Table des matières

Chapitre 1

Tribus et mesures

1.1 Rappels sur la théorie des ensembles.

Dans toute la suite, on considère un ensemble de base X. On rappelle que $\mathcal{P}(X)$ désigne la famille de tous les sous-ensembles de X. Pour tout sous-ensembles A et B de X on a

$A^c = \{x \in X : x \notin X\}$, le complémentaire de A dans X.

$A \backslash B = \{x \in X : x \in A \text{ et } x \notin B\} = A \cap B^c = A \backslash (A \cap B)$

$A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$

Dénombrabilité

Définition 1.1.1 *L'ensemble E est dit dénombrable s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$. En d'autres termes, on peut écrire*

$$E = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \{x_0, ..., x_n, ...\}$$

Remarques 1.1.2 *1) Tout ensemle fini est dénombrable.*

2) $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ sont dénombrables mais $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

3) Toute partie d'un ensemle dénombrable est dénombrable.

4) Si pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble A_n est dénobrable, alors $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ est dénombrable.

5) La propriété 4) reste vrai si l'on remplace la suite d'ensemble $(A_n)_{n\geqslant 1}$ par famille dénombrable $(A_i)_{i\in I}$, c'est-à-dire avec I dénombrable .

Limites d'ensembles

Définition 1.1.3 *Soit X un ensemble non-vide et $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de parties de X, on définit la limite supérieure et inférieure de la suite $(A_n)_{n\geqslant 1}$ par*

$$\begin{aligned}
\overline{\lim} A_n &= \limsup_n A_n &:= \bigcap_{n\geqslant 1}\bigcup_{k\geqslant n} A_k &= \bigcap_{n=1}^{+\infty}\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k \\
\underline{\lim} A_n &= \liminf_n A_n &:= \bigcup_{n\geqslant 1}\bigcap_{k\geqslant n} A_k &= \bigcup_{n=1}^{+\infty}\bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k
\end{aligned}$$

La notation $\inf\sup$ et $\sup\inf$ est à prendre au sens de la relation d'ordre partiel $\subset$ sur les parties de X.

Pour les suites réelles, rappelons que si $(a_n)_n$ est une suite dans $\mathbb{R}$, on définit

$$\begin{aligned}
\limsup_n a_n &= \inf_{n\geq 1} \sup_{k\geq n} a_k \\
\liminf_n a_n &= \sup_{n\geq 1} \inf_{k\geq n} a_k
\end{aligned}$$

Ces deux nombres existent toujours dans $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$.

De même si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions d'un ensemble X dans $\mathbb{R}$, $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$, on définit $\limsup_n f_n$ et $\liminf_n f_n$ comme fonctions de X dans $\overline{\mathbb{R}}$

$$\begin{aligned}
\left(\limsup_n f_n\right)(x) &= \inf_{n\geq 1} \sup_{k\geq n} f_k(x) \\
\left(\liminf_n f_n\right)(x) &= \sup_{n\geq 1} \inf_{k\geq n} f_k(x)
\end{aligned}$$

Remarque 1.1.4 *Noter que*

$$\underline{\lim} A_n \subset \overline{\lim} A_n \tag{1.1}$$

En effet, $\bigcap_{k\geqslant n} A_k \subset A_k$ pour tout $k \geqslant n$. On a donc $\bigcap_{k\geqslant n} A_k \subset \bigcup_{k\geqslant n} A_k$ pour tout n. On a alors pour tout n

$$\bigcap_{k\geqslant n} A_k \subset \bigcap_{n\geqslant 1}\bigcup_{k\geqslant n} A_k = \overline{\lim} A_n$$

Finalement,

$$\bigcup_{n\geqslant 1}\bigcap_{k\geqslant n} A_k \subset \overline{\lim} A_n$$

C'est à dire l'inclusion (1.1).

Proposition 1.1.5 *(Suite convergente d'ensembles)*

1) Si $(A_n)_n$ *est croissante i.e.* $A_n \subset A_{n+1}$, $\forall n \geq 1$, *alors*

$$\overline{\lim} A_n \;=\; \underline{\lim} A_n \;=\; \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$$

2) Si $(A_n)_n$ *est décroissante i.e.* $A_{n+1} \subset A_n$, $\forall n \geq 1$, *alors*

$$\overline{\lim} A_n \;=\; \underline{\lim} A_n \;=\; \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$$

Dans les deux cas on dira que la suite $(A_n)_n$ *est convergente.*

Fonctions caractéristiques d'ensembles

Rappelons que la fonction caractéristique (ou indicatrice) χ_A d'une partie A de X est la fonction $\chi_A : X \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{si } x \notin A \end{cases}$.

La fonction indicatrice vérifie les propriétés suivantes

Proposition 1.1.6 *Soient* X *un ensemble non vide et* $A, B \subset X$.

1) Si $A \cap B = \phi$ *alors* $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B$.

2) On a $\chi_{A^c} = 1 - \chi_A$ *et si* $B \subset A$ *alors* $\chi_{A\setminus B} = \chi_A - \chi_B$.

3) Si $(A_n)_n$ *une suite de parties de* X *on a alors*

$$\chi_{\underline{\lim} A_n} \;=\; \liminf_n \chi_{A_n} \quad \textit{et} \quad \chi_{\overline{\lim} A_n} \;=\; \limsup_n \chi_{A_n}$$

De plus si les A_n *sont disjoints deux à deux, alors* $\chi_{\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} A_n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \chi_{A_n}$

1.2 Algèbres et tribus

Définition 1.2.1 *Soit X un ensemble et $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ une famille de parties de X. On dit que $\mathcal{M}$ est une tribu (ou σ-algèbre) sur X, si l'on a les trois propriétés suivantes*
(c1) $\phi \in \mathcal{M}$.
(c2) Si $A \in \mathcal{M}$ *alors* $A^c \in \mathcal{M}$.
(c3) Si $(A_n)_{n \geqslant 1}$ *est une suite de* $\mathcal{M}$ *alors* $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

Les éléments de $\mathcal{M}$ sont appelés les parties mesurables de X et on dit que $(X, \mathcal{M})$ est un espace mesurable.

Remarque 1.2.2 *Si $\mathcal{M}$ est une tribu sur X alors,*
(i) $X \in \mathcal{M}$ *car* $X = \phi^c \in \mathcal{M}$ *d'aprés (c1) et (c2) de la définition précédente.*
(ii) Si $(A_n)_{n \geqslant 1}$ *est une suite de* $\mathcal{M}$ *alors* $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{M}$. *En effet, par (c2) et (c3),* $A_n \in \mathcal{M}$ *implique que*

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n^c \right)^c \in \mathcal{M}.$$

(iii) Si $A, B \in \mathcal{M}$ *alors* $A \backslash B, A \Delta B \in \mathcal{M}$ *car*

$$A \backslash B = A \cap B^c \in \mathcal{M} \quad \textit{et} \quad A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) \in \mathcal{M}.$$

Définition 1.2.3 *On appelle Algébre de parties d'un ensemble X toute famille $\mathcal{A}$ de parties de X vérifiant les propriétés suivantes*
1) $\phi \in \mathcal{A}$
2) Si $A \in \mathcal{A}$ *alors* $A^c \in \mathcal{A}$
3) Si $A, B \in \mathcal{A}$ *alors* $A \cup B \in \mathcal{A}$.

Remarque 1.2.4 *Une tribu est une algèbre d'ensembles stable par réunion dénombrable.*

Exemples 1.2.5 *Soit X un ensemble non vide.*
1) La famille $\mathcal{P}(X)$ de toute les parties de X est la plus grande tribu sur X.

2) La famille $\mathcal{M} = \{\phi, X\}$ est la plus petite tribu sur X.

Proposition 1.2.6 *Si l'algèbre $\mathcal{A}$ vérifiée la propriété*

$$(B_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{A},\ (B_n)_{n\geq 1} \text{ est croissante } \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}$$

alors $\mathcal{A}$ est une tribu sur X.

Démonstration. Soit $(A_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{A}$ une suite de parties de X. Si on pose $B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}$, la suite $(B_n)_{n\geq 1}$ est croissante donc $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}$. D'autre part il est clair que $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, d'où $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ ■

Proposition 1.2.7 *$\mathcal{M}$ est une tribu sur X si, et seulement si*

(1) $\phi \in \mathcal{M}$.

(2) $\mathcal{M}$ stable par complémentation et intersection finie.

(3) Si $(A_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de $\mathcal{M}$ disjoints deux à deux (i.e. $A_i \cap A_j = \phi$, $\forall i \neq j$), alors $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

Démonstration. 1) $\Longrightarrow$)évident

2)$\Longleftarrow$) soit donc $(A_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathcal{M}$, on pose

$$\begin{cases} B_1 = A_1 \\ B_n = A_n \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \right)^C, \quad n \geq 2 \end{cases} \tag{1.2}$$

et on montre que i) $B_n \in \mathcal{M}$, ii) $B_m \cap B_n = \phi$, $\forall n \neq m$,iii) $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$.

i) $B_n = A_n \cap A_1^c \cap ... \cap A_m^c \cap ... \cap A_{n-1}^c \in \mathcal{M}$ (d'aprés l'hypothèse (2))

ii) Pour tout $n \neq m$, si $n > m$ on a

$$B_m \cap B_n \subset A_m \cap B_n = A_m \cap \left(A_n \cap A_1^c \cap ... \cap A_m^c \cap ... \cap A_{n-1}^c\right) = \phi$$

d'où $B_m \cap B_n = \phi$, $\forall n \neq m$.

iii) On a $B_n \subset A_n \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$.

Soit $x \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$, il existe $n \geq 1$ tel que $x \in A_n$. On pose r la plus petite $n \geq 1$ qui vérifie $x \in A_n$ i.e.

$$r = \min \{n \in \mathbb{N}, x \in A_n\}$$

alors $x \in A_r, x \notin A_{r-1}, x \notin A_{r-2}, \ldots$et $x \notin A_1$ ce qui donne $x \in B_r$, alors $x \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$

donc $\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$.

Alors $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{M}$ (d'après l'hypothèse (3)) ■

Lemme 1.2.8 *Soit $(\mathcal{M}_i)_{i \in I}$ une famille quelconque de tribus sur X. Alors $\bigcap_{i \in I} \mathcal{M}_i$ est encore une tribu sur X.*

Démonstration. La vérification est immédiate. ■

Définition 1.2.9 *Soit $\mathcal{S}$ une famille de parties de X. On note $\sigma(\mathcal{S})$ l'intersection de toutes les tribus $\mathcal{M}$ contenant $\mathcal{S}$. Alors, $\sigma(\mathcal{S})$ est une tribu sur X appelée tribu engendrée par $\mathcal{S}$. C'est la plus petite tribu sur X qui contient $\mathcal{S}$.*

En pratique, pour montrer qu'une tribu $\mathcal{M}$ est la tribu engendrée par $\mathcal{S}$ il suffit de montrer que toute tribu contenant $\mathcal{S}$ contient $\mathcal{M}$.

Tribu borélienne ou tribu de Borel

Rappelons que, si X est un espace topologique (métrique), sa topologie $\mathcal{O}$ est l'ensemble de ses ouverts. La famille de parties $\mathcal{O}$ n'est pas une tribu (sauf cas très partiuculiers), par example, si $X = \mathbb{R}$ on a $\left]-\frac{1}{n}, 1\right[\in \mathcal{O}$ pour tout $n \geq 1$ mais $\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left]-\frac{1}{n}, 1\right[= [0, 1[\notin \mathcal{O}$.

Définition 1.2.10 *La tribu borélienne d'un espace topologique $(X, \mathcal{O})$ est $\sigma(\mathcal{O})$, la tribu engendrée par $\mathcal{O}$. On la note $\mathcal{B}(X)$. Un borélien est un ensemble mesurable $A \in \mathcal{B}(X)$.*

Proposition 1.2.11 *La tribu borélienne $\mathcal{B}(X)$ est aussi engendrée par les fermés de l'espace topologique X.*

Démonstration. Soit

$$\mathcal{F} = \{A \subset X/A \text{ fermé}\}$$

Si $A \in \mathcal{F} \Longrightarrow \mathcal{A}^c \in \mathcal{B}(X) \Longrightarrow \mathcal{A} \in \mathcal{B}(X)$ donc $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}(X)$ alors $\sigma(\mathcal{F}) \subset \mathcal{B}(X)$.

Inversement, soit $\theta \in \mathcal{O}$ un ouvert de X, alors $\theta^c \in \mathcal{F} \subset \sigma(\mathcal{F})$ donc $\theta \in \sigma(\mathcal{F})$. Ce qui montre que $\mathcal{O} \subset \sigma(\mathcal{F})$ et puisque $\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{O})$ on a $\mathcal{B}(X) \subset \sigma(\mathcal{F})$. ■

Lemme 1.2.12 *Tout ouvert non vide de $\mathbb{R}$ est réunion dénombrable d'intervalles $]a, b[$.*

Démonstration. Soit θ un ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Posons la partie $A \subset \mathbb{Q}^2$ définie par

$$A = \left\{(p, q) \in \mathbb{Q}^2,\ p < q :]p, q[\subset \theta\right\}.$$

Si $x \in \theta$, il existe $\varepsilon_x > 0$ tel que $]x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x[\subset \theta$. Par la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ en peut prendre $p_x, q_x \in \mathbb{Q}$ vérifiant

$$x - \varepsilon_x \leq p_x < x \quad \text{et} \quad x < q_x \leq x + \varepsilon_x$$

il résulte que

$$x \in]p_x, q_x[\subset]x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x[\subset \theta,$$

d'où $p_x, q_x \in A$, donc

$$x \in]p_x, q_x[\subset \bigcup_{(p,q)\in A}]p, q[,$$

c'est-à-dire $\theta \subset \bigcup_{(p,q)\in A}]p, q[$. Inversement, si $x \in \bigcup_{(p,q)\in A}]p, q[$, il existe $p_x, q_x \in A$ avec $x \in]p_x, q_x[\subset \theta$ d'où $x \in \theta$. On en déduit

$$\theta = \bigcup_{(p,q)\in A}]p, q[.$$

Cette réunion est dénombrable car la partie $A \subset \mathbb{Q}^2$ est dénombrable. ■

Théorème 1.2.13 *(La tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$)*
La tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendreé par les intervalles $]a,+\infty[$ pour $a \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Soient $\mathcal{S} = \{]a,+\infty[\,,\ a \in \mathbb{R}\}$ la famille de toute les intervalles $]a,+\infty[$ et $\mathcal{O}$ l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$. Il est clair que $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}$ alors $\sigma(\mathcal{S}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ car par définition on a $\sigma(\mathcal{O}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Maintenant, montrons que $\mathcal{O} \subset \sigma(\mathcal{S})$, soit $\theta \in \mathcal{O}$ alors, d'aprés le lemme précèdent, θ est une réunion dénombrable d'intervalles de la forme $]a,b[$ c-à-d $\theta = \bigcup_{n=1}^{+\infty}]a_n, b_n[$. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ on a

$$]a,b[\, = \,]-\infty, b[\, \cap \,]a,+\infty[\quad \text{et} \quad [b,+\infty[= \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left]b - \tfrac{1}{n}, +\infty\right[.$$

Pour tout $n \geq 1$ on a $\left]b - \frac{1}{n}, +\infty\right[\in \mathcal{S} \subset \sigma(\mathcal{S})$ donc la stabilité par intérsection garantit que $[b,+\infty[\in \sigma(\mathcal{S})$ et par complémentaire,

$$]-\infty, b[\, = ([b,+\infty[)^c \in \sigma(\mathcal{S})$$

et $]a,+\infty[\, \in \mathcal{S} \subset \sigma(\mathcal{S})$ ce qui donne $]a,b[\, \in \sigma(\mathcal{S})$. Alors, $\theta = \bigcup_{n=1}^{+\infty}]a_n, b_n[\, \in \sigma(\mathcal{S})$. Finalement on obtient l'inclusion $\mathcal{O} \subset \sigma(\mathcal{S})$ ce qui implique que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \sigma(\mathcal{S})$. ■

1.3 Mesures positives.

Définition 1.3.1 *Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable, une mesure positive (mesure) sur $(X, \mathcal{M})$ (ou, plus simplement, sur X) est une application d'ensembles $\mu : \mathcal{M} \longrightarrow [0,+\infty]$ vérifiant les propriétés suivantes*
(c1) $\mu(\phi) = 0$.
(c2) Pour toute suite $(A_n)_{n \geqslant 1} \subset \mathcal{M}$ de parties mesurables deux-à-deux disjointes, on a

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

On dit que $(X, \mathcal{M}, \mu)$ est un espace mesuré.

