) + c(x)$$

puisque $y_1(x)$ est une solution particulière de (1) ,i.e.,

$$y_1^{'} = a(x)y_1^2 + b(x)y_1 + c(x)$$

après simplification, il reste

$$z^{'} = a(x)z^2 + (2a(x)y_1 + b(x))\, z$$

qui est une équation de Bernoulli avec $n = 2$.

Exemple Résoudre l'équation-diff $y^{'} = \frac{1}{x}y^2 - \left(2 + \frac{1}{x}\right) y + x + 2$, sachant qu'elle admet l'intégrale particulière $y_1(x) = x$.

Equation de Lagrange
C'est une équation de la forme

$$y = xf(y^{'}) + g(y^{'}) \tag{1}$$

en introduisons un changement de variable $\frac{dy}{dx} = y^{'} = p$, l'équation (1) prend alors la forme

$$y = xf(p) + g(p) \tag{2}$$

en dérivons (2) par rapport à x

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= p = f(p) + xf^{'}(p)\frac{dp}{dx} + \frac{dp}{dx}g^{'}(p) \qquad (3) \\ p &= f(p) + \left[xf^{'}(p) + g^{'}(p)\right] \frac{dp}{dx} \end{aligned}$$

trouvons la solution générale de (3)

$$\frac{dx}{dp} - \frac{xf^{'}(p)}{p - f(p)} = \frac{g^{'}(p)}{p - f(p)} \tag{3}$$

c'est une équation différentielle linéaire par rapport à $x(p)$, trouvons la soltion générale

$$x = \varphi(p, c) \tag{4}$$

Eliminant le paramètre p des équations (2) et (4), on obtient la solution générale de (1) sous la forme

$$\phi(x, y, c) = 0.$$

Exemple $y = x\left(y^{'}\right)^2 + \left(y^{'}\right)^2$, posons $y^{'} = p$ d'où

$$y = xp^2 + p^2 \tag{1}$$

dérivons par rapport à x, on obtient

$$\begin{aligned} p &= p^2+(2xp+2p)\frac{dp}{dx} \Leftrightarrow \frac{dx}{dp}-x\frac{2}{1-p}=\frac{2}{1-p} \\ & \text{équation linéaire par rapport à } x \end{aligned}$$

on trouve

$$x=-1+\frac{c^2}{(p-1)^2} \tag{2}$$

Eliminant p des équations (1) et (2) on obtient la solution générale

$$y=\left(c+\sqrt{x+1}\right)^2$$

L'équa-diff admet $y=0$ comme solution singulière.

Equation de Clairaut
c'est une équation de la forme

$$y=xy^{'}+g(y^{'}) \tag{1}$$

L'équation de Clairaut est un cas particulier de l'équation de Lagrange lorsque $f(y^{'})=y^{'}$.
Posons $\frac{dy}{dx}=p$ alors on a

$$y=xp+g(p) \tag{2}$$

dérivons par rapport à x on obtient

$$p=x\frac{dp}{dx}+p+g^{'}(p)\frac{dp}{dx} \tag{3}$$

ou

$$\left(x+g^{'}(p)\right)\frac{dp}{dx}=0. \tag{4}$$

Annulons séparément chaque facteur

$$\begin{cases} \frac{dp}{dx}=0 & (5) \\ x+g^{'}(p)=0 & (6) \end{cases}$$

L'intégration de (5) donne $p=c$, $(const.)$, subtituons cette valeur de p dans (2), on trouve

$$y=xc+g(c) \text{ intégrale générale} \tag{7}$$

Tirons p de l'équation (6) et subtituant dans (2)

$$y=xp(x)+g(p(x)) \tag{8}$$

la solution de (8) est une solution singulière elle vérifie

$$\begin{cases} y = xp(x) + g(p(x)) \\ x + g^{'}(p) = 0 \end{cases} \text{ ou } y = xc + g(c) \text{ et } x + g_c^{'}(c) = 0.$$

On voit que la solution singulière de l'équation de Clairraut est l'enveloppe de la famille de droites (7)(intégrale générale).

