

Exercice 1

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties d'un ensemble X

1. On suppose la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monotone, c'est-à-dire que $A_n \subset A_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, ou que $A_{n+1} \subset A_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Que sont $\limsup_n A_n$ et $\liminf_n A_n$?

2. Même question que précédemment si la suite est définie par : $A_{2p} = A$ et $A_{2p+1} = B$, $p \in \mathbb{N}$, A et B étant deux parties données de X

3. Montrer que :

$$\chi_{\overline{\lim A_n}} = \limsup_n \chi_{A_n}.$$

Exercice 2

Soit X un ensemble non vide.

1. Montrer qu'une intersection quelconque de tribus sur X est une tribu sur X .

2. Soit \mathcal{M} une tribu sur un ensemble X et $F \subset X$. Montrer que

$$M_F = \{A \cap F, A \in M\}$$

est une tribu sur X (tribu trace de \mathcal{M} sur F).

Exercice 3.

1. Soit $a; b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Vérifier que

$$]a, b[= \bigcup_1^{+\infty} \left[a + \frac{1}{n}, b \right], \quad [a, b[= \bigcap_1^{+\infty} \left[a - \frac{1}{n}, b \right].$$

2. Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par la famille

$$S = \{[a, b[, a; b \in \mathbb{R}, a < b\}.$$

Exercice 4.

Soit (X, \mathcal{M}, μ) un espace mesuré, et $A, B \in \mathcal{M}$.

1. Démontrer que $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.

2. Si $\mu(A) < \infty$; déduire que $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$.

3. Supposons que $\mu(A \cap B) < \infty$ et $\mu(A \Delta B) = 0$: Montrer que $\mu(A) = \mu(B)$.

Exercice 5.

Soit (X, \mathcal{M}, μ) un espace mesuré et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$.

1. On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $\mu(\bigcup_{p \geq n_0} A_p) < \infty$. Montrer que

$$\mu(\liminf_n A_n) \leq \liminf_n \mu(A_n) \leq \limsup_n \mu(A_n) \leq \mu(\limsup_n A_n).$$

2. Donner un exemple (c'est-à-dire choisir (X, \mathcal{M}, μ) et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$) pour lequel :

$$\limsup_n \mu(A_n) > \mu(\limsup_n A_n).$$