Définition 1.3.2 *Soient X un ensemble et $\mathcal{M}$ une tribu sur X. On appelle probabilité une mesure $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{M}$ telle que $\mathbb{P}(X) = 1$.*
On dit que $(X, \mathcal{M}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé et les éléments de $\mathcal{M}$ sont appelés les événements.

Exemples 1.3.3 *1)* ***Mesure de comptage.*** *Sur $(X, \mathcal{P}(X))$, on définit la mesure de comptage par*

$$\begin{cases} \mu(A) = card(A), \ \textit{si } A \textit{ est fini} \\ \mu(A) = \infty, \ \textit{sinon} \end{cases}$$

2) ***Mesure de Dirac en un point.*** *Soit X un ensemble et $x_0 \in X$ un point de X. Pour tout sous-ensemble A de X, la mesure δ_{x_0} de Dirac (sur $\mathcal{P}(X)$) au point x_0 est définie par*

$$\begin{cases} \delta_{x_0}(A) = 1, \ \textit{si } x_0 \in A \\ \delta_{x_0}(A) = 0, \ \textit{si } x_0 \notin A \end{cases}$$

On peut remarquer que la mesure de Dirac est une probabilité.
3) ***Mesures discrètes.*** *Soit X un ensemble, $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de points de X et $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels strictement positifs. Pour toute partie A de X on pose*

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n.\delta_{a_n}(A) = \sum_{n=1, a_n \in A}^{\infty} \alpha_n$$

On définit ainsi une mesure positive sur $\mathcal{P}(X)$ que l'on note

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n.\delta_{a_n}.$$

Proposition 1.3.4 *Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. La mesure μ possède les propriétés suivantes*
1) ***(La monotonie)****. Si $A, B \in \mathcal{M}$ avec $A \subset B$ alors $\mu(A) \leq \mu(B)$.*
2) Si $A, B \in \mathcal{M}$ avec $A \subset B$ et $\mu(A) < \infty$ alors $\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$.
3) ***(La sous-additivité).*** *Pour toute suite $(A_n)_{n\geqslant 1}$ dans $\mathcal{M}$ on a*

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

1) Si $A, B \in \mathcal{M}$ avec $A \subset B$ alors $B = A \cup (B \backslash A)$, puisque $A \cap (B \backslash A) = \phi$, par l'additivité de la mesure on a

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \backslash A) \geq \mu(A).$$

2) Si de plus $\mu(A) < \infty$ alors $\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$.
3) A partir de la suite $(A_n)_{n \geqslant 1}$, on construit la suite $(B_n)_{n \geqslant 1}$ définie par (**??**). On a $B_n \subset A_n$ pour tout $n \geqslant 1$, les B_n sont disjoints deux à deux dans $\mathcal{M}$ et $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$ (voir la preuve de la Proposition 1.2.7). La monotonie de la mesure donne $\mu(B_n) \leq \mu(A_n)$ pour tout $n \geqslant 1$. D'autre part, d'après la σ-additivité de la mesure on a

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Définition 1.3.5 *On dit qu'une mesure positive μ est finie si elle est à valeurs finies c-à-d*

$$\mu(A) < \infty \textit{ pour tout } A \in \mathcal{M}$$

Autrement dit, $\mu(X) < \infty$.

Définition 1.3.6 *Soit μ une mesure sur $(X, \mathcal{M})$. On dit qu'elle est σ-finie s'il existe une suite de parties mesurables $(E_n)_{n \geqslant 1}$ telle que $X = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$ et $\mu(E_n) < \infty$ pour tout $n \geqslant 1$.*

Exemples 1.3.7 *1) La mesure de Direc δ_x est finie car $\delta_x(X) = 1 < \infty$.*
2) La mesure de compage sur X est :
i) finie si et seulement si X est fini
ii) σ-finie si et seulement si X est dénombrable.

1.4 Propriétés des mesures, mesures extérieures, mesures complètes.

Théorème 1.4.1 *(Théorème de convergence monotone.) Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré, alors*

1) ***La continuité croissante.*** *Si $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante de parties mesurables, on a*

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu(A_n)$$

2) ***La continuité décroissante.*** *Si $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite décroissante de parties mesurables avec*

$$\mu(A_1) < \infty, \tag{1.3}$$

alors, on a

$$\mu(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu(A_n)$$

Démonstration. 1) Posons

$$\begin{cases} B_1 = A_1 \\ B_n = A_n \backslash A_{n-1}, \text{ pour } n \geq 2 \end{cases}$$

les ensembles B_n sont mesurables et $A_n = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$ pour tout $n \geq 1$, ce qui implique que $\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$. De plus, les B_n, $n \geq 1$, sont deux-à-deux disjoints, donc

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k) \\ &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \mu(A_n) \end{aligned}$$

2) Pour tout $n \geq 1$ posons $B_n = A_1 \backslash A_n = A_1 \cap A_n^c$. Comme la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ est décroissante, la suite $(B_n)_{n\geq 1}$ est croissante, en utilisant 1)

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \mu(B_n) = \mu(A_1) - \lim_{n \longrightarrow \infty} \mu(A_n),$$

d'autre part on a

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n = A_1 \cap \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n^c \right) = A_1 \backslash \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n,$$

il résulte que

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n) = \mu(A_1) - \mu(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n).$$

En fin, on peut simplifier par $\mu(A_1)$ puisque cette dernière quantité est finie,

$$\mu(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \mu(A_n)$$

■

La condition $\mu(A_1) < \infty$ dans 2) du théorème précédent est nécessaire comme le montre l'exemple suivant.

Exercice corrigé 1.4.2 *Considérons l'espace mesuré* $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), card)$ *et la suite des parties mesurables* $(A_n)_{n\geq 1}$ *telle que*

$$A_n = \{n, n+1, n+2, ...\}$$

pour montrer que la condition (1.3) est nécessaire pour la continuité décroissante de la mesure.

Démonstration. La suite $(A_n)_{n\geq 1}$ est décroissante,

$$A_{n+1} = \{n+1, n+2, n+3...\} \subset A_n = \{n, n+1, n+2, ...\}$$

et

$$\mu(A_1) = card(\{1, 2, ...\}) = +\infty.$$

Si $x \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$ alors $x \geq n$ pour tout $n \geq 1$. D'où $\mathbb{N}$ est borné, ce qui est une contradiction. Donc

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = \phi.$$

D'autre part

$$0 = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \neq \lim_{n \longrightarrow \infty} \mu\left(A_n\right) = \lim_{n \longrightarrow \infty} card\left(\{n, n+1, n+2, ...\}\right) = +\infty$$

■

Ensemble négligeable et mesure complétes

Définition 1.4.3 *Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $N \subset X$. L'ensemble N est dit négligeable dans $(X, \mathcal{M}, \mu)$ s'il existe $E \in \mathcal{M}$ tel que $N \subset E$ et $\mu(E) = 0$.*

Remarque 1.4.4 *Si $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite de parties négligeables dans $(X, \mathcal{M}, \mu)$ alors $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ est négligeable. En effet, pour tout $n \geq 1$ il existe $E_n \in \mathcal{M}$ tel que $A_n \subset E_n$ et $\mu(E_n) = 0$. Or*

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n \quad et \quad \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = 0.$$

Donc $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ est négligeable.

Définition 1.4.5 *Un espace mesuré $(X, \mathcal{M}, \mu)$ est dit complet si toute partie négligeable est mesurable (et donc de mesure nulle). Dans ce cas on dit que la mesure μ est compléte.*

Mesures extérieurs

Définition 1.4.6 *Soit X un ensemble quelconque. On appelle mesure extérieure sur X une application $\mu^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, +\infty]$ possédant les propriétés suivantes*

i) $\mu^*(\phi) = 0$

Définition 1.4.7 *ii) si $A \subset B \subset X$ alors $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.*
iii) Pour toute suite $(A_n)_n$ de parties de X on a

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

Remarque 1.4.8 *Il est clair que toute mesure positive sur $(X, \mathcal{P}(X))$ est une mesure extérieure sur X. Mais la réceproque n'est pas vraie en générale, comme le montre l'exemple suivant*

Exemple 1.4.9 *Soit X un ensemble non-vide. L'application $\mu^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \{0, 1\}$ définie par $\mu^*(\phi) = 0$ et $\mu^*(A) = 1$, si $A \neq \phi$ est une mesure extérieure sur X.*
De plus si $card(X) > 1$, l'application μ^* n'est pas une mesure positive sur $(X, \mathcal{P}(X))$.

Démonstration. Soit $A, B \in \mathcal{P}(X)$ avec $A \subset B$. Si $A = \phi$ alors $\mu^*(A) = 0 \leq \mu^*(B)$. Si $A \neq \phi$ alors $B \neq \phi$ et donc $\mu^*(A) = 1 = \mu^*(B)$.
Soit maintenant $(A_n)_n$ une suite de parties de X. Si tous les A_n sont vides on a

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) = \mu^*(\phi) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

Pour le contraire, s'il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $A_j \neq \phi$ on a $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \neq \phi$ et alors

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) = 1 = \mu^*(A_j) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

ce que signifie que μ^* est une mesure extérieure sur X.
Du fait que $card(X) > 1$, on peut choisir $a, b \in X$ avec $a \neq b$. On pose $A = \{a\}$ et $B = \{b\}$. Dans ce cas μ^* n'est pas additive car

$$\mu^*(A \cup B) = 1 \neq \mu^*(A) + \mu^*(B) = 2$$

Alors μ^* n'est pas une mesure positive sur $(X, \mathcal{P}(X))$. ■

Proposition 1.4.10 *Toute mesure extérieure additive sur X est une mesure positive sur $(X, \mathcal{P}(X))$.*

Démonstration. Il s'agit de vérifier la σ-additivité. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite de $\mathcal{P}(X)$ disjoints deux à deux. Tout d'abord remarquons que $\bigcup_{n=1}^{p} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ pour tout $p \geq 1$. D'aprés l'hypothèse de l'additivité et (ii) de la Définition 1.4.6 on a

$$\sum_{n=1}^{p} \mu^*(A_n) = \mu^*(\bigcup_{n=1}^{p} A_n) \leq \mu^*(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n).$$

Par le passage à la limite quand $p \longrightarrow +\infty$ on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n) \leq \mu^*(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n).$$

Cette dernière inégalité et (iii) de la Définition 1.4.6 donnent la σ-additivité de μ^*. ■

Définition 1.4.11 *Soit X un ensemble non-vide et soit μ^* une mesure extérieure sur X. Une partie E de X est dite μ^*-mesurable si pour tout $A \subset X$ on a*

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \tag{1.4}$$

On dit aussi que E est mesurable au sens de Carathéodory (par rapport à μ^*).
On note $\mathcal{M}(\mu^*)$ la famille des parties μ^*-mesurable de X.

Remarques 1.4.12 *Pour tout $A \subset X$ on peut écrire*

$$A = A \cap (E \cup E^c) = (A \cap E) \cup (A \cap E^c),$$

par la sous-additivité de la mesure extérieure (iii dans la Définition 1.4.6) on a toujours

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c).$$

Alors pour montrer qu'une partie $E \subset X$ est μ^*-mesurable, il suffit de montrer que

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \tag{1.5}$$

pour tout $A \subset X$.

Exemples 1.4.13 *Soit X un ensemble non-vide*

1) X et ϕ sont μ^*-mesurables pour toute mesure extérieure.

2) Si μ^* est une mesure extérieure sur X et $E \subset X$ tel que $\mu^*(E) = 0$, alors E est μ^*-mesurable.

Démonstration. 2) Il suffit de montrer que (1.5) est vrai pour tout $A \subset X$. D'aprés les inclusions $A \cap E \subset E$ et $A \cap E^c \subset A$ on a $\mu^*(A \cap E) \leq \mu^*(E) = 0$ et $\mu^*(A \cap E^c) \leq \mu^*(A)$, ce qui implique que

$$\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) = \mu^*(A \cap E^c) \leq \mu^*(A).$$

■

Théorème 1.4.14 *Soit μ^* une mesure extérieure sur un ensemble non-vide X. Alors $\mathcal{M}(\mu^*)$ est une tribu sur X et la restriction de μ^* à $\mathcal{M}(\mu^*)$ est une mesure.*

Démonstration. $\phi, X \in \mathcal{M}(\mu^*)$, par l'Exemple 1.4.13. De façon immédiate, à partir de l'équation (1.4) on a $E \in \mathcal{M}(\mu^*)$ si et seulement si $E^c \in \mathcal{M}(\mu^*)$. Il reste donc à voir que $\mathcal{M}(\mu^*)$ est stable par réunion dénombrable. Commençons par l'établir pour une réunion finie. Soient $E_1, E_2 \in \mathcal{M}(\mu^*)$, pour tout $A \subset X$

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_1^c) \tag{1.6}$$

On teste la μ^*-mesurablité de E_2 par l'ensemble $A \cap E_1^c$

$$\mu^*(A \cap E_1^c) = \mu^*(A \cap E_1^c \cap E_2) + \mu^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c). \tag{1.7}$$

En portant (1.7) dans (1.6)

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &= \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_1^c \cap E_2) + \mu^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c). \\ &\geq \mu^*\left[(A \cap E_1) \cup (A \cap E_1^c \cap E_2)\right] + \mu^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c). \end{aligned}$$

Mais

$$(A \cap E_1) \cup (A \cap E_1^c \cap E_2) = A \cap [E_1 \cup (E_2 \backslash E_1)] = A \cap (E_1 \cup E_2),$$

et aussi

$$A \cap E_1^c \cap E_2^c = A \cap (E_1 \cup E_2)^c.$$

Finalement on obtient

$$\mu^*(A) \geq \mu^*\left[A \cap (E_1 \cup E_2)\right] + \mu^*\left[A \cap (E_1 \cup E_2)^c\right],$$

d'où $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{M}(\mu^*)$.

Pour terminer la preuve de que $\mathcal{M}(\mu^*)$ est une tribu, montrons la stabilité par rapport à la réunion dénombrable. Considérons une famille $(E_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments de $\mathcal{M}(\mu^*)$ deux à deux disjoints (si $(A_n)_{n\geqslant 1}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{M}(\mu^*)$, on peut toujours écrire $\cup_{n\geqslant 1}A_n = \cup_{n\geqslant 1}E_n$, avec les éléments E_n deux à deux disjoints. Voir la preuve de la Proposition 1.2.7). Pour tout $n \geqslant 1$, posons $F_n = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$ et montrons par récurrence sur n que pour tout partie $A \subset X$ on a

$$\mu^*(A \cap F_n) = \sum_{k=1}^{n} \mu^*(A \cap E_k). \tag{1.8}$$

La propriété est vraie au rang $n = 1$ et si l'on suppose qu'elle est vraie au rang n. Puisque $F_n \in \mathcal{M}(\mu^*)$ est une réunion finie des éléments dans $\mathcal{M}(\mu^*)$, on teste sa mesurbilité par $A \cap F_{n+1}$,

$$\mu^*(A \cap F_{n+1}) = \mu^*(A \cap F_{n+1} \cap F_n) + \mu^*(A \cap F_{n+1} \cap F_n^c), \tag{1.9}$$

d'autre part le fait que $F_{n+1} \cap F_n = F_n$ et $F_{n+1} \cap F_n^c = E_{n+1}$, l'égalité (1.9) donne

$$\begin{aligned} \mu^*(A \cap F_{n+1}) &= \mu^*(A \cap F_n) + \mu^*(A \cap E_{n+1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mu^*(A \cap E_k) + \mu^*(A \cap E_{n+1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \mu^*(A \cap E_k). \end{aligned}$$

Maintenant si on pose $F = \bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k$ on a $A \cap F \supset A \cap F_n$ pour tout $n \geqslant 1$. Donc d'aprés la monotonie de la mesure extérieure et (1.8) on a

$$\mu^*(A \cap F) \geq \mu^*(A \cap F_n) = \sum_{k=1}^{n} \mu^*(A \cap E_k)$$

En prenant la limite lorsque n tend vers $+\infty$, on trouve

$$\mu^*(A \cap F) \geq \sum_{k=1}^{+\infty} \mu^*(A \cap E_k)$$

Inversement, par (iii) de la Définition 1.4.6,

$$\mu^*(A \cap F) = \mu^* \left[\bigcup_{k=1}^{+\infty} (A \cap E_k) \right] \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \mu^*(A \cap E_k),$$

d'où pour tout partie $A \subset X$,

$$\mu^*(A \cap F) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu^*(A \cap E_k). \tag{1.10}$$

On a $F_n^c \supset F^c$ pour tout $n \geqslant 1$ et

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &= \mu^*(A \cap F_n) + \mu^*(A \cap F_n^c) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mu^*(A \cap E_k) + \mu^*(A \cap F_n^c) \\ &\geq \sum_{k=1}^{n} \mu^*(A \cap E_k) + \mu^*(A \cap F^c), \end{aligned}$$

par le passage à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ et par (1.10),

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap F) + \mu^*(A \cap F^c)$$

donc $F = \bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k \in \mathcal{M}(\mu^*)$.