Exemple

$$y = xy^{'} + \frac{1}{2y^{'}} \tag{1}$$

posons $y^{'} = p \Rightarrow$

$$y = xp + \frac{1}{xp} \tag{2}$$

dérivons par rapport à x, on

$$pdx = pdx + xdp - \frac{1}{2p^2}dp$$

d'où

$$\begin{aligned} dp(x - \frac{1}{2p^2}) &= 0 \text{ ou } p^{'}(x - \frac{1}{2p^2}) = 0 \\ p^{'} &= 0 \Rightarrow p = c \end{aligned}$$

donc la solution générale de (1) est $y = xc + \frac{1}{2c}$ qui est une famille de droite. En annulant le second facteur i.e., $x - \frac{1}{2p^2} = 0$ on aura $x = \frac{1}{2p^2}$ et $y = xp + \frac{1}{2p}$ on obtient donc $y^2 = 2x$, qui est aussi solution de (1) (solution singulière). $y^2 = 2x$ est l'enveloppe de la famille de droites $y = xc + \frac{1}{2c}$ (voir figure).

figure

Quelques Sujets d'examens proposés

Sujet 1 (Examen, département de Maths, Université de Sétif 1, 2009)

Exercice 1 Considérons le problème de Cauchy suivant:

$$(P.C) \qquad \begin{cases} y^{'}(x) = 2y(x) + e^x(e^{2x} - y^2(x) - 1) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1- Justifier l'existence et l'unicité de la solution du problème $(P.C)$ sur le rectangle:

$$U(x, y) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \quad |x| \leq 1, \ |y - 1| \leq 1\right\}$$

2- Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$ on a

$$y(x) = e^{2x} + \int_0^x e^{(2x-t)}(e^{2t} - y^2(t) - 1)dt.$$

3- Définir la suite $\{y_n(x)\}_{n \geq 0}$ des approximations successives de Picard pour ce problème.

Indication. y est solution de $y^{'} = ay + g(x, y) \Leftrightarrow y$ est solution de $(e^{-ax}y)^{'} = e^{-ax}g(x, y)$

Exercice 2. On considère l'équation différentielle:

$$x^2y^{''}(x) + xy^{'}(x) - y(x) = \sqrt{x} \qquad (E)$$

1- Trouver une constante $\alpha \in \mathbb{R}$, telle que la fonction définie par: $\forall x > 0$, $y(x) = x^\alpha$
est solution particulère de l'équation homogène associée à (E)
2- Donner un système fondamental de solutions y_1 et y_2 de l'équation homogène.
3- Trouver la solution générale de l'équation (E).

Exercice 3. Soit $y \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$ une fonction telle qu'il existe deux constantes a et b vérifiant:

$$y^{'}(x) \leq ay(x) + b, \qquad \forall x \in [0, 1] \qquad (*)$$

1- Montrer que si $a = 0$ alors $y(x) \leq y(0) + bx$, $\forall x \in [0, 1]$.
2- Montrer que si y vérifie $(*)$ alors y vérifie l'inégalité:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-\int_0^x a dt} y(x)\right) \leq b.e^{-\int_0^x a dt}, \forall x \in [0, 1].$$

3- En déduire que si $a \neq 0$ alors, $\forall x \in [0, 1]$ on a:

$$y(x) \leq e^{ax}y(0) + \frac{b}{a}(e^{ax} - 1).$$

Application(question 3 de l'exercice 3**).** Considérons deux problèmes de Cauchy suivants:

$$(P.C)_1 \begin{cases} y^{'}(x) = F(x, y) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad , \quad (P.C)_2 \begin{cases} z^{'}(x) = G(x, z) \\ z(0) = z_0 \end{cases}$$

où $F \in C^1$ une fonction globalement lipschitzienne en y, c'est-à-dire:

$$\exists L > 0, \forall (x,y),(x,z) \in \mathbb{R}^2,\ |F(x,y) - F(x,z)| \leq L\,|y-z|$$

On pose $G = F + f$, où $f \in C^1$une fonction vérifiant: $\forall x, y \in \mathbb{R}, |f(x,z)| \leq 3$. On suppose que $(P.C)_1$ et $(P.C)_2$ admettent respectivement une solution y et z, définies sur $[0,1]$.
- Montrer que

$$|y(x) - z(x)| \leq |y_0 - z_0|\, e^{Lx} + \frac{3}{L}(e^{Lx} - 1),\ \forall x \in [0,1].$$

Sujet 2 (examen de Ratrappage, département de Maths, Université de Sétif 1, 2009)