La σ-additivité de μ^* sur $\mathcal{M}(\mu^*)$ résulte de la formule (1.10) en prenant pour ensemble test $A = X$. ■

1.5 Mesure de Lebesgue sur la tribu des boréliens.

Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$

Théorème 1.5.1 *Il existe une unique mesure positive sur* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$*, notée* λ*, telle que*

$$\lambda(]a,b[) = b - a$$

pour tout $a, b \in \mathbb{R}$*,* $a < b$*.*

On l'appelle la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$

Remarques 1.5.2 *1) Il est clair que la mesure* λ *est* σ*-finie puisque*

$$\lambda([-n,n]) = 2n < +\infty \quad et \quad \mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} [-n,n]$$

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ *on a* $\lambda(\{x\}) = 0$ *et par conséquent*

$$\lambda(]a,b[) = \lambda(]a,b]) = \lambda([a,b[) = \lambda([a,b]) = b - a.$$

En effet, $\{x\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty}]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[$*, donc par la continuité décroissante, (2) dans le Théorème 1.4.1, on a*

$$\lambda(\{x\}) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \lambda(]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0$$

On en déduit immédiatement que

Proposition 1.5.3 *Tout ensemble dénombrable* D *de* $\mathbb{R}$ *possède une mesure de Lebesgue nulle,* $\lambda(D) = 0$*.*

Démonstration. Puisque $D = \bigcup_{n=1, x_n \in \mathbb{R}}^{+\infty} \{x_n\}$, nous avons

$$\lambda(D) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(\{x_n\}) = 0$$

ce qui implique que $\lambda(D) = 0$. ■

La mesure de Lebesgue possède des propriétés importantes.

Proposition 1.5.4 *[?]La mesure de Lebesgue λ est invariante par translation et invariante par symétrie. C'est-à-dire pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a*

$$\lambda(\alpha + A) = \lambda(A) \quad et \quad \lambda(-A) = \lambda(A)$$

pour tout borélien A de $\mathbb{R}$, où $\alpha + A = \{a + \alpha,\ a \in A\}$ et $-A = \{-a,\ a \in A\}$.

Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^m$.

Rappelons que un pavé P de $\mathbb{R}^m$ est un produit d'intervalles bornés $P = I_1 \times ... \times I_m$, où $I_j \subset \mathbb{R}$ $(j = 1, ..., m)$ est intervalle borné. La mesure du pavé P est donnée par

$$m(P) = |I_1| \times ... \times |I_m|,$$

où $|I_j|$ est la longueur du segment I_j.

Définition 1.5.5 *Pour toute partie A de $\mathbb{R}^m$, on définit*

$$\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} m(P_i) : A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} P_i,\ P_i \text{ pavé ouvert de } \mathbb{R}^m \right\}$$

L'infimum est pris sur tous les recouvrements dénombrables de A par des pavés ouverts.

Théorème 1.5.6 *[?]On a les assertions suivantes*

i) λ^* est une mesure extérieure sur $\mathbb{R}^m$.

ii) La tribu $\mathcal{M}(\mu^*)$ contient la tribu de Borel, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$.

iii) $\lambda^*(P) = m(P)$, pour tout pavé $P \subset \mathbb{R}^m$.

Chapitre 2

Fonctions mesurables

2.1 Fonctions étagées.

Définition 2.1.1 *Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable. La fonction numérique $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite étagée si f est une combinaison linéaire finie de fonctions caractéristiques c'est-à-dire s'il existe une famille finie $(A_i)_{1 \leq i \leq n} \subset \mathcal{M}$ et un sous-ensemble fini $\{a_1, ..., a_n\}$ de $\mathbb{R}$ tels que*

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i . \chi_{A_i} \tag{2.1}$$

Autrement dit si l'image $f(X)$ de f est un sous-ensemble fini $\{a_1, ..., a_n\}$ de $\mathbb{R}$.

Remarque 2.1.2 *Si on pose $A_i = f^{-1}(\{a_i\})$ pour tout $i = 1, ..., n$ on a $X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ avec $A_i \cap A_j = \phi$ pour tout $i \neq j$. Alors toute fonction étagée f s'écrit canoniquement par (2.1) avec $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une partition de X.*

Proposition 2.1.3 *Si $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions étagées et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $f + \lambda g$, $f.g$, $\sup(f, g)$ et $\inf(f, g)$ sont des fonctions étagées.*

Démonstration. On écrit f et g sous la forme

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i . \chi_{A_i} \quad \text{et} \quad g = \sum_{j=1}^{m} b_j . \chi_{B_j} .$$

Où $n, m \in \mathbb{N}$. Comme les familles $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(B_j)_{1\leq j\leq m}$ forment des partitions de X on peut écrire

$$f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i \chi_{A_i\cap B_j} \quad \text{et} \quad g = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} b_j \chi_{A_i\cap B_j},$$

Alors on a

$$f+g = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (a_i + b_j)\chi_{A_i\cap B_j} \quad \text{et} \quad f.g = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (a_i b_j)\chi_{A_i\cap B_j},$$

et aussi

$$\sup(f,g) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \sup(a_i, b_j)\chi_{A_i\cap B_j} \quad \text{et} \quad \inf(f,g) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \inf(a_i, b_j)\chi_{A_i\cap B_j}$$

■

2.2 Fonctions mesurables.

Définition 2.2.1 *Soit $(X, \mathcal{M})$ et $(Y, \mathcal{N})$ deux espaces mesurables. L'application $f : X \longrightarrow Y$ est dite mesurable si, pour tout $B \in \mathcal{N}$, l'image réciproque*

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$$

appartient à $\mathcal{M}$.

Définition 2.2.2 *Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace probabilisable, on appelle variable aléatoire toute fonction mesurable de $(X, \mathcal{M})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.*

Exemples 2.2.3 *(1) Toute application $f : (X, \mathcal{P}(X)) \longrightarrow (Y, \mathcal{P}(Y))$ est mesurable.*
(2) Si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ sont deux tribus sur X alors l'identité sur X

$$id : (X, \mathcal{M}) \longrightarrow (X, \mathcal{M}'), \; id(x) = x$$

est mesurable si et seulement si $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$.
(3) Si $(X, \mathcal{M})$ et $(Y, \mathcal{N})$ sont deux espaces mesurables et $f : X \longrightarrow Y$ une application

constante (c-à-d. il existe $y_0 \in Y$ tel que pour tout $x \in X$ on a $f(x) = y_0$) alors f est mesurable.

(4) Une fonction étagée f est toujours mesurable.

(5) Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable et $A \in \mathcal{M}$. La fonction idicatrice χ_A de l'ensemble A est une application de X dans $\mathbb{R}$ muni de la tribi borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est mesurable si et seulement si $A \in \mathcal{M}$. Pour cette raison, les éléments de $\mathcal{M}$ sont dits ensembles mesurables.

Démonstration. On démontre seulement (4) et (5). Pour (4), en effet f est une fonction de $(X, \mathcal{M})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, alors il existe $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une patition de X et $\{a_1, ..., a_n\} \subset \mathbb{R}$ tels que $f = \sum_{i=1}^{n} a_i . \chi_{A_i}$. Pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a donc

$$f^{-1}(B) = \left(\bigcup_{i; a_i \in B} A_i \right) \in \mathcal{M}.$$

Ce qui prouve que f est mesurable.

Maitenant montrons (5), d'aprés (4) si $A \in \mathcal{M}$ la fonction étagée χ_A est mesurable. Inversement, si χ_A est mesurable, alors

$$A = (\chi_A)^{-1}(\{1\}) \in \mathcal{M}$$

car $\{1\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ comme un fermé dans $\mathbb{R}$. ■

Remarque 2.2.4 *Une application peut être mesurable par rapport à une tribu et ne pas être pour d'autres tribus. En effet, soit la tribu*

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ dénombrable ou } A^c \text{ dénombrable}\}$$

l'application identique

$$id : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

est evidement mesurable. Cependant

$$id : (\mathbb{R}, \mathcal{D}(\mathbb{R})) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

n'est pas mesurable d'aprés (2) dans l'exemple précédent car $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \nsubseteq \mathcal{D}(\mathbb{R})$ *comme* $[a,b] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *mais* $[a,b] \notin \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Proposition 2.2.5 *(Tribu image)*
Soit $(X, \mathcal{M})$ *un espace mesurable. Si* Y *est un ensemble quelconque. Alors on peut toujours munir* Y *d'une plus grande tribu* $\mathcal{N}$ *sur* Y *qui rende la fonction* $f : X \longrightarrow Y$ *mesurable.*

Démonstration. On pose

$$\mathcal{N} = \left\{ B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{M} \right\}. \tag{2.2}$$

On a directement, $\phi \in \mathcal{N}$ car $f^{-1}(\phi) = \phi \in \mathcal{M}$ et pour tout $B \in \mathcal{N}$ on a $f^{-1}(B)$ appartient à la tribu $\mathcal{M}$ ce qui donne

$$f^{-1}(B^c) = \left[f^{-1}(B)\right]^c \in \mathcal{M}.$$

Alors on a bien que $B^c \in \mathcal{N}$. Soit maintenant $(B_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{N}$ une suite de parties mesurables dans $(Y, \mathcal{N})$. Comme $f^{-1}(B_n) \in \mathcal{M}$, pour tout $n \geq 1$, on en déduit que

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} f^{-1}(B_n) \in \mathcal{M}.$$

Ceci signifier que $\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n \in \mathcal{N}$ et on conclut que $\mathcal{N}$ est une tribu sur Y.
Il est clair, par construction de la tribu $\mathcal{N}$, que la fonction $f : X \longrightarrow Y$ est mesurable. Donc il reste à montrer que $\mathcal{N}$ est la plus grande tribu qui rend f mesurable. Si $\mathcal{B}$ est une tribu sur Y telle que $f : (X, \mathcal{M}) \longrightarrow (Y, \mathcal{B})$ est mesurable, alors $\mathcal{B} \subset \mathcal{N}$ car pour tout $B \in \mathcal{B}$ on a $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$ et donc $B \in \mathcal{N}$. ■

2.3 Caractérisation de la mesurabilité et stabilité de $\mathcal{L}^0(X)$.

Proposition 2.3.1 *(Critère de mesurabilité)*
Soit f *une fonction entre deux espaces mesurables* $(X, \mathcal{M})$ *et* $(Y, \mathcal{N})$. *On suppose que*

$\mathcal{N}$ est engendrée par une famille $\mathcal{F}$ de parties de Y c'est-à-dire $\mathcal{N} = \sigma(\mathcal{F})$. Alors f est mesurable si et seulement si

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{M}, \text{ pour tout } B \in \mathcal{F} \tag{2.3}$$

Démonstration. Si la fonction f est mesurable, alors la condition (2.3) est évidente. Inversement, supposons que $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$, pour tout $B \in \mathcal{F}$ et soit $\widetilde{\mathcal{N}}$ la tribu image de $\mathcal{M}$ par f définie par (2.2). Alors $\mathcal{F} \subset \widetilde{\mathcal{N}}$ et puisque $\mathcal{N} = \sigma(\mathcal{F})$ on a $\mathcal{N} \subset \widetilde{\mathcal{N}}$, et en particulier, f est mesurable. ■

Corollaire 2.3.2 *Soient X et Y deux espaces topologiques munis de leurs tribus boréliennes. Si $f : (X, \mathcal{B}(X)) \longrightarrow (Y, \mathcal{B}((Y))$ est continue, alors elle est mesurable.*

Remarques 2.3.3 ***(Mesurabilité d'une fonction numérique)***
1) Puisque la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par la famille des intervalles de $\mathbb{R}$ de la forme $]a, +\infty[$ (voir Théorème 1.2.13), alors la fonction $f : (X, \mathcal{M}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable si et seulement si

$$f^{-1}(]a, +\infty[) \in \mathcal{M}, \text{ pour tout } a \in \mathbb{R}.$$

On note $\mathcal{L}^0(X)$ l'ensemble des fonctions $f : (X, \mathcal{M}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ numériques mesurables.

Théorème 2.3.4 *Soit $(X, \mathcal{M})$, $(Y, \mathcal{N})$ et $(Z, \mathcal{P})$ trois espaces mesurables. Si $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ sont mesurables alors $g \circ f$ est mesurable.*

Démonstration. Pour tout $B \in \mathcal{P}$, $g^{-1}(B) \in \mathcal{N}$ car g est mesurable, et donc $f^{-1}(g^{-1}(B)) \in \mathcal{M}$ puisque f est également mesurable, donc

$$(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}\left(g^{-1}(B)\right) \in \mathcal{M}.$$

ce qui prouve que $g \circ f$ est mesurable. ■

Proposition 2.3.5 *Soient* $(X, \mathcal{M})$ *un espace mesurable,* $(Y, \mathcal{T})$ *un espace topologique,* $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^0(X)$ *deux applications numériques mesurables et* $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow (Y, \mathcal{T})$ *une application continue. Alors l'application* $h : (X, \mathcal{M}) \longrightarrow (Y, \mathcal{T})$ *définie par*

$$h(x) = \Phi(f_1(x), f_2(x)), \text{ pour tout } x \in X,$$

est mesurable. Autrement dit, une combinaison continue de deux applications mesurables est mesurable.

Démonstration. On peut écrire $h = \Phi \circ F$ avec $F : (X, \mathcal{M}) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ est définie par $F(x) = (f_1(x), f_2(x))$. Comme Φ est mesurable (car continue), il suffit de montrer que F est mesurable. Si I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ on a

$$F^{-1}(I \times J) = f_1^{-1}(I) \cap f_1^{-1}(J) \in \mathcal{M}.$$

Par la Proposition 2.3.1 et comme $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ est engendrée par les rectangles de la forme $I \times J$, l'application F est mesurable. ■

Partie positive et partie négative d'une fonction numérique

A toute fonction réelle f, on peut associer deux fonctions positives, sa partie positive f_+ et sa partie négative f_-, définies respectivement par

$$f_+(x) = \sup(f(x), 0) \quad \text{et} \quad f_-(x) = \sup(-f(x), 0).$$

Les parties positive et négative sont liées à la fonction initiale par les deux relations suivantes

$$f = f_+ - f_- \quad \text{et} \quad |f| = f_+ + f_-.$$

Proposition 2.3.6 *Si* f *et* g *sont des applications numériques mesurables sur* $(X, \mathcal{M})$, *alors*

$$f + g, \quad fg, \quad \sup(f, g), \quad \inf(f, g), \quad f_+, \quad f_- \text{ et } |f|$$

sont des applications mesurables. Autrement dit, $\mathcal{L}^0(X)$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$. *Si* f *ne s'annule pas sur* X*, alors* $\frac{1}{f}$ *est mesurable.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer la Proposition 2.3.5 avec $(Y, \mathcal{T})$ =$(\mathbb{R}, |.|)$, la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$, et $\Phi(x, y) = x + y$, xy, $\sup(x, y)$ et $\inf(x, y)$
Pour l'application $g = \frac{1}{f}$, posons $Y = \mathbb{R} \backslash \{0\}$ et $\varphi : Y \longrightarrow Y$ définie par $\varphi(y) = \frac{1}{y}$. Comme f est mesurable et φ est continue alors $g = \varphi \circ f : X \longrightarrow Y$ (ou $\mathbb{R}$) est mesurable. ■

Proposition 2.3.7 *Soit $(f_n)_n$ une suite d'applications mesurables de $(X, \mathcal{M})$ dans $\left(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})\right)$. Alors les applications*

$$\sup_n f_n, \ \inf_n f_n, \ \limsup_{n \longrightarrow +\infty} f_n, \ \liminf_{n \longrightarrow +\infty} f_n : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

sont mesurables. De plus si la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers f, alors f est mesurable.

Démonstration. Soit $g = \sup_n f_n$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, si $x \in g^{-1}(]a, +\infty])$ alors il existe $m \geq 1$ tel que $f_m(x) \geq a$, donc $x \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} f_n^{-1}(]a, +\infty])$. Inversement, si $x \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} f_n^{-1}(]a, +\infty])$, il est clair que $g(x) = \sup_n f_n(x) \geq a$, d'où

$$g^{-1}(]a, +\infty]) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} f_n^{-1}(]a, +\infty]) \in \mathcal{M}$$

Ainsi, g est mesurable. Il en va de même de $\inf_n f_n = -\sup_n (-f_n)$.
Par définition on a

$$\limsup_{n \longrightarrow +\infty} f_n = \inf_{n \geq 1} \sup_{k \geq n} f_k$$
$$\liminf_{n \longrightarrow +\infty} f_n = \sup_{n \geq 1} \inf_{k \geq n} f_k$$

On est donc ramené aux résultats précédents. De plus si $(f_n)_n$ converge simplement vers f, alors

$$f = \lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n = \limsup_{n \longrightarrow +\infty} f_n = \liminf_{n \longrightarrow +\infty} f_n,$$

D'où le résultat. ■

Proposition 2.3.8 *Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable. Toute application numérique mesurable positive $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ est limite simple d'une suite croissante de fonctions $(f_n)_n$ (mesurables) étagées.*

Démonstration. Siot $n \geq 1$,Nous divisons l'intervalle $[0, n]$ en $n2^n$ partie de longueur $\frac{1}{2^n}$, $\left[0, \frac{1}{2^n}\right[$, $\left[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n}\right]$ $\left[\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}\right[\dots \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[\dots \left[\frac{n2^n-1}{2^n}, n\right[$.

On pose

$$A_{n,k} = \begin{cases} f^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[\right) & \text{si } k \in \{0, .., n2^n - 1\} \\ f^{-1}\left([n, +\infty]\right) & \text{si } k = n2^n. \end{cases}$$

■

et

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{k}{2^n} & \text{si } \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n} \\ n & \text{si } f(x) \geq n, \end{cases}$$

Donc

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{k=n2^n-1} \frac{k}{2^n} \chi_{A_{n,k}} + n\chi_{An,n2^n}$$

Alors f_n est une fonctions étagée et mesurable car $A_{n,k} \in \mathcal{M}$ (f est mesurable).

On montrer que i) la suite $(f_n)_n$ est croissante, ii) la suite $(f_n)_n$ est converge simple vers f.

i) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $x \in X$. Si $f(x) \geq n$ et donc $f_n(x) = n \leq f_{n+1}(x) = n + 1$.

Si $f(x) < n$ soit $k \in \{0, ..., n2^n - 1\}$ t.q $f(x) \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[= \left[\frac{2k}{2^{n+1}}, \frac{2(k+1)}{2^n}\right[$ on a $f_n(x) = \frac{k}{2^n} = \frac{2k}{2^{n+1}} = f_{n+1}(x)$. Si $f(x) \in \left[\frac{2k+1}{2^{n+1}}, \frac{2(k+1)}{2^n}\right[$ on a $f_n(x) = \frac{k}{2^n} < \frac{2k+1}{2^{n+1}} = f_{n+1}(x)$.

On a toujours $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$. Alors la suite $(f_n)_n$ est croissante.

ii) Soit $x \in X$. Si $f(x) < \infty$,on a alors, pour $n > f(x), |f(x) - f_n(x)| < \frac{1}{2^n}$.Donc $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

Si $f(x) = +\infty$ on a $f_n(x) = n$ pour tout $n > 0$ et donc $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

Alors la suite $(f_n)_n$ est converge simple vers f.

La proposition suivante généralise la proposition precedente au cas d'une application mesurable de signe quelconque.

Proposition 2.3.9 *Soient* $(X, \mathcal{M})$ *un espace mesurable et* $f : (X, \mathcal{M}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *une fonction mesurable. Il existe alors une suite de fonctions* $(f_n)_n$ *(mesurables) étagées convergente simplement vers* f*.*

Démonstration. Les applications f^+ et f^- sont mesurables donc la Proposition 2.3.8 donne l'existence de deux suites croissantes $(h_n)_n$ et $(g_n)_n$ des applications (mesurables) étagées telles que $h_n \longrightarrow f^+$ et $g_n \longrightarrow f^-$ simplement quand $n \longrightarrow +\infty$. On pose $f_n = h_n - g_n$, de sorte que $f_n(x) \longrightarrow f^+(x) - f^-(x) = f(x)$, quand $n \longrightarrow +\infty$, pour tout $x \in X$. D'autre part, $(f_n)_n$ est étagée (voir la Proposition 2.1.3). ■

2.4 Quelques propriétés des applications mesurables.

Proposition 2.4.1 *Soient* $f, g : (X, \mathcal{M}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *deux applications mesurables et* $a \in \mathbb{R}$*. Alors les parties suivantes*

$$(f = a) := \{x \in X : f(x) = a\}$$
$$(f = g) := \{x \in X : f(x) = g(x)\}$$
$$(f \neq g) := \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$$
$$(f > g) := \{x \in X : f(x) > g(x)\}$$

sont mesurables, c-à-d appartiennent à $\mathcal{M}$*.*

Démonstration. On a directement

$$(f = a) = f^{-1}(\{a\}) \in \mathcal{M}$$
$$(f = g) = (f - g)^{-1}(\{0\}) \in \mathcal{M}$$
$$(f \neq g) = (f = g)^c \in \mathcal{M}$$
$$(f > g) = (f - g)^{-1}(]0, +\infty[) \in \mathcal{M}$$

■

Propriétés vraies presque partout

Définition 2.4.2 *Soit* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *un espace mesuré. Une propriétés* $p(x)$ *concernant* $x \in X$ *est dite vraie persque par tout si l'ensemble* $\{x \in X : p(x) \text{ n'est pas vraie}\}$ *est négligeable.*

Exemple 2.4.3 ***(Egalité presque partout)***
Si les fonctions $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *sont égaux presque partout, alors il existe* $A \in \mathcal{M}$ *tel que*

$$(f \neq g) \subset A \quad et \quad \mu(A) = 0$$

donc $f(x) = g(x)$ *pour tout* $x \in A^c$ *et* $\mu(A) = 0$. *On peut remarquer que si* f *et* g *sont mesurables, alors* $(f \neq g) \in \mathcal{M}$ *et donc* $f = g$ *presque partout si et seulement si* $\mu(f \neq g) = 0$.

Théorème 2.4.4 *Soient* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *un espace mesuré complet et* $f, g : (X, \mathcal{M}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *deux applications telle que* f *est mesurable et* $f = g$ *presque par tout. Alors* g *est mesurable.*

Démonstration. Il existe $A \in \mathcal{M}$ telle que $\mu(A) = 0$ et $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in A^c$. Soit $a \in \mathbb{R}$, si on pose $(g > a) = g^{-1}(]a, +\infty[)$ on a

$$\begin{aligned}
(g > a) &= (g > a) \cap (A \cup A^c) \\
&= [(g > a) \cap A] \cup [(g > a) \cap A^c] \\
&= [(g > a) \cap A] \cup [(f > a) \cap A^c] .
\end{aligned}$$

D'une part, puisque f est mesurable on a $(f > a) \cap A^c \in \mathcal{M}$ et d'autre part l'ensemble $(g > a) \cap A$ est négligeable car $(g > a) \cap A \subset A$ et $\mu(A) = 0$. Donc $(g > a) \cap A \in \mathcal{M}$ puisque la mesure μ est complète. On a alors $(g > a) \in \mathcal{M}$, d'où la mesurabilité de g. ■

Exercice corrigé 2.4.5 *Soient* $f, g, h : (\Omega, \mathcal{M}, \mu) \longrightarrow \mathbb{R}$ *trois fonctions quelconques. Montrer que si* $f = g$ *presque partout et* $g = h$ *presque partout alors,* $f = h$ *presque partout.*

Démonstration. Il existe $A, B \in \mathcal{M}$ tels que

$$(f \neq g) \subset A, \ (g \neq h) \subset B \quad \text{et} \quad \mu(A) = \mu(B) = 0.$$

Puisque $(f = g) \cap (g = h) \subset (f = h)$ on a

$$(f \neq h) \subset (f \neq g) \cup (g \neq h) \subset A \cup B$$

et on a $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B) = 0$, d'où

$$(f \neq h) \subset A \cup B \quad \text{avec} \quad \mu(A \cup B) = 0.$$

Finalement $f = h$ presque partout. ■

2.5 Convergence p.p et convergence en mesure.

Définition 2.5.1 *Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré, $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $[0, +\infty]$ une suite de fonctions et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $[0, +\infty]$ une fonction. On dit que la suite $(f_n)_n$ converge presque partout vers f sur X, s'il existe $A \subset X$ négligeable tel que pour tout $x \in A^c$, la suite $(f_n(x))_n$ converge vers $f(x)$. Dans ce cas on écrit $f_n \longrightarrow f$ p.p.*

Remarques 2.5.2 *1) Si les fonctions f_n et f sont mesurables, alors la suite $(f_n)_n$ converge presque par tout vers f si*

$$\mu\left(\left\{x \in X : \lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x) \neq f(x)\right\}\right) = 0.$$

2) La convergence simple implique la convergence presque partout car si $f_n \longrightarrow f$ simplement on a

$$\mu\left(\lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n \neq f\right) = \mu(\phi) = 0$$

Exemple 2.5.3 *Soit $X = [0, 1]$, $\mathcal{M}$ est la tribu borélienne sur $[0, 1]$ muni de la mesure de Lebesgue λ et $(f_n)_n$ la suite de fonctions définie par $f_n(x) = (-x)^n$.*
Pour tout $x \in [0, 1[$ on a $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ et

$$\lambda\left(\left\{x \in [0, 1] : \lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x) \neq 0\right\}\right) = \lambda(\{1\}) = 0.$$

Donc $f_n \longrightarrow 0$ *p.p.*

Définition 2.5.4 *Soient* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *un espace mesuré,* $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *ou* $[0, +\infty]$ *une suite de fonctions mesurables et* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *ou* $[0, +\infty]$ *une fonction mesurable. On dit que* $(f_n)_n$ *converge en mesure vers* f *si pour tout* $\varepsilon > 0$ *on a*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \mu\left(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right) = 0$$

Remarque 2.5.5 *La convergence presque partout n'entraîne pas la convergence en mesure.*

Exemple 2.5.6 *Soit* $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mu = \lambda$ *la mesure de Lebesgue et* $f_n = \chi_{[n,n+1]}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & si\ n \leq x \leq n+1 \\ 0 & si\ x < n\ ou\ x > n+1 \end{cases},$$

il existe $n_0 = [x] + 1$ *tel que pour tout* $n \geq n_0$ *on a* $f_n(x) = 0$. *Alors* $(f_n)_n$ *converge simplement vers* 0 *sur* X. *Ce qui donne* $f_n \longrightarrow 0$ *p.p.*
D'autre part si on pose $\varepsilon = 1$ *on a*

$$\lambda\left(\{x \in X : |f_n(x) - 0| \geq 1\}\right) = \lambda\left(\left\{x \in X : \chi_{[n,n+1]} \geq 1\right\}\right) = \lambda\left([n, n+1]\right) = 1 \neq 0$$

donc f_n *ne tend pas vers* 0 *en mesure.*

Proposition 2.5.7 *[?]*
Dans un espace mesuré fini, la convergence presque partout entraîne la convergence en mesure.

Exercice corrigé 2.5.8 *Soit* $X = [0, 1[$ *muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue* λ. *Soit la suite* $(f_n)_n$ *de fonctions définie par* $f_n = \chi_{[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}[}$. *Montrer que* $f_n \longrightarrow 0$ *en mesure, mais que* $(f_n)_n$ *ne converge pas vesr* 0 *presque partout.*

Démonstration. Pour tout $\alpha > 0$ on a $\{x \in X : |f_n(x) - 0| \geq \alpha\} \subset [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}[$, donc

$$\lambda(\{x \in X : |f_n(x) - 0| \geq \alpha\}) \leq \lambda\left([\frac{1}{n}, \frac{2}{n}[\right) = \frac{1}{n} \longrightarrow 0.$$

Il s'ensuit que $f_n \longrightarrow 0$ en mesure.

D'autre part $\limsup\limits_{n \longrightarrow +\infty} f_n = 1 \neq \liminf\limits_{n \longrightarrow +\infty} f_n = 0$, alors pour tout $x \in [0, 1[$, $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x) \neq 0$. D'où

$$\lambda\left(\left\{x \in X : \lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x) \neq 0\right\}\right) = \lambda([0, 1[) = 1 \neq 0,$$

et donc $(f_n)_n$ ne peut converger presque partout vers 0. ■

Proposition 2.5.9 *[?]*

Supposons que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge en mesure vers f. Alors il existe une sous-suite $(f_{n_k})_k$ de $(f_n)_n$ converge vers f presque partout.

Proposition 2.5.10 *Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré, $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $[0, +\infty]$ une suite de fonctions mesurables et $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $[0, +\infty]$ deux fonctions mesurables. Si $f_n \longrightarrow f$ en mesure et $f_n \longrightarrow g$ en mesure, alors $f = g$ presque partout. C'est-à-dire la limite est unique presque partout.*

Démonstration. Pour tout $n \geq 1$ on a $|f - g| \leq |f_n - g| + |f_n - f|$. Donc si $k \geq 1$ on obtient

$$\left(|f_n - g| \leq \frac{1}{2k}\right) \cap \left(|f_n - f| \leq \frac{1}{2k}\right) \subset \left(|f - g| \leq \frac{1}{k}\right)$$

et donc par passage au complémentaire,

$$\left(|f - g| > \frac{1}{k}\right) \subset \left(|f_n - g| > \frac{1}{2k}\right) \cup \left(|f_n - f| > \frac{1}{2k}\right)$$

et donc

$$\mu\left(|f - g| > \frac{1}{k}\right) \leq \mu\left(|f_n - g| > \frac{1}{2k}\right) + \mu\left(|f_n - f| > \frac{1}{2k}\right).$$

En faisant tendre n vers l'infini, on trouve $\mu\left(|f - g| > \frac{1}{k}\right) = 0$. Comme

$$(|f - g| \neq 0) = (|f - g| > 0) = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \left(|f - g| > \frac{1}{k}\right)$$

et donc

$$\mu\left(f\neq g\right)=\mu\left(|f-g|\neq 0\right)\leq\sum_{k=1}^{+\infty}\mu\left(|f-g|>\frac{1}{k}\right)=0$$

et en fin $f=g$ presque partout. ■

Chapitre 3

Fonctions intégrables

Dans tout ce chapitre, $(X, \mathcal{M}, \mu)$ désigne un espace mesuré. Dans la suite on étudier l'intégrale de Lebesgue sur X par rapport à la mesure μ.

3.1 Intégrale d'une fonction étagée positive.

On note $\mathcal{E}_+$ l'ensemble des fonctions étagées positives mesurables de $(X, \mathcal{M})$ dans $\mathbb{R}_+$ muni de la tribu borélienne.

Définition 3.1.1 *Soit $f \in \mathcal{E}_+$, de décomposition canonique $f = \sum_{i=1}^{n} a_i.\chi_{A_i}$. On pose*

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i.\mu(A_i) \tag{3.1}$$

Cette quantité s'appelle intégrale sur X de la fonction f par rapport à la mesure μ.