Exercice 1 Soit $y(x) \in C^1$ une fonction telle qu'elle vérifie l'équation intégrale suivante
pour tout $x \in]-1,1[$

$$y(x) = e^x + \int_0^x e^{(x-t)}(e^t + y(t) - 1)dt. \tag{$*$}$$

1- Montrer que si $y(x)$ vérifie $(*)$ alors $y(x)$ est une solution du problème de Cauchy suivant:

$$(P.C)_1 \qquad \begin{cases} y^{'}(x) = f(x, y(x)) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

où f une fonction à déterminer.
2- Justifier l'existence et l'unicité de la solution du problème $(P.C)_1$ sur le rectangle:

$$U(x,y) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \quad |x| \leq 1,\ \ |y| \leq 1\right\}$$

3- Résoudre explicitement le problème $(P.C)_1$

Exercice 2. Considérons l'équation de Clairaut

$$y(x) - xy^{'}(x) + f(y^{'}(x)) = 0$$

où f est une fonction de calsse C^1.
1- Résoudre cette équation, en déduire une famille de solutions à déterminer.
2- Pour $f(t) = \frac{-1}{2t}$, exprimer l'enveloppe de la famille de solutions sous la forme $y(x)$.

3- Tracer dans un repére orthonormé le graphe de l'enveloppe et la famille de solutions.

Exercice 3. Soit $y \in C^1([0,1], \mathbb{R})$ une fonction telle qu'il existe une constante a vérifiant:

$$y'(x) \leq ay(x) + \sqrt{2}, \qquad \forall x \in [0,1] \tag{$**$}$$

1- Montrer que si $a = 0$ alors $y(x) \leq y(0) + \sqrt{2}.x$, $\forall x \in [0,1]$.
2- Montrer que si y vérifie $(**)$ alors y vérifie l'inégalité:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-ax}y(x)\right) \leq \sqrt{2}.e^{-ax}, \; \forall x \in [0,1].$$

3- En déduire que si $a \neq 0$ alors, $\forall x \in [0,1]$ on a:

$$y(x) \leq e^{ax}y(0) + \frac{\sqrt{2}}{a}(e^{ax} - 1).$$

Série d'exercices N°1

Exercice 1
- Trouver l'équation différentielle de la famille de parapoles $y = cx^2$ (c:const.)
- Trouver l'équation différentielle qui représente la famille de cercles de rayon r et de centre (x_0, y_0) dans le plan xoy.

Exercice 2 Trouver l'équation différentielle dont la solution générale est:
$y = (a + bx)e^x$, $\quad a, b$ des constantes
$y^2 + (x - c)^2 = 1$, c :constante
$y = e^{-kx}(a\cos nx + b\sin nx)$, $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{R}, a, b$ des constantes
Montrer que $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ est la solution générale de l'équation différentielle :$2y'y''' - 3\left(y''\right)^2 = 0$.

Montrer que la solution générale de l'équation différentielle $y'' + k\left(y'\right)^2 = 0, k \neq 0$ est $ky = \log(a + bx), a, b$ des constantes.

Exercice 3 Montrer que : y est une solution de l'équation différentielle: $y' + ay = 0$, a const. si et seulement si :y est une solution de l'équation $(e^{ax}y)' = 0$.

Exercice 4 Trouver une constante de Lipschitz des fonctions $f(x, y)$ pour les équations différentielles $y' = f(x, y)$ ci dessous dans les régions considérées:

$y^{'}=x^2e^{-y}$, sur $[-5,5]\times[-5,5]$
$y^{'}=\left|2y^3\right|$,sur $[-2,2]\times[-2,2]$
$y^{'}=(2+\cos x)\,y+5\sqrt{|y|}+\frac{11}{2}$,sur $[0,\pi]\times[1,2]$
$y^{'}=e^x\sin x\cos y$,sur $[0,\pi]\times[-2,2]$.

Exercice 5 Après avois vérifie les conditions d'application du théorème d'existence et d'unicité de Cauchy-Lipschitz, construire les approximations successives : $y_0(x), y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ de la solution du problème de Cauchy suivant:

$$\left\{\begin{array}{l} y^{'}=x-y^2 \\ y(0)=0 \end{array}\right. \quad \text{avec } |x|\leq a, |y|\leq b.$$

Exercice 6 Trouver par la méthode des approximations successives une solution approchée de l'équation dofférentielle :$y^{'}=x^2+y^2$ qui satisfait à la condition initiale $y(0)=0$ dans le rectangle $U=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ |x|\leq 1, |y|\leq 1\right\}$.

Exercice 7 Calculer les approximations successives de Picard pour le problème de Cauchy:

$$\left\{\begin{array}{l} y^{'}=2x\,(y+1) \\ y(0)=0 \end{array}\right.$$

et déterminer la fonction limite $\lim\limits_{n\to\infty} y_n(x)$.

Exercice 8 Montrer que le problème de Cauchy

$$\left\{\begin{array}{l} y^{'}=e^{-x^2}+y^2 \\ y(0)=0 \end{array}\right.$$

a une solution unique sur le rectangle $R_b=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ |x|\leq\frac{1}{2}, |y|\leq b\right\}$.

Exercice 9 On considére le problème de Cauchy suivant

$$\left\{\begin{array}{ll} y^{'}=-ay+g(x,y) & (1) \\ y(0)=y_0 \end{array}\right.$$

pour $a>0$ et g continue.
1- Montrer que y est une solution de l'équation (1) si et seulement si y est une solution de l'équation différentielle : $\left(e^{ax}y\right)^{'}-e^{ax}g(x,y)=0$.
2- Montrer que y est une solution du problème de Cauchy si et seulement si y est une solution de l'équation intégrale

$$y(x)=e^{-ax}y_0+\int\limits_0^x e^{a(s-x)}g(s,y(s))ds.$$

Définir une suite des approximations successives $\{y_n(x)\}_{n\geq 0}$ par:

$$y_{n+1}(x) = e^{-ax}y_0 + \int_0^x e^{a(s-x)}g(s, y_n(s))ds.$$

Calculer les deux premiers itérés à partir de $y_0(x) = y_0$ si :
1 $g(x,y) = 1$, 2 $g(x,y) = y^2$.

Exercice 10 1- Résoudre explicitement l'équation différentielle: $y^{'} = \sqrt{|y|} + k$, avec $k \neq 0$.
Indication: l'équation se résout dans chaque région $y > 0, y < 0$ par séparation des variables.
2- Montrer que $f(x,y) = \sqrt{|y|} + k$ ne satisfait aucune condition de Lipschitz dans le rectangle $[a,b] \times [-1,1]$. Qu'est ce que ces deux résultats nous apprennent?
3- On considére l'équation différentielle: $x^{'} = \sqrt{|x-t|} + c$. Faire le changement de variable $y = x - t$, et on déduire pour quelles valeurs de c on a l'unicité des solutions.

Exercice 11 On considère l'équation différentielle: $y^{'} = xy^{'} - \frac{\left(y^{'}\right)^2}{2}$,
(elle n'est pas du type habituel, puisqu'elle fait intervenir le varré de la dérivée)
- Montrer que les droites $y = cx - \frac{c^2}{2}$ sont des solutions.
- Montrer que la parabole $y = \frac{x^2}{2}$ est aussi une solution.
- Expliquer ce qui fait que le théorème d'exitence et d'unicité telatif aux équations $y^{'} = f(x,y)$ ne puisque pas s'appliquer ici.

Série d'exercices N°2

Exercice 1 Démontrer la variante suivante du lemme de Gronwall:
Soit $t_0 < t_1$ et soient f, u et v trois fonctions positives et continues de $[t_0, t_1] \to \mathbb{R}$, si pour tout $t \in [t_0, t_1]$,

$$f(t) \leq a + \int_{t_0}^{t} \left[f(\tau)u(\tau) + v(\tau)\right] d\tau$$

où a est une constante positive, alors pour tout $t \in [t_0, t_1]$

$$f(t) \leq a.e^{\int_{t_0}^{t} \left[u(\tau) + \frac{v(\tau)}{a}\right] d\tau}.$$

Exercice 2 Trouver des solutions singulières des équations différentielles suivantes:
$\left(1+\left(y^{'}\right)^{2}\right)y^{2}-4yy^{'}=0$; $\left(y^{'}\right)^{2}-4y=0$; $\left(y^{'}\right)^{3}-4xyy^{'}+8y^{2}=0$; $\left(y^{'}\right)^{2}-y^{2}=0$
$\left(xy^{'}+y\right)^{2}+3x^{5}\left(xy^{'}-2y\right)=0$; $y\left(y-2xy^{'}\right)^{2}=2y^{'}$; $8\left(y^{'}\right)^{3}-12\left(y^{'}\right)^{2}=27\left(y-x\right)$; $\left(y^{'}-1\right)^{2}=y^{2}$;
$y-x-y^{'}+\log y^{'}=0$; $y=x+\left(y^{'}\right)^{2}-\log y^{'}$; $xy^{'}+\left(y^{'}\right)^{2}-y=0$; $x\left(y^{'}\right)^{2}-2yy^{'}+4x=0$
$\left(1+y^{2}\right)dx+\left(1+x^{2}\right)dy=0.$
Pour quelle valeur du paramètre a l'équation différentielle: $y^{'}=\sqrt[3]{y^{2}}+a$ a-t-elle une solution singulière ?