L'intégrale $\int f d\mu$ est un élément de $[0, +\infty]$. .

Exemples 3.1.2 *1) Si f est une fonction constante, alors sa décomposition canonique s'écrit $f = a\chi_X$, avec $a \geq 0$. La formule (3.1) nous donne alors*

$$\int a d\mu = a.\mu(X).$$

2) Si $f = a\chi_A$ *avec* $a > 0$, $A \in \mathcal{M}$ *et* $A \neq X$, *sa décomposition canonique est* $f = a\chi_A + 0\chi_{A^c}$ *d'où*

$$\int a.\chi_A d\mu = a.\mu(A) + 0.\mu(A^c) = a.\mu(A).$$

Remarque 3.1.3 *Le cas particulier* $a = 1$, *dans 2) de l'exemple précédent est d'une grande utilité car il permet d'exprimer la mesure d'un ensemble sous la forme d'une intégrale*

$$\mu(A) = \int \chi_A d\mu, \text{ pour tout } A \in \mathcal{M} \tag{3.2}$$

Le lemme suivant sera utile pour prouver quelques propriétés de l'intégrale sur $\mathcal{E}_+$.

Lemme 3.1.4 *[?]*
L'intégrale d'une fonction étagée positive f *ne dépend pas de la décomposition choisie pour* f. *C'est-à-dire, si* $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m \in [0, +\infty[$ *et* $A_1, ..., A_n, B_1, ..., B_m \in \mathcal{M}$ *avec*

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i.\chi_{A_i} = \sum_{j=1}^{m} b_j.\chi_{B_j}.$$

Alors on a

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i.\mu(A_i) = \sum_{j=1}^{m} b_j.\mu(B_j)$$

Proposition 3.1.5 *L'intégrale sur* $\mathcal{E}_+$ *est homogène, additive et croissante, c'est-à-dire pour tout* $f, g \in \mathcal{E}_+$ *et* $\alpha > 0$,
i) $\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu$
ii) $\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$
iii) Si $f \leq g$ *alors* $\int f d\mu \leq \int g d\mu$.

Démonstration. i) Si $f = \sum_{i=1}^{n} a_i.\chi_{A_i}$ et $\alpha > 0$, alors $\alpha f = \sum_{i=1}^{n} \alpha a_i.\chi_{A_i}$ et l'homogénéité est évidente. Dans ce cas particulier, il convient de remarquer que si $\int f d\mu = +\infty$, on a encore $0 \times \int f d\mu = 0 = \int (0 \times f) d\mu$ grâce à la convention $0 \times (+\infty) = 0$.

ii) Soit $f = \sum_{i=1}^{n} a_i.\chi_{A_i}$ et $g = \sum_{j=1}^{m} b_j.\chi_{B_j}$, alors $f + g = \sum_{i=1}^{n} a_i.\chi_{A_i} + \sum_{j=1}^{m} b_j.\chi_{B_j}$ et donc

$$\int (f+g) d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i.\mu(A_i) + \sum_{j=1}^{m} b_j.\mu(B_j) = \int f d\mu + \int g d\mu$$

iii) Soit $f, g \in \mathcal{E}_+$ avec $f \leq g$ alors $g - f \in \mathcal{E}_+$ et $g = f + (g - f)$. Par ii) on a

$$\int g d\mu = \int f d\mu + \int (g-f) d\mu \geq \int f d\mu,$$

puisque $\int (g - f) d\mu \in [0, +\infty]$. ■

3.2 Intégrale d'une fonction mesurable positive, convergence monotone et lemme de Fatou.

Nous notons $\mathcal{L}_+^0$ l'ensemble des fonctions $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ mesurables positives.

Définition 3.2.1 *Pour $f \in \mathcal{L}_+^0$ on appelle intégrale sur X de f par rapport 'à μ l'élément de $[0, +\infty]$ noté $\int f d\mu$ et défini par*

$$\int f d\mu = \sup \left\{ \int s d\mu : s \in \mathcal{E}_+, \ s \leq f \right\}. \tag{3.3}$$

Pour $A \in \mathcal{M}$ on définit aussi

$$\int_A f d\mu := \int f \chi_A d\mu \tag{3.4}$$

Remarque 3.2.2 *Si $f \in \mathcal{E}_+$ les deux définitions de l'intégrale de f par (3.1) et par (3.3) coïncident. En effet, notons $\int^{etag} f d\mu$ l'intégrale de f au sens de (3.1) et $\int^{mes} f d\mu$ celle au sens de (3.3). Pour toute $s \in \mathcal{E}_+$ telle que $s \leq f$, on a l'inégalité $\int^{etag} s d\mu \leq \int^{etag} f d\mu$, en vertu du a Proposition 3.1.5. Par conséquent dans (3.3) la borne supérieure est atteinte pour $s = f$, ce qui implique $\int^{etag} f d\mu = \int^{mes} f d\mu$.*

Cette intégrale possède la propriété de la croissance.

Proposition 3.2.3 *Pour toutes $f, g \in \mathcal{L}^0_+$, si $f \leq g$ alors* $\displaystyle\int f d\mu \leq \int g d\mu$.

Démonstration. Par l'inclusion

$$\{s \in \mathcal{E}_+,\ s \leq f\} \subset \{s \in \mathcal{E}_+,\ s \leq g\}$$

et par (3.3) on trouve $\displaystyle\int f d\mu \leq \int g d\mu$. ∎

Nous donnons maintenant le premier des grands théorèmes d'interversion limite-intégrale ($\lim \displaystyle\int = \int \lim$).

Théorème 3.2.4 *(de la convergence monotone ou de Beppo-Levi)*
Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante dans $\mathcal{L}^0_+$ et soit $f = \displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n = \sup_{n\geq 1} f_n$. Alors

$$\int f d\mu = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int f_n d\mu = \sup_{n\geq 1} \int f_n d\mu$$

Démonstration. L'appartenance de f à $\mathcal{L}^0_+$ a déjà été vue (Proposition 2.3.7). Par la proposition précédente (croissance de l'intégrale), la suite $\left(\displaystyle\int f_n d\mu\right)_{n\geq 1}$ est croissante dans $[0, +\infty]$, donc convergente vers $L \in [0, +\infty]$

$$L := \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int f_n d\mu = \sup_{n\geq 1} \int f_n d\mu$$

Pour tout $n \geq 1$ on a $f_n \leq f$ et par la croissance de l'intégrale on obtient $\displaystyle\int f_n d\mu \leq \int f d\mu$, puis en prenant le supremum sur $n \geq 1$,

$$L \leq \int f d\mu.$$

Par ailleurs, soit $s \in \mathcal{E}_+$ tel que $s \leq f$ et soit $\alpha \in]0, 1[$. On définit

$$A_n = \{x \in X : f_n(x) \geq \alpha.s(x)\} \tag{3.5}$$

Comme $A_n = (f_n - \alpha.s)^{-1}([0, +\infty])$ et la fonction $x \longrightarrow f_n(x) - \alpha.s(x)$ est mesurable alors $A_n \in \mathcal{M}$ pour tout $n \geq 1$. D'autre part, la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ est croissante car si $x \in A_n$

, alors $\alpha.s(x) \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ par croissance de $(f_n)_{n\geq 1}$, donc $x \in A_{n+1}$ et aussi on a $X = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$. Grâce a la définition de A_n on peut écrire une inégalité entre des fonctions mesurables positives,

$$\alpha.s.\chi_{A_n} \leq f_n\chi_{A_n} \leq f_n.$$

On en déduit par croissance de l'intégrale et (3.4),

$$\int_{A_n} (\alpha.s)d\mu \leq \int_{A_n} f_n d\mu \leq \int f_n d\mu \tag{3.6}$$

De plus, si $s = \sum_{i=1}^{m} b_i.\chi_{B_i}$, alors $s.\chi_{A_n} = \sum_{i=1}^{m} b_i.\chi_{(B_i\cap A_n)}$ donc on a

$$\int_{A_n} sd\mu = \sum_{i=1}^{m} b_i.\mu(B_i \cap A_n). \tag{3.7}$$

Pour tout $i = 1, ..., m$, la suite $(B_i \cap A_n)_{n\geq 1}$ est croissante et

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_i \cap A_n = B_i \cap \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = B_i \cap X = B_i$$

Dans (3.7), on peut passer à la limite quand n tend vers $+\infty$, en appliquant la continuité croissante de la mesure μ (voir Théorème 1.4.1),

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_{A_n} sd\mu = \sum_{i=1}^{m} b_i.\left(\lim_{n\longrightarrow+\infty}\mu(B_i \cap A_n)\right) = \sum_{i=1}^{m} b_i\mu(B_i) = \int sd\mu.$$

Faisant tendre n vers l'infini dans (3.6) on obtient ainsi, pour tout $\alpha \in]0, 1[$ et tout $s \in \mathcal{E}_+$ avec $s \leq f$ on a

$$\alpha \int sd\mu \leq L. \tag{3.8}$$

Dans (3.8), on prend d'abord le sup sur $\alpha \in]0, 1[$, puis le sup sur $\{s \in \mathcal{E}_+,\ s \leq f\}$ et on trouve

$$\int f d\mu \leq L.$$

■

Corollaire 3.2.5 *Si* $(f_n)_{n\geq 1}$ *est décroissante dans* $\mathcal{L}^0_+$ *et si* $\int f_0 d\mu < \infty$ *alors on a*

$$\int f d\mu = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int f_n d\mu,$$

où $f = \lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n$.

Démonstration. En appliquant le théorème de Beppo-Levi à la suite $(g_n)_{n\geq 1}$ telle que $g_n = f_0 - f_n$. ■

Corollaire 3.2.6 *(homogénéité et additivité de l'intégrale dans* $\mathcal{L}^0_+$*)*
Pour toutes fonctions $f, g \in \mathcal{L}^0_+$ *et toute constante* $\alpha \in [0, +\infty[$,
i) $\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu$
ii) $\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$

Démonstration. i) Est une conséquence immédiate de la Définition 3.2.1 et de la Proposition 3.1.5 i)
ii) Il existent deux suites croissantes $(f_n)_{n\geq 1}$ et $(g_n)_{n\geq 1}$ de $\mathcal{E}_+$ telles que $f_n \longrightarrow f$ et $g_n \longrightarrow g$ simplement. La suite $(f_n + g_n)_{n\geq 1}$ est croissante dans $\mathcal{E}_+$ et converge simplement vers $f + g$. Or, pour tout $n \geq 1$,

$$\int (f_n + g_n) d\mu = \int f_n d\mu + \int g_n d\mu.$$

On obtient donc le résultat en passant à la limite grâce au théorème de Beppo-Levi. ■

Corollaire 3.2.7 *(Interversion série-intégrale dans* $\mathcal{L}^0_+$*)*
Soit $(f_k)_{k\geq 1}$ *une suite de fonctions mesurables positives. La fonction* $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k$ *est aussi dans* $\mathcal{L}^0_+$ *et*

$$\int \left(\sum_{k=1}^{+\infty} f_k \right) d\mu = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\int f_k d\mu \right) \qquad \textit{(L'égalité dans } [0, +\infty]) \tag{3.9}$$

Démonstration. Posons $S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$. Les applications $x \longmapsto S_n(x)$ sont dans $\mathcal{L}_+^0$ comme somme d'un nombre fini des applications dans $\mathcal{L}_+^0$. La suite $(S_n)_{n\geq 1}$ converge et croissante (dans $[0, +\infty]$) vers S. Pour tout $n \geq 1$ on a

$$\int S_n d\mu = \sum_{k=0}^{n} \int f_k d\mu.$$

En prenant la limite quand $n \longrightarrow +\infty$ et en utilisant le théorème de Beppo-Levi, on obtient le résultat. ■

Corollaire 3.2.8 *(Lemme de Fatou)*
Si $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite dans $\mathcal{L}_+^0$, alors

$$\liminf_{n\longrightarrow+\infty} \int f_n d\mu \geq \int \liminf_{n\longrightarrow+\infty} f_n d\mu. \tag{3.10}$$

Démonstration. Posons $g := \liminf_{n\longrightarrow+\infty} f_n$. Par définition de la limite inférieure,

$$g = \sup_{n\geq 1} \inf_{k\geq n} f_k.$$

Les fonctions $g_n := \inf_{k\geq n} f_k$ appartiennent à $\mathcal{L}_+^0$ (voir Proposition 2.3.7) et la suite $(g_n)_{n\geq 1}$ converge en croissant vers g. Par le théorème de Beppo-Levi, on a donc

$$\int g_n d\mu \longrightarrow \int g d\mu = \int \liminf_{n\longrightarrow+\infty} f_n d\mu \tag{3.11}$$

D'autre part, clairement pour tout $n \geq 1$, on a $g_n \leq f_n$ et donc

$$\int g_n d\mu \leq \int f_n d\mu, \text{ pour tout } n \geq 1. \tag{3.12}$$

Nous ne savons pas si le second membre de (3.12) a une limite quand n tend vers l'infini, mais par contre sa limite inférieure existe toujours. On peut ainsi passer à la limite inférieure dans (3.12), ce qui donne par conservation de l'inégalité large,

$$\liminf_{n\longrightarrow+\infty} \int g_n d\mu \leq \liminf_{n\longrightarrow+\infty} \int f_n d\mu \tag{3.13}$$

Par (3.11), on sait que la limite inférieure du premier membre de (3.13) est en fait une limite et vaut

$$\liminf_{n \longrightarrow +\infty} \int g_n d\mu = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int g_n d\mu = \int \liminf_{n \longrightarrow +\infty} f_n d\mu,$$

d'ou la conclusion. ■

Lemme 3.2.9 *[?]*

Soit $f \in \mathcal{L}_+^0$ et $A \in \mathcal{M}$ avec $\mu(A) = 0$. Alors $\int_A f d\mu = 0$

Proposition 3.2.10 *(Quelques propriétés de l'intégrale)*

Soit $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ une fonction mesurable positive.

1) (Inégalité de Tchebychev). Pour tout nombre réel $a > 0$ on a

$$\mu(\{x \in X : f(x) \geq a\}) \leq \frac{1}{a} \int f d\mu \tag{3.14}$$

2) $\int f d\mu = 0$ si et seulement si $f = 0$ presque partout.

3) Si $\int f d\mu < \infty$ alors $f < \infty$ presque partout.

4) Si $f, g \in \mathcal{L}_+^0$ telles que $f = g$ presque partout. Alors $\int f d\mu = \int g d\mu$.

Démonstration. 1) Considérons l'ensemble

$$A = \{x \in X : f(x) \geq a\} = f^{-1}([a, +\infty]) \in \mathcal{M}.$$

On remarque que la fonction étagée $a.\chi_A$ vérifie l'inégalité $\varphi = a.\chi_A \leq f$, en effet, si $x \in A$ on a $f(x) \geq a = \varphi(x)$ et si $x \notin A$ on a $\varphi(x) = 0 \leq f(x)$. Il résulte que

$$a.\mu(A) = \int \varphi d\mu \leq \int f d\mu.$$

2) Si $f = 0$ presque partout, alors $\mu(A) = 0$ avec $A = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$ (donc $f(x) = 0$ pour tout $x \in A^c$). Par l'additivité de l'intégrale et le Lemme 3.2.9, on peut écrire

$$\begin{aligned} \int f d\mu &= \int f \chi_X d\mu = \int f(\chi_A + \chi_{A^c}) d\mu = \int f \chi_A d\mu + \int f \chi_{A^c} d\mu \\ &= \int_A f d\mu + \int_{A^c} f d\mu = 0 + \int_{A^c} 0 d\mu = 0. \end{aligned}$$

Inversement, supposons que $\int f d\mu = 0$. Pour tout $n \geq 1$ on pose

$$A_n = \left\{ x \in X : f(x) \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

Alors $A_n \in \mathcal{M}$ pour tout $n \geq 1$ car $A_n = f^{-1}\left(\left[\frac{1}{n}, +\infty\right]\right)$, la suite $(A_n)_{n \geq 1}$ est croissante et on a

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \{x \in X : f(x) > 0\} = \{x \in X : f(x) \neq 0\}.$$

Par ailleurs, par 1), pour tout $n \geq 1$ on a

$$\mu(A_n) \leq n \int f d\mu = 0.$$

Ainsi, par la continuité croissante (voir Théorème 1.4.1), on en déduit que

$$\mu\left(\{x \in X : f(x) \neq 0\}\right) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \mu(A_n) = 0,$$

d'où le résultat.