Exercice 3 Trouver des solutions singulières des équations différentielles du premier ordre connaissant leurs intégrales générales:
1) $y=\left(y^{'}\right)^{2}-xy^{'}+\frac{x^{2}}{2}$; $y=cx+c^{2}+\frac{x^{2}}{2}$ 2) $\left(xy^{'}+y\right)^{2}=y^{2}y^{'}$; $y\left(c-x\right)=c^{2}$.
3) $\left(y^{'}\right)^{2}-yy^{'}+e^{x}=0$; $y=ce^{x}+\frac{1}{c}$ 4) $y^{2}\left(y^{'}\right)^{2}+y^{2}=1$; $(x-c)^{2}+y^{2}=1$.
5) $3x\left(y^{'}\right)^{2}-6yy^{'}+x+2y=0$; $x^{2}+c\left(x-3y\right)+c^{2}=0$
6) $y=xy^{'}+\sqrt{a^{2}\left(y^{'}\right)^{2}+b^{2}}$; $y=cx+\sqrt{a^{2}c^{2}+b^{2}}$.

Exercice 4 Soit le problème de Cauchy suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} y^{''}=f(x,y,y^{'}) \\ y(0)=y_{0}, y^{'}(0)=y_{0}^{'} \end{array}\right. \qquad (1)$$

Montrer que y est une solution du problème (1) si et seulement si y est une solution de l'équation intégrale :

$$y(x)=y_{0}+y_{0}^{'}x+\int_{0}^{x}\left(x-s\right)f(s,y(s),y^{'}(s))ds.$$

Exercice 5 Montrer que le problème de Cauchy suivant

$$\left\{\begin{array}{l} y^{''}-\sin y=0 \\ y(0)=\frac{\pi}{4}; y^{'}(0)=0 \end{array}\right.$$

admet une solution unique.

Exercice 6 L'équation différentielle suivante: $y^{''} = 2\sqrt{y^{'}}$ possède deux solutions: $y_1(x) = 0$ et $y_2(x) = \frac{x^3}{3}$ qui satisfaisont aux conditions initiales $y(0) = 0, y^{'}(0) = 0$. Pourquoi ce résultat n'est pas en contradiction avec le théorème d"existence et d'unicité de la solution du problème de Cauchy?

Série d'exercices N°3

Exercice 1 Intégrer les équations suivantes:
$e^{-y}\left(1+y^{'}\right) = 1$, $\quad y\log y dx + xdy = 0; y(1) = 1$, $\quad y^{'} = a^{x+y}; (a > 0, a \neq 1)$, $\quad y^{'} = \sin(x-y)$;
$y + xy^{'} = a(1+xy); y(1/a) = -a$, $\quad x^3y^{'} - \sin y = 1;\ y \to 5\pi, x \to \infty$,
$e^y = e^{4y}y^{'} + 1; y$ est borné pour $x \to \infty$.

Exercice 2 Intégrer les équations homogènes suivantes:
$xy^{'} = y + \cos^2\frac{y}{x}$, $\quad xy^{'} = y(\log y - \log x)$, $\quad xy^{'} = y + \sqrt{y^2 - x^2}$, $\quad (4x-3y)\,dx + (2y-3x)\,dy = 0$
$x + y - 2 + (1-x)\,y^{'} = 0$, $\quad (3y - 7x + 7)\,dx - (3x - 7y - 3)\,dy = 0$, $\quad (x+y)\,dx + (x-y-2)\,dy = 0$.

Exercice 3 Intégrer les équations différentielles linéaires suivantes:
$y^{'} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$, $\quad \left(x - x^3\right)y^{'} + \left(2x^2 - 1\right)y - ax^3 = 0$, $\quad y^{'} - a\frac{y}{x} = \frac{x+1}{x}$, $\quad y^{'} - \frac{n}{x}y = e^x x^n$
$y' + \frac{1-2x}{x^2}y - 1 = 0$, $\quad y^{'}x\log x - y = 3x^3\log^2 x$, $\quad \left(e^{\frac{-y^2}{2}} - xy\right)dy - dx = 0$, $\quad y^{'} + xe^x y = e^{(1-x)e^x}$.

Pour les problèmes suivants, trouver des solutions des équations qui satisfont aux conditions indiquées:
$y^{'} - y = -2e^{-x}; y \to 0$ pour $x \to -\infty, 2xy^{'} - y = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}}; y \to -1$ pour $x \to \infty$.

Exercice 4 Intégrer les équations de Bernoulli:
$y^{'} + xy = x^3y^3$, $\ \left(1-x^2\right)y^{'} - xy - axy^2 = 0$, $\ 3y^2y^{'} - ay^3 - x - 1 = 0$, $\ y^{'}\left(x^2y^3 + xy\right) = 1$,
$(y\log x - 2)\,ydx = xdy$.

Exercice 5 Intégrer les équations de Riccati suivantes connaissant leurs solutions particulières:
$y^{'}e^{-x} + y^2 - 2ye^x = 1 - e^{2x}$; $\quad y_1(x) = e^x$

$y' + y^2 - 2y\sin x + \sin^2 x - \cos x = 0;\ y_1(x) = \sin x$
$xy' - y^2 + (2x+1)\,y = x^2 + 2x;\ y_1(x) = x$
$x^2 y' = x^2 y^2 + xy + 1;\ y_1(x) = \frac{-1}{x}$.

Exercice 6 Intégrer les équations de Lagrange et de Clairaut suivantes:
$y = 2xy' + \log y',\ y = x\left(1 + y'\right) + \left(y'\right)^2,\ y = \frac{3}{2}xy' + e^{y'},\ y = y\left(y'\right)^2 + 2xy',$
$y = xy' + y' - \left(y'\right)^2,\ y = xy' + \sqrt{1 - (y')^2},\ y = xy' - \frac{1}{(y')^2}$.
Exercice 7 Réqoudre les problèmes de Cauchy suivants:

$$\left\{\begin{array}{l} y''' - 3y'' + 3y' = 0 \\ y(0) = 1; y'(0) = 2; y''(0) = 3 \end{array}\right. ,\quad \left\{\begin{array}{l} y'' - 2y' + 3y = 0 \\ y(0) = 1; y'(0) = 3 \end{array}\right. .$$

Exercice 8 Résoudre les équations linéaires non homogènes d'ordre 2 suivantes
$y'' + 2y' + y = -2, y'' - 2ky' + k^2 y = e^x; k \neq 1, y'' + y' + y = \left(x + x^2\right) e^x$
$y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\sin 2x, y'' + a^2 y = 2\cos mx + 3\sin mx; m \neq a, y'' - 4y' + 5y = e^{2x}\left(\sin x + 2\cos x\right).$
Trouver une solution particulière de l'équation: $y'' + 4y' + 5y = 8\cos x$ qui est bornée lorsque $x \to -\infty$.
Trouver une solution particulière de l'équation : $y'' - 3y' + 2y = 4 + 2e^{-x}\cos x$ qui satisfait à la condition $y \to 2$ pour $x \to +\infty$.

Exercice 9 Connaissant le système fondamental de solution $y_1(x) = \log x, y_2(x) = x$, de l'équation homogène associée, trouver une solution particulière de l'équation:
$x^2\left(1 - \log x\right) y'' + xy' - y = \frac{(1-\log x)^2}{x}$, en appliquant la méthode de variation des constantes, qui satisfait à la condition : $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 0$.

Exercice 10 Intégrer les équations suivantes connaissant l'une des solutions particulières y_1 de l'équation homogène associée:
$(2x+1)\,y'' + (4x-2)\,y' - 8y = 0; y_1(x) = e^{mx}$.
$x^2 y'' - xy' - 3y = 5x^4; y_1(x) = \frac{1}{x}$.
$x^2\left(\log x - 1\right) y'' - xy' + y = 0; y_1(x) = x$.
Exercice 11 Intégrer par la méthode de variation des constantes les équations
$y'' + y = \frac{1}{\sin x},\ y'' - y = \frac{1}{e^x+1},\ y''' + y'' = \frac{x-1}{x^2},\ xy''\log x - y' = \log^2 x.$

Exercice 12 Trouver des solutions des équations suivantes pour des conditions données à l'infini

$4xy^{''} + 2y^{'} + y = 1; y_1(x) = \sin\sqrt{x}, y_2(x) = \cos\sqrt{x}; \quad \lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 1.$

$(1-x)\,y^{''} + xy^{'} - y = (x-1)^2\,e^x, y_1(x) = x, y_2(x) = e^x; \quad \lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 0; y(0) = 1.$