3) Pour tout $n \geq 1$,

$$\{x \in X : f(x) = +\infty\} \subset \{x \in X : f(x) \geq n\}.$$

Si l'intégrale de f est finie, on applique l'inégalité de Tchebychev avec $a = n \geq 1$ pour obtenir

$$\mu\{x \in X : f(x) = +\infty\} \leq \mu\{x \in X : f(x) \geq n\} \leq \frac{1}{n} \int f d\mu \longrightarrow 0.$$

Donc $\mu\{x \in X : f(x) = +\infty\} = 0$.

4) Soit $A = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$. On a $\mu(A) = 0$. II en résulte que

$$f\chi_A = 0 \text{ presque partout} \quad \text{et} \quad g\chi_A = 0 \text{ presque partout.}$$

Comme $f\chi_{A^c} = g\chi_{A^c}$, on obtient en appliquant le Lemme 3.2.9,

$$\begin{aligned}
\int f d\mu &= \int f\chi_X d\mu = \int f(\chi_A + \chi_{A^c}) d\mu = \int f\chi_A d\mu + \int f\chi_{A^c} d\mu \\
&= \int f\chi_{A^c} d\mu = \int g\chi_{A^c} d\mu = \int g\chi_A d\mu + \int g\chi_{A^c} d\mu \\
&= \int g(\chi_A + \chi_{A^c}) d\mu = \int g d\mu.
\end{aligned}$$

■

3.3 Application : Mesures à densité par rapport à une autre mesure

A partir d'une mesure et d'une fonction mesurable positive, on peut définir une autre mesure de la manière suivante.

Théorème 3.3.1 *Soient* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *un espace mesuré et* $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ *une fonction numérique mesurable positive. Définissons la fonction d'ensembles* $\nu : \mathcal{M} \longrightarrow [0, +\infty]$ *par*

$$\nu(A) := \int_A f d\mu, \;\; A \in \mathcal{M} \tag{3.15}$$

Alors, ν *est une mesure sur* $(X, \mathcal{M})$*. On dit qu'elle est de densité* f *par rapport à* μ*.*

Démonstration. Calculons $\nu(\phi)$ en appliquant la définition de ν,

$$\nu(\phi) = \int_\phi f d\mu = \int f\chi_\phi d\mu = \int 0 d\mu = 0.$$

Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite dans $\mathcal{M}$, à termes deux à deux disjoints et A sa réunion. D'après Proposition **??** on a

$$\chi_A = \sum_{n=1}^{+\infty} \chi_{A_n}.$$

Par le Corollaire 3.2.7 on obtient

$$\begin{aligned} \nu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) &= \int f\chi_A d\mu = \int \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f\chi_{A_n}\right) d\mu \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int f\chi_{A_n} d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \nu(A_n). \end{aligned}$$

■

Exercice corrigé 3.3.2 *(Intégration par rapport à la mesure de comptage et de Dirac)*

1) Considérons $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ *muni de la mesure de comptage* μ *et la fonction mesurable* $f : \mathbb{N} \longrightarrow [0, +\infty]$. *Calculer l'intégrale* $\int f d\mu$.

2) Considérons l'espace mesurable $(X, \mathcal{P}(X))$ *muni de la mesure de Dirac* δ_a *en point* $a \in X$ *et la fonction mesurable* $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$. *Calculer l'intégrale* $\int f d\delta_a$.

Démonstration. 1) Puisque $\mathbb{N} = \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} \{n\}$, si ν est la mesure de densité f par rapport à μ, on a

$$\int f d\mu = \nu\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \{n\}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\{n\}} f d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n).$$

2) Puisque $\delta_a(\{a\}) = 1$ et $\delta_a(\{a\}^c) = 0$, on a

$$\int f d\delta_a = \int_{\{a\} \cup \{a\}^c} f d\delta_a = \int_{\{a\}} f d\delta_a + \int_{\{a\}^c} f d\delta_a = f(a) \int_{\{a\}} d\delta_a + 0 = f(a).$$

Car $\delta_a(\{a\}^c) = 0$ implique que $\int_{\{a\}^c} f d\delta_a = 0$. ■

Proposition 3.3.3 *(L'intégration par rapport à une mesure à densité)*

Soit ν *la mesure de densité* f *par rapport à* μ *sur l'espace mesurable* $(X, \mathcal{M})$. *Alors pour tout* $g \in \mathcal{L}^0_+$ *on a*

$$\int g d\nu = \int f g d\mu \tag{3.16}$$

Démonstration. On commence par vérifier (3.16) pour les fonctions indicatrices $g = \chi_A$ avec $A \in \mathcal{M}$. En effet, par (3.2) et (3.4) on a

$$\int \chi_A d\nu = \nu(A) = \int_A f d\mu = \int f \chi_A d\mu.$$

Soit maintenant $g \in \mathcal{E}_+$ une fonction étagée positive mesurable de décomposition

$$g = \sum_{i=1}^{n} a_i . \chi_{A_i}$$

En utilisant successivement la définition de $\nu(A_i)$ on en déduit

$$\int g d\nu = \sum_{i=1}^{n} a_i \nu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \int \chi_{A_i} f d\mu = \int \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i} f d\mu = \int f g d\mu$$

Soit $g \in \mathcal{L}_+^0$ quelconque. Par la Proposition 2.3.8, il existe une suite $(g_n)_n$ croissante dans $\mathcal{E}_+$, convergeant vers g. Le produit fg_n est mesurable positif. La suite $(fg_n)_n$ est croissante car f est positive et $(g_n)_n$ est croissante et aussi $(fg_n)_n$ convergeant vers fg. L'application du théorème de Beppo-Levi relativement à ν pour $(g_n)_n$ et à μ pour la suite $(fg_n)_n$ nous donne

$$\lim_{n\to+\infty} \int g_n d\nu = \int g d\nu \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \int fg_n d\mu = \int fg d\mu. \tag{3.17}$$

Comme $g_n \in \mathcal{E}_+$, elle vérifie (3.16),

$$\int g_n d\nu = \int fg_n d\mu, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{3.18}$$

Les convergences (3.17) permettent de passer à la limite dans (3.18) pour conclure que g vérifie (3.16). ■

Proposition 3.3.4 *[?]*
Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $f, g \in \mathcal{L}_+^0$ deux fonctions mesurables positives. Si ν est la mesure de densité f par rapport à' μ, alors toute autre densité g de ν est égale à f μ-presque partout dans le cas ou ν est finie. Autrement dit, si

$$\int_A f d\mu = \int_A g d\mu, \text{ pour tout } A \in \mathcal{M} \quad \text{et} \quad \int f d\mu < +\infty.$$

Alors, $f = g$ μ-presque partout.

3.4 Intégrale d'une fonction mesurable

Soit $f : (X, \mathcal{M}, \mu) \longrightarrow \mathbb{R}$ ($f \in \mathcal{L}^0$) une fonction numérique mesurable et soient f_+ et f_- les parties positive et négative de f. Puisque $f = f_+ - f_-$ et $|f| = f_+ + f_-$ on a f est mesurable si et seulement si f_+ et f_- sont mesurables.

Définition 3.4.1 *On dit que f est intégrable par rapport à μ si*

$$\int |f| \, d\mu < \infty.$$

Dans ce cas, on pose
$$\int f d\mu = \int f_+ d\mu - \int f_- d\mu \tag{3.19}$$
On notera $\mathcal{L}^1(\mu)$ *l'espace des fonctions* $f : (X, \mathcal{M}, \mu) \longrightarrow \mathbb{R}$ *intégrables.*

Remarque 3.4.2 *Si* $\int |f| \, d\mu < \infty$, *alors comme* $f_+ \leq |f|$ *et* $f_- \leq |f|$, *on a aussi*

$$\int f_+ d\mu < \infty \quad et \quad \int f_- d\mu < \infty$$

et la définition précédente fait sens.

Donnons un premier exemple de fonction intégrable.

Exercice corrigé 3.4.3 *Soit* $f : (X, \mathcal{M}, \mu) \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction mesurable. On suppose qu'il existe une partie mesurable* $A \in \mathcal{M}$ *telle que*
i) $\mu(A) < \infty$ *et* $f(x) = 0$ *pour tout* $x \notin A$
ii) Il existe un réel $C > 0$ *tel que* $|f(x)| \leq C$ *pour tout* $x \in A$.
Montrer que $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

Démonstration. De i) et ii) on déduit que

$$|f| \leq C\chi_A$$

D'où
$$\int |f| \, d\mu \leq \int C\chi_A d\mu = C\mu(A) < \infty$$
Comme f est mesurable, on en déduit que $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. ■

Proposition 3.4.4 *Soit* $f : (X, \mathcal{M}, \mu) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *une fonction numérique intégrable. Alors, l'ensemble*

$$A = \{x \in X : |f(x)| = +\infty\}$$

est négligeable.
En d'autres termes toute fonction intégrable $f : (X, \mathcal{M}, \mu) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *est égale presque partout à une fonction intégrable* $\widetilde{f} : (X, \mathcal{M}, \mu) \longrightarrow \mathbb{R}$.

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Pour tout $n \geq 1$ posons

$$A_n = \{x \in X : |f(x)| \geq n\} = |f|^{-1}([n, +\infty]) \in \mathcal{M}$$

Donc on a

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{et} \quad A_{n+1} \subset A_n, \text{ pour tout } n \geq 1$$

Et aussi la relation $\chi_{A_1} \leq |f|$ implique que

$$\mu(A_1) = \int \chi_A d\mu \leq \int |f| \, d\mu < +\infty.$$

Donc par la contonuité décroissante (Théorème 1.4.1) on obtient

$$\mu(A) = \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \mu(A_n).$$

D'après l'inégalité de Tchebychev (3.14) pour tout $n \geq 1$ on a

$$\mu(A_n) = \mu(\{x \in X : |f(x)| \geq n\}) \leq \frac{1}{n} \int |f| \, d\mu = \frac{C}{n} \longrightarrow 0$$

On en déduit que

$$\mu(A) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \mu(A_n) = 0.$$

■

Théorème 3.4.5 *Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Alors $|f| \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et on a*

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu. \tag{3.20}$$

Démonstration. Si $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, il résulte immédiatement de la Proposition 2.3.6 et la Définition 3.4.1 que $|f| \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Par ailleurs, on a

$$\left| \int f d\mu \right| = \left| \int f_+ d\mu - \int f_- d\mu \right| \leq \int f_+ d\mu + \int f_- d\mu = \int (f_+ + f_-) \, d\mu,$$

et comme $|f| = f_+ + f_-$, le théorème est démontré. ■

Proposition 3.4.6 *(Quelques propriétés)*
Pour tout $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, *on pose*

$$\|f\|_1 = \int |f| \, d\mu.$$

1) Si $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *avec* $\|f\|_1 = 0$ *alors* $f = 0$ *presque partout.*
2) Si $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, *alors* $f + g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *et* $\alpha f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Et aussi l'application* $f \longmapsto \int f d\mu$ *est une forme linéaire sur* $\mathcal{L}^1(\mu)$. *De plus,*

$$\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1 \quad et \quad \|\alpha f\|_1 = \alpha \|f\|_1$$

3) Si $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *et* $f \leq g$, *alors* $\int f d\mu \leq \int g d\mu$
4) Si $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *et* $f = g$ *presque partout, alors* $\int f d\mu = \int g d\mu$.

Démonstration. 1) Pour tout $n \geq 1$, posons

$$A_n = \left\{ x \in X : |f(x)| \geq \frac{1}{n} \right\} = |f|^{-1} \left(\left[\frac{1}{n}, +\infty \right] \right) \in \mathcal{M}$$

La suite $(A_n)_{n \geq 1}$ est croissante avec

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$$

La continuité croissante de la mesure μ (Théorème 1.4.1) donne

$$\mu(A) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \mu(A_n).$$

D'après l'inégalité de Tchebychev, pour tout $n \geq 1$ on a

$$\mu(A_n) \leq n \|f\|_1 = 0$$

Il s'ensuit que $\mu(A_n) = 0$ pour tout $n \geq 1$ et par conséquent

$$\mu(A) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \mu(A_n) = 0.$$

Ceci prouve que f est nulle presque partout.
2) $f + g$ est mesurable et $|f + g| \leq |f| + |g|$ donc on a

$$\int |f + g| \, d\mu \leq \int |f| \, d\mu + \int |g| \, d\mu < \infty.$$

Ce qui implique que $f+g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et $\|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$.

En outre,

$$(f+g)_+ - (f+g)_- = f+g = f_+ - f_- + g_+ - g_-$$

Donc

$$(f+g)_+ + f_- + g_- = f_+ + g_+ + (f+g)_-$$

Ainsi,

$$\int (f+g)_+ \, d\mu + \int f_- d\mu + \int g_- d\mu = \int f_+ d\mu + \int g_+ d\mu + \int (f+g)_- \, d\mu$$

Ce sont des intégrales finies donc

$$\begin{aligned}
\textstyle\int (f+g)\, d\mu &= \textstyle\int (f+g)_+ \, d\mu - \int (f+g)_- \, d\mu \\
&= \textstyle\int f_+ d\mu + \int g_+ d\mu - \int f_- d\mu - \int g_- d\mu \\
&= \left(\textstyle\int f_+ d\mu - \int f_- d\mu\right) + \left(g_+ d\mu - \int g_- d\mu\right) \\
&= \textstyle\int f d\mu + \int g d\mu
\end{aligned}$$

D'autre part, si $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors αf est mesurable et

$$\int |\alpha f| \, d\mu = |\alpha| \int |f| \, d\mu < \infty$$

et donc $\alpha f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et $\|\alpha f\|_1 = \alpha \|f\|_1$.

Si $\alpha \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\textstyle\int \alpha f d\mu &= \textstyle\int (\alpha f)_+ \, d\mu - \int (\alpha f)_- \, d\mu \\
&= \alpha \textstyle\int f_+ d\mu - \alpha \int f_- d\mu \\
&= \alpha \textstyle\int f d\mu
\end{aligned}$$

Si $\alpha \leq 0$,

$$\begin{aligned}
\textstyle\int \alpha f d\mu &= \textstyle\int (\alpha f)_+ \, d\mu - \int (\alpha f)_- \, d\mu \\
&= (-\alpha) \textstyle\int f_- d\mu - (-\alpha) \int f_+ d\mu \\
&= \alpha \textstyle\int f d\mu
\end{aligned}$$

3) Comme pour les fonctions mesurables positives (Proposition 3.2.3).
4) Si $f = g$ presque partout, alors $f_+ = g_+$ presque par tout et $f_- = g_-$ presque partout, d'où

$$\int f_+ d\mu = \int g_+ d\mu \quad \text{et} \quad \int f_- d\mu = \int g_- d\mu$$

en vertu du Proposition 3.2.10. Il s'ensuit que $\int f d\mu = \int g d\mu$. ■

3.5 L'espace $L^1(\mu)$ des fonctions intégrables.

Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. Considérons sur $\mathcal{L}^1(\mu)$ la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie par

$$f \mathcal{R} g \Longleftrightarrow f = g \text{ presque partout.}$$

On note $L^1(\mu)$ le quotient de $\mathcal{L}^1(\mu)$ par cette relation d'équivalence. Un élément de $L^1(\mu)$ est donc une classe d'équivalence de fonctions dans $\mathcal{L}^1(\mu)$; la classe de $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ sera notée $\dot{f} \in L^1(\mu)$

$$L^1(\mu) = \mathcal{L}^1(\mu) \backslash \mathcal{R} = \left\{ \dot{f} : f \in \mathcal{L}^1(\mu) \right\}.$$

D'après la Proposition 3.4.4, toute élément de $L^1(\mu)$ est de la forme $\dot{f}$ où $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ est une fonction numérique finie partout, c'est à dire telle que $f(x) \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in X$. On vérifie immédiatement que $L^1(\mu)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ muni de lois usuelles de classes d'équivalence.
On sait ((4) dans Proposition 3.4.6) que si $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ avec $\dot{f} = \dot{g}$, alors $\int f d\mu = \int g d\mu$. On peut donc définir l'intégrale de $\dot{f} \in L^1(\mu)$ en posant

$$\int \dot{f} d\mu = \int f d\mu \quad \text{et} \quad \left\| \dot{f} \right\|_1 = \int |f| \, d\mu$$

Proposition 3.5.1 *Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. Alors*
(i) L'application $\dot{f} \longmapsto \|f\|_1$ est une norme sur $L^1(\mu)$.
(ii) L'application $\Psi : \dot{f} \longmapsto \int f d\mu$ est une forme linéaire continue sur $L^1(\mu)$ de norme ≤ 1.

Démonstration. (i) On sait (Proposition 3.4.6) que l'application $f \longmapsto \|f\|_1$ est une semi norme sur $\mathcal{L}^1(\mu)$, alors $\dot{f} \longmapsto \|f\|_1$ est une semi norme sur $L^1(\mu)$. Maintenant, si $\left\|\dot{f}\right\|_1 = 0$, donc $f = 0$ presque partout et donc $\dot{f} = \dot{0}$.
(ii) Pour tout $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ on a

$$\left|\Psi(\dot{f})\right| = \left|\int f d\mu\right| \leq \int |f| \, d\mu = \left\|\dot{f}\right\|_1$$

Ce qui prouve que l'application linéaire Ψ est continue de norme ≤ 1. ■

Remarque 3.5.2 *Dans la pratique, on commet l'abus de langage qui consiste à notés par la même lettre la fonction $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et sa classe $\dot{f} \in L^1(\mu)$. L'intérêt est que les éléments de $\mathcal{L}^1(\mu)$ sont des fonctions (non des classes d'équivalence), mais l'intérêt de $L^1(\mu)$ est d'être' un espace vectoriel normé.*

Théorème 3.5.3 *[?]*
Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. Alors
(i) $L^1(\mu)$ est un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|_1$.
(ii) Les (classes de) fonctions étagées (simples) mesurables forment un sous espace vectoriel de $L^1(\mu)$ qui est dense dans $L^1(\mu)$ pour la norme $\|\cdot\|_1$.

Corollaire 3.5.4 *[?]*
Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. Si $(\dot{f}_n)_{n\geq 1}$ une suite de $L^1(\mu)$ qui converge vers $\dot{f} \in L^1(\mu)$ pour la norme $\|\cdot\|_1$. Alors, il existe une sous suite $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ qui converge presque partout vers f.

3.6 Théorème de convergence dominée dans $L^1(\mu)$.

Théorème 3.6.1 *Soit '$(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions numériques mesurables. On suppose que*

1) $f_n \longrightarrow f$ *presque partout*

2) Il existe une fonction fixe $g : X \longrightarrow [a, +\infty[$ *intégrable telle que*

$$|f_n| \leq g \text{ presque partout} \tag{3.21}$$

Alors, f *est intégrable et* $\|f_n - f\|_1 \longrightarrow 0$ *quand* $n \longrightarrow +\infty$.

En particulier, on a

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int f_n d\mu = \int \lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n d\mu = \int f d\mu \tag{3.22}$$

Démonstration. Tout d'abord, comme les fonctions $x \longmapsto f_n(x)$ sont mesurables et $(f_n)_n$ convergent presque par tout vers f, la fonction f est mesurable. Par (3.19) en on déduit que $|f(x)| \leq g(x)$ pour tout presque $x \in X$. Comme $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, on a

$$\int |f|\, d\mu \leq \int g d\mu < \infty,$$

et par conséquent f est intégrable.

En posant $h_n = g + f_n$ on $h \geq 0$, et elle est mesurable.D'après le lemme de Fatou on a

$$\int \liminf_{n\longrightarrow+\infty} h_n d\mu \leq \liminf_{n\longrightarrow+\infty} \int h_n d\mu = \int g d\mu + \liminf_{n\longrightarrow+\infty} \int f_n d\mu.$$

■

Or $\liminf_{n\longrightarrow+\infty} h_n = \lim_{n\longrightarrow+\infty} (g + f_n) = g + f$ p.p, ce qui implique, puisque $\int g d\mu < +\infty$,

$$\int f d\mu \leq \liminf_{n\longrightarrow+\infty} \int f_n d\mu.$$

De la même manaièaire, en considérant la fonction $h_n = g - f_n$ au lieu de $g + f_n$, on obtient,

$$-\int f d\mu \leq \liminf_{n\longrightarrow+\infty} \int (-f_n d\mu).$$

et comme $\liminf_{n\longrightarrow+\infty} (-a_n) = -\limsup_{n\longrightarrow+\infty} (a_n)$ pour tuot suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on en déduit que

$$\int f d\mu \geq \limsup_{n\longrightarrow+\infty} \int f_n d\mu.$$

Ainsi noua avons démontré :

$$\limsup_{n\longrightarrow+\infty}\int f_n d\mu \leq \int f d\mu \leq \liminf_{n\longrightarrow+\infty}\int f_n d\mu,$$

ce qui implique que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int f_n d\mu = \int \lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Ce qui achève la démonstration du théorème de convergence dominée de Lebesgue.

Corollaire 3.6.2 *Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $(\varphi_n)_n$ une suite de fonctions numériques intégrables. On suppose que la série de fonctions $\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k$ converge presque partout et que les fonctions $\left|\sum_{k=1}^{n}\varphi_k\right|$ sont majorées par une fonction intégrable indépendante de n. Alors, $\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k$ est intégrable et on a*

$$\int\left(\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k\right)d\mu = \sum_{k=1}^{\infty}\int\varphi_k d\mu \tag{3.23}$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions intégrables

$$f_n = \sum_{k=1}^{n}\varphi_k$$

qui converge presque partout vers $\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k$ et qui sont majorées en module par une fonction intégrable fixe. ■

3.7 Comparaison de l'intégrale de Lebesgue avec l'intégrale de Riemann.

Proposition 3.7.1 *[?]Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Les conditions suivantes sont équivalentes* *(i) f est Riemann intégrable sur $[a,b]$.*

(ii) f est bornée sur $[a,b]$ et l'ensemble de ses points de discontinuité est négligeable pour la mesure de Lebesgue λ.

Théorème 3.7.2 *[?]*

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction Riemann intégrable sur $[a,b]$. Alors f est Lebesgue intégrable sur $[a,b]$ et son intégrale de Lebesgue coïncide avec son intégrale de Riemann

$$\int_{[a,b]} f d\lambda = \int_a^b f(x)dx \tag{3.24}$$

Intégrales généralisées

Soit $I = (\alpha, \beta)$ un intervalle non compact de $\mathbb{R}$ (soit I n'est pas borné, soit I est borné et non fermé). Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et supposons que la restriction de f à tout intervalle compact $[a,b]$ de I est Riemann intégrable.

Définition 3.7.3 *Lorsque la limite*

$$\lim_{a \xrightarrow{>} \alpha, b \xrightarrow{<} \beta} \int_a^b f(x)dx$$

existe, on dit que l'intégrale $\int_I f(x)dx$ est convergente et on pose

$$\int_I f(x)dx = \lim_{a \xrightarrow{>} \alpha, b \xrightarrow{<} \beta} \int_a^b f(x)dx$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\int_I f(x)dx$ est divergente.

Si $\int_I |f(x)|\, dx$ est convergente, on dit que l'intégrale $\int_I f(x)dx$ est absolument convergente.

Le théorème suivant fait la lien entre convergence absolue de l'intégrale $\int_I f(x)dx$ et Lebesgue intégrabilité de f sur I.

Théorème 3.7.4 *Soit I un intervalle non compact de $\mathbb{R}$. Pour toute fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dont la restriction à tout intervalle compact $[a,b] \subset I$ est Riemann intégrable, les conditions suivantes sont équivalentes* *(i) f est Lebesgue intégrable sur I.*

(ii) L'intégrale $\int_I |f(x)|\, dx$ est convergente.

Lorsque l'une de ces conditions est réalisée, on a

$$\int_I f d\lambda = \int_I f(x)dx \tag{3.25}$$

Démonstration. (i)$\Longrightarrow$(ii). Si f est Lebesgue intégrable sur I, alors $|f|$ est aussi Lebesgue intégrable sur I et pour tout intervalle $[a, b]$ inclus dans I

$$\int_a^b |f(x)|\, dx = \int_{[a,b]} |f|\, d\lambda \leq \int_I |f|\, d\lambda < +\infty,$$

d'où il résulte que $\int_I |f(x)|\, dx < \infty$.

(ii)$\Longrightarrow$(i). Posons $I = (\alpha, \beta)$ et choisisons des suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ de points de I tels que

$(a_n)_n$ est décroissante et $a_n \longrightarrow \alpha$

$(b_n)_n$ est croissante et $b_n \longrightarrow \beta$

$a_n \leq b_n$ pour tout $n \geq 1$.

Posons $f_n = f\chi_{[a_n,b_n]}$. Comme f est Riemann intégrable sur $[a_n, b_n]$, elle est Lebesgue intégrable sur $[a_n, b_n]$ et f_n Lebesgue intégrable sur I. Les fonctions $|f_n|$ forment une suite croissante de fonctions Lebesgue intégrables sur I qui converge simplement vers $|f|$. En outre,

$$\int_I |f_n|\, d\lambda = \int_{[a_n,b_n]} |f|\, d\lambda = \int_{a_n}^{b_n} |f(x)|\, dx \leq \int_I |f(x)|\, dx < +\infty,$$

et le théorème de Beppo-Levi prouve que $|f|$ est intégrable au sens de Lebesgue sur I. Comme on a

$$|f_n| \leq |f|\,, \text{ pour tout } n \geq 1,$$

le théorème de convergence dominée de Lebesgue (Théorème 3.6.1) implique que f est Lebesgue intégrable sur I et que

$$\int_I f d\lambda = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_I f_n d\lambda = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_{a_n}^{b_n} f(x)dx = \int_I f(x)dx.$$

■

Exemple 3.7.5 *La fonction $x \longrightarrow \frac{1}{x^\alpha}$ est Lebesgue intégrable sur $[a, +\infty[$ (où $a > 0$) si et seulement si $\alpha > 1$.*

Démonstration. En effet, la relation

$$\int_a^n \frac{dx}{x^\alpha} = \varphi_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{a^{\alpha-1}}) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \ln n - \ln a & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

montre que $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.
Il s'ensuit que la fonction $x \longrightarrow \frac{1}{x^\alpha}$ est Lebesgue intégrable sur $[a, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$. Dans ce cas on a

$$\int_{[a,+\infty[} \frac{1}{x^\alpha} d\lambda(x) = \frac{1}{(\alpha-1)a^{\alpha-1}}.$$

■

3.8 Continuité et dérivabilité sous le signe $\int$

Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré, f une fonction de $X \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On désigne par f_t, f_x les applications partielles

$$x \longmapsto f_t(x) = f(x,t) \quad \text{et} \quad t \longmapsto f_x(t) = f(x,t).$$

Nous supposerons dans tout ce paragraphe que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction f_t est intégrable

$$f_t \in L^1(\mu), \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}. \tag{3.26}$$

On définit alors une fonction $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ en posant

$$F(t) = \int f_t(x) d\mu(x) = \int f(x,t) d\mu(x) \tag{3.27}$$

Dans ce qui suit, nous nous intéresserons à la continuité et dérivabilité de la fonction F.

Théorème 3.8.1 *(Continuité sous $\int$)*
Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré, et $f : X \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction vérifiant l'hypothèse (3.26) et $t_0 \in \mathbb{R}$; on suppose de plus que
(i) Pour presque partout $x \in X$, la fonction f_x est continue de la variable t au point $t_0 \in \mathbb{R}$.
(ii) Il existe $\varepsilon > 0$, et $g \in L^1(\mu)$ tels que

$$|f(x,t)| \leq g(x), \text{ pour tout } t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[.$$

Alors, la fonction $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par (3.27), est continue en t_0.

Démonstration. Il suffit de montrer que $F(t_n) \longrightarrow F(t_0)$ pour toute suite $(t_n)_n$ de $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ qui converge vers t_0. Posons

$$f_n(x) = f(x, t_n).$$

Pour presque partout $x \in X$, la fonction f_x est continue au point t_0 et donc

$$f_n(x) = f(x, t_n) = f_x(t_n) \longrightarrow f_x(t_0) = f(x, t_0),$$

quand $n \longrightarrow +\infty$. Par ailleurs,

$$|f_n(x)| = |f(x, t_n)| \leq g(x)$$

D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue (Théorème 3.6.1), on a

$$F(t_n) = \int f_n(x) d\mu(x) \longrightarrow \int f(x, t_0) d\mu(x) = F(t_0)$$

quand $n \longrightarrow +\infty$, d'où le théorème. ■

Théorème 3.8.2 *(Dérivation sous le signe $\int$)*
Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré, et $f : X \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction vérifiant l'hypothèse (3.26) et $t_0 \in \mathbb{R}$; on suppose de plus qu'il existe $\varepsilon > 0$, $A \in \mathcal{M}$ et $g \in L^1(\mu)$ tels que

(i) L'application $t \mapsto f(x,t)$ est dérivable pour tout $t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ et pour tout $x \in A^c$.

(ii) Pour tout $t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ et pour tout $x \in A^c$ on a

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) \right| \leq g(x).$$

Alors, la fonction $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par (3.27), est dérivable en t_0 et

$$F'(t_0) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) d\mu(x).$$

Démonstration. Soit $(t_n)_n$ une suite de $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ telle que $t_n \longrightarrow t_0$ lorsque et $t_n \neq t_0$ pour tout $n \geq 1$. Soit f_n définie par

$$f_n(x) = \frac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0}.$$

La suite $(f_n)_n$ est dans $L^1(\mu)$ et converge presque partout vers la fonction $x \longmapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0)$ car l'application $t \longmapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ est continue pour tout $x \in A^c$. Par ailleurs, d'après le théorème d'accroissements finis, si $x \in A^c$ et $n \geq 1$, il existe $\theta_{x,n} \in]0,1[$ tel que

$$f_n(x) = \frac{\partial f}{\partial t}\left(x, \theta_{x,n} t_0 + (1 - \theta_{x,n}) t_n\right)$$

et donc

$$|f_n(x)| \leq g(x), \text{ pour tout } x \in A^c \text{ et } n \geq 1.$$

D'après le théorème de convergence dominée (Théorème 3.6.1) (appliquée sur la suite $(f_n)_n$), la fonction $x \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ (qui est définie presque partout $x \in X$) est dans $L^1(\mu)$ et on a

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int f_n(x) d\mu(x) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) d\mu(x)$$

Ceci etant vrai pour toute suite $(t_n)_n$ dans $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ telle que $t_n \longrightarrow t_0$ lorsque et $t_n \neq t_0$ pour tout $n \geq 1$, on en déduit bien que F est dérivable en t_0 et

$$F'(t_0) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) d\mu(x).$$

■

Chapitre 4

Produit d'espaces mesurés

4.1 Produit d'espaces mesurables

Définition 4.1.1 *(Tribu produit)*
Soient $(X, \mathcal{M})$ et $(Y, \mathcal{N})$ deux espaces mesurables. Un sous ensemble de $X \times Y$ de la forme $A \times B$ avec $A \in \mathcal{M}$ et $B \in \mathcal{N}$ sera appelé un rectangle mesurable.
On désignera par $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ la tribu sur $X \times Y$ engendrée par les rectangles mesurables, c'est-à-dire.

$$\mathcal{M} \otimes \mathcal{N} = \sigma(\mathcal{M} \times \mathcal{N}) = \sigma(\{A \times B : A \in \mathcal{M},\ B \in \mathcal{N}\})$$

Proposition 4.1.2 *La tribu $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ est la plus petite tribu sur $X \times Y$ qui rende mesurable les deux projections canoniques*

$$\pi_1 : (X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}) \longrightarrow (X, \mathcal{M}),\ \pi_1(x, y) = x$$
$$\pi_2 : (X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}) \longrightarrow (Y, \mathcal{N}),\ \pi_2(x, y) = y$$

Démonstration. π_1 et π_2 sont mesurable car pour tout $A \in \mathcal{M}$ et $B \in \mathcal{N}$ on a

$$\pi_1^{-1}(A) = \{(x, y) \in X \times Y : x \in A\} = A \times Y \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$$

et aussi $\pi_2^{-1}(B) = X \times B \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$.
Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur $X \times Y$ qui rende

$$\pi_1 : (X \times Y, \mathcal{A}) \longrightarrow (X, \mathcal{M}), \ \pi_1(x,y) = x$$
$$\pi_2 : (X \times Y, \mathcal{A}) \longrightarrow (Y, \mathcal{N}), \ \pi_2(x,y) = y$$

mesurables. Pour tout $A \in \mathcal{M}$ et $B \in \mathcal{N}$,

$$A \times B = (A \times Y) \cap (X \times B) = \pi_1^{-1}(A) \cap \pi_2^{-1}(B) \in \mathcal{A}$$

ce qui signifier que $\mathcal{M} \times \mathcal{N} \subset \mathcal{A}$ donc $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N} \subset \mathcal{A}$. ■

Proposition 4.1.3 *Soient* $(X, \mathcal{M})$, $(Y_1, \mathcal{N}_1)$ *et* $(Y_2, \mathcal{N}_2)$ *trois espaces mesurables et soit l'application*

$$f = (f_1, f_2) : (X, \mathcal{M}) \longrightarrow (Y_1 \times Y_2, \mathcal{N}_1 \otimes \mathcal{N}_2).$$

Alors f *est mesurable si et seulement si* $f_1, : (X, \mathcal{M}) \longrightarrow (Y_1, \mathcal{N}_1)$ *et* $f_2, : (X, \mathcal{M}) \longrightarrow (Y_2, \mathcal{N}_2)$ *sont mesurable.*

Démonstration. Si f est mesurable, alors $f_1 = \pi_1 \circ f$ et $f_2 = \pi_2 \circ f$ le sont aussi comme composition de fonctions mesurables (voir Théorème 2.3.4). Inversement, si f_1 et f_2 sont mesurables, alors pour tout $A_1 \in \mathcal{N}_1$ et $A_2 \in \mathcal{N}_2$ on a

$$f^{-1}(A_1 \times A_2) = f_1^{-1}(A_1) \cap f_2^{-1}(A_2) \in \mathcal{M}$$

Donc puisque $\mathcal{N}_1 \otimes \mathcal{N}_2 = \sigma(\mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_2)$ et d'aprés la Proposition 2.3.1, f est mesurable. ■

Définition 4.1.4 *(Les sections)*
Pour toute partie E *de* $X \times Y$ *et tout* $x \in X$, *on pose*

$$E_x = \{y \in Y : (x,y) \in E\}$$

On dit que E_x *est la section de* E *selon* $x \in X$. *De manière analogue, on définit la section de* E *selon* $y \in Y$ *par*

$$E_y = \{x \in X : (x,y) \in E\}$$

Par exemple, si $E = A \times B$ où $A \subset X$ et $B \subset Y$, pour tout $x \in X$ on a

$$E_x = \begin{cases} \phi \text{ si } x \notin A \\ B \text{ si } x \in A \end{cases}$$

Définition 4.1.5 *Soit l'application $f : X \times Y \longrightarrow Z$. Pour $x \in X$ et $y \in Y$, on définit les applications partielles $f_x : Y \longrightarrow Z$ et $f_y : X \longrightarrow Z$ par*

$$f_x(y) = f(x,y) \quad \textit{et} \quad f_y(x) = f(x,y)$$

Une propriété importante de la tribu produit $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ est d'assurer la mesurabilité des sections et les applications partielles. Plus précisément, on a

Proposition 4.1.6 *Soient $(X, \mathcal{M})$ et $(Y, \mathcal{N})$ deux espaces mesurables.*
(i) Si $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, alors pour tout $x \in X$ et $y \in Y$ on a $E_x \in \mathcal{N}$ et $E_y \in \mathcal{M}$.
(ii) Si l'application $f : (X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable, alors les applications partielles $f_x : (Y, \mathcal{N}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et $f_y : (X, \mathcal{M}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ sont mesurables.

Démonstration. Posons

$$\mathcal{A} = \{E \subset X \times Y : E_x \in \mathcal{N} \text{ pour tout } x \in X\}$$

Comme $(X \times Y)_x = Y \in \mathcal{N}$ pour tout $x \in X$, on a $X \times Y \in \mathcal{A}$. Si $E \in \mathcal{A}$, alors pour tout $x \in X$ on a $(E^c)_x = (E_x)^c \in \mathcal{N}$ et par conséquent $E^c \in \mathcal{A}$. En fin, soit $(E_n)_{n \geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, pour tout $x \in X$ on a

$$\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n \right)_x = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (E_n)_x \in \mathcal{N},$$

et par conséquent $\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n \in \mathcal{A}$. On a ainsi montré que $\mathcal{A}$ est une tribu sur $X \times Y$. En outre, si $A \in \mathcal{M}$ et $B \in \mathcal{N}$, alors pour tout $x \in X$,

$$(A \times B)_x = \begin{cases} \phi \text{ si } x \notin A \\ B \text{ si } x \in A \end{cases}$$

de sorte que $A \times B \in \mathcal{A}$. Comme $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ est la plus petite tribu sur $X \times Y$ contenant les rectangles mesurables, on en déduit que $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N} \subset \mathcal{A}$, ce qui démontre (i).
(ii) Soit $a \in \mathbb{R}$. Comme $f : (X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable, on a $f^{-1}(]a, +\infty[) \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$. Pour tout $x \in X$, on a en vertu de (i)

$$f_x^{-1}(]a, +\infty[) = \left(f^{-1}(]a, +\infty[)\right)_x \in \mathcal{N},$$

et par conséquent $f_x : (Y, \mathcal{N}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable. ∎

4.2 Mesure produit

On veut maintenant construire une mesure sur l'espace produit $X \times Y$ où X et Y sont des espaces mesurés.

Théorème 4.2.1 *[?]*
Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ deux espaces mesurés σ-finis.
(i) Il existe une unique mesure positive, notée $\mu \otimes \nu$, sur la tribu $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ qui vérifier

$$\mu \otimes \nu(A \times B) = \mu(A).\nu(B) \tag{4.1}$$

quels que soient $A \in \mathcal{M}$ et $B \in \mathcal{N}$.
(ii) Pour tout $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, les fonctions

$$\begin{array}{lcl} (X, \mathcal{M}) \longrightarrow [0, +\infty] & \textit{et} & (Y, \mathcal{N}) \longrightarrow [0, +\infty] \\ x \longmapsto \nu(E_x) & & y \longmapsto \mu(E_y) \end{array}$$

sont mesurables de plus on a

$$\mu \otimes \nu(E) = \int_X \nu(E_x) d\mu = \int_Y \mu(E_y) d\nu. \tag{4.2}$$

Corollaire 4.2.2 *Sous les hypothèses du théorème précédent, on a*

$$\int_X \left(\int_Y \chi_E(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \mu \otimes \nu(E) = \int_Y \left(\int_X \chi_E(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y) \tag{4.3}$$

pour tout $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$.

Démonstration. Il est clair que pour tout $(x,y) \in X \times Y$ on a $\chi_{E_x} = \chi_E = \chi_{E_y}$ et par définition de l'intégrale on a

$$\nu(E_x) = \int_Y \chi_{E_x} d\nu \quad \text{et} \quad \mu(E_y) = \int_X \chi_{E_y} d\mu.$$

Alors d'aprés (4.2) on a

$$\mu \otimes \nu(E) = \int_X \nu(E_x) d\mu = \int_X \left(\int_Y \chi_E(x,y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$$

et

$$\mu \otimes \nu(E) = \int_Y \mu(E_y) d\nu = \int_Y \left(\int_X \chi_E(x,y) d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

■

Remarques 4.2.3 *1) L'hypothèse de σ-finitude est nécessaire. En effet, soit $(X, \mathcal{M}) = (Y, \mathcal{N}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $\mu = \lambda$ est la mesure de Lebesgue et ν la mesure de comptage (ν est non σ-finie d'après l'Exemple 1.3.7). Soit $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\} \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Pour tout $x \in X$ et $y \in Y$ on a $\nu(E_x) = 1$ et $\lambda(E_y) = 0$. Or*

$$\infty = \int_{\mathbb{R}} \nu(E_x) d\lambda \neq \int_{\mathbb{R}} \lambda(E_y) d\nu = 0$$

2) La mesure produit $\mu \otimes \nu$ est σ-finie sur $(X, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$. En effet, comme les espaces $(X, \mathcal{M}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ sont σ-finis, il existent $(E_n)_n \subset \mathcal{M}$ et $(G_n)_n \subset \mathcal{N}$ tels que $X = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$ et $Y = \bigcup_{n=1}^{+\infty} G_n$ avec $\mu(E_n) < \infty$ et $\nu(G_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $n, m \geq 1$, on pose $F_{n,m} = E_n \times G_m$, de sorte que

$$X \times Y = \bigcup_{n,m \geq 1}^{+\infty} F_{n,m} \quad et \quad \mu \otimes \nu(F_{n,m}) = \mu(E_n).\nu(G_m) < \infty,$$

pour tout $n, m \geq 1$. Comme $\mathbb{N}^2$ est dénombrable, on en déduit que $\mu \otimes \nu$ est σ-finie.

Exercice corrigé 4.2.4 *(Exemple de mesure produit)*

Soient μ et ν deux mesures σ-finies, non nulles, sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ tel que $\mu \otimes \nu(\Delta^c) = 0$ où $\Delta = \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe $a, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\mu = \alpha \delta_a \quad et \quad \nu = \beta \delta_a,$$

où δ_a est la mesure de Dirac en a.

Démonstration. On remarque d'abord que Δ^c est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ donc $\Delta^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. De plus on a $(\Delta^c)_y = (\Delta_y)^c = \{x\}^c$, alors par les hypothéses et Théorème 4.2.1 on a

$$\mu \otimes \nu(\Delta^c) = \int_{\mathbb{R}} \nu(\{x\}^c) d\mu = 0,$$

on déduit donc que $\nu(\{x\}^c) = 0$, pour μ-presque par tout $x \in \mathbb{R}$. Comme $\mu(\mathbb{R}) \neq 0$, il existe donc $a \in \mathbb{R}$ tel que $\nu(\{a\}^c) = 0$. Ceci donne que $\nu = \alpha\delta_a$ avec $\alpha = \nu(\{a\})$. Comme $\nu \neq 0$ on a $\alpha > 0$.

D'autre fois, grâce à le Théorème 4.2.1 on a

$$\mu \otimes \nu(\Delta^c) = \int_{\mathbb{R}} \mu(\{x\}^c) d\nu = 0$$

Comme $\nu = \alpha\delta_a$, on a donc $\mu \otimes \nu(\Delta^c) = \alpha\mu(\{a\}^c) = 0$ on déduit donc $\mu = \beta\delta_a$ avec $\beta = \mu(\{a\})$. En fin, comme $\mu \neq 0$ on a $\beta > 0$. ■

4.3 Théorèmes de Fubini et conséquences

Ces théorèmes relient l'intégrale sur la mesure produit et les intégrales itérées.

Théorème 4.3.1 *(Fubini-Tonelli)*

Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ deux espaces mesurés σ-finis et soit $f : (X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}) \longrightarrow [0, +\infty]$ une fonction mesurable positive. Alors

i) Les fonctions

$$\begin{array}{rclcrcl} (X, \mathcal{M}) & \longrightarrow & [0, +\infty] & \quad et \quad & (Y, \mathcal{N}) & \longrightarrow & [0, +\infty] \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_Y f(x, y) d\nu(y) & & y & \longmapsto & \displaystyle\int_X f(x, y) d\mu(x) \end{array}$$

sont mesurables.

ii) On a les égalités suivantes

$$\begin{aligned} \int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) &= \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) \\ &= \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y) \in [0, +\infty] \end{aligned} \tag{4.4}$$

Démonstration. Pour $f = \chi_E$, avec $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, les conclusions de i) et ii) ont été établies en ii) dans le Théorème 4.2.1 et le Corollaire 4.2.2. Pour $f : X \times Y \longrightarrow [0, +\infty]$ étagée mesurable, les résultats restent vrai par linéarité. Finalement, si $f : X \times Y \longrightarrow [0, +\infty]$ mesurable, alors par la Proposition 2.3.8 il existe une suite croissante $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions étagées positives telles que

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x, y) = f(x, y), \text{ pour tout } (x, y) \in X \times Y.$$

Par le Théorème 3.2.4 de la convergence monotone on a

$$\int_X f(x, y)d\mu(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n(x, y)d\mu(x),$$

pour tout $y \in Y$. Donc la fonction $y \longmapsto \int_X f(x, y)d\mu(x)$ est mesurable comme la limite simple d'une suite de fonctions mesurables (voir Proposition 2.3.7). Par le même raisonnement, on voit que la fonction $x \longmapsto \int_Y f(x, y)d\nu(y)$ est mesurable.
Les égalités (4.4) est vraie pour les fonctions f_n donc pour f par passage à la limite croissante en appliquant deux fois le Théorème 3.2.4 de la convergence monotone. ■

On passe maintenant au cas de fonctions réelles ou complexes.

Théorème 4.3.2 *[?](Fubini-Lebesgue)*
Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ deux espaces mesurés σ-finis et soit $f : (X\times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}) \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ une fonction intégrable, c-à-d $f \in \mathcal{L}^1(\mu \otimes \nu)$. Alors
1) $f_x \in \mathcal{L}^1(\nu)$ pour μ-presque partout $x \in X$ et $f_y \in \mathcal{L}^1(\mu)$ pour ν-presque partout $y \in Y$.
2) La fonction $x \longmapsto \int_Y f(x, y)d\nu(y)$ est dans $\mathcal{L}^1(\mu)$ et la fonction $y \longmapsto \int_X f(x, y)d\mu(x)$ est dans $\mathcal{L}^1(\nu)$.
3) On a les égalités suivantes

$$\int_{X\times Y} fd(\mu \otimes \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x, y)d\nu(y)\right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x, y)d\mu(x)\right) d\nu(y). \tag{4.5}$$

Remarque 4.3.3 *Il existe des fonctions $f : (X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}) \longrightarrow \mathbb{R}$ pour lesquelles les intégrales superposées*

$$\int_X \left(\int_Y f(x, y)d\nu(y)\right) d\mu(x), \quad \int_Y \left(\int_X f(x, y)d\mu(x)\right) d\nu(y) \tag{4.6}$$

ont un sens, mais qui ne sont pas intégrables (c-à-d $f \notin \mathcal{L}^1(\mu \otimes \nu)$) comme le montre l'exercice suivant

Exercice corrigé 4.3.4 *Considérons, sur le produit* $]0,1[\times]0,1[$ *muni de la mesure produit des mesures* λ *de Lebesgue sur* $]0,1[$*, la fonction* f *définie par*

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Montrer que les intégrales (4.6) existent mais $f \notin \mathcal{L}^1(\lambda \otimes \lambda)$.

Démonstration. Pour $0 < x < 1$ on a

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{y}{x^2+y^2} \right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}.$$

On vérifier de même que

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dx \right) dy = -\frac{\pi}{4}.$$

En effet, $f \notin \mathcal{L}^1(\lambda \otimes \lambda)$ car

$$\int_{]0,1[^2} f_+ dydx = \int_0^1 \left(\int_0^x \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{y}{x^2+y^2} \right]_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^1 \frac{1}{2x} dx = +\infty.$$

■

La forme la plus courante du Théorème de Fubini est la suivante

Théorème 4.3.5 *Soit* $f : (X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}) \longrightarrow \mathbb{C}$. *Si l'un des trois nombres*

$$\int_{X\times Y} |f|\, d(\mu \otimes \nu), \quad \int_X \left(\int_Y |f|(x,y) d\nu(y) \right) d\mu(x), \quad \int_Y \left(\int_X |f|(x,y) d\mu(x) \right) d\nu(y) \tag{4.7}$$

est fini, alors il en est de même pour les deux autres. De plus on a les égalités (4.5).

Démonstration. D'aprés le Théorème 4.3.1 de Fubini-Tonelli, les trois nombres (4.7) sont égaux. Donc si l'un est fini, $f \in \mathcal{L}^1(\mu \otimes \nu)$ et le Théorème 4.3.2 de Fubini-Lebesgue donne la conclusion. ■