A. Bendjeddou : $C_5 + C_6 + E_3$

Université Sétif-1-
Faculté des Sciences (MI)

Dimanche le : 20/05/2018
Durée : 1h 30

Examen d'Analyse II

Exercice 1 (7 Points) :

1- A l'aide de développement limité, déterminer les limites :

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) \quad , \quad \lim_{x \to \infty} \left(\cos \frac{1}{x} \right)^{x^2}$$

2- Donner un développement limité d'ordre 2 au voisinage $+\infty$ de :

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$$

Exercice 2 (5 Points) :

1- Soit, $x \in IR^+$, à l'aide des propriétés des suites géométriques, démontrer que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} e^{\frac{px}{n}} = \frac{e^x - 1}{x}$$

2- Utiliser ce résultat pour établir, pour tout nombre réel $x > 0$, la relation

$$\int_0^x e^t dt = e^x - 1$$

Exercice 3 (8 Points) :

1- Calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int \frac{1}{x^2 + x + \frac{5}{4}} dx$$

2- Résoudre l'équation différentielle (E) suivante :

$$(E): \ y' - \frac{1}{x} y = \frac{x}{x^2 + x + \frac{5}{4}} \quad , \quad x \neq 0$$

Bonne Chance

Corrigé Type Examen d' Analyse II

Exercice 1 (7 Points)

1- A l'aide de développement limité, on détermine les limites

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right) \quad , \quad \lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2}$$

a) On a

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$$ 0.5

$$\sin^2 x = x^2 - \frac{x^4}{3} + x^4\varepsilon(x)$$ 0.5

Donc

$$\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x - x^2}{x^2\sin^2 x}$$

$$= \frac{-\frac{1}{3}+\varepsilon(x)}{1-\frac{x^2}{3}+x^2\varepsilon(x)}$$ 01

Finalement

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{3}+\varepsilon(x)}{1-\frac{x^2}{3}+x^2\varepsilon(x)} = -\frac{1}{3}$$ 0.5

b) On a

$$\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2} = e^{x^2 Ln\cos\frac{1}{x}}$$ 0.5

Donc

$$Ln\left(\cos\frac{1}{x}\right) = Ln\left(1-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{x^2}\varepsilon\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$ 0.5

$$= -\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{x^2}\varepsilon\left(\frac{1}{x^2}\right)$$ 0.5

$$x^2 Ln\left(\cos\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{2}+\varepsilon\left(\frac{1}{x^2}\right)$$ 0.5

Finalement

$$\lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2} = \lim_{x\to\infty} e^{x^2 Ln\cos\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{-\frac{1}{2}+\varepsilon\left(\frac{1}{x^2}\right)} = e^{-\frac{1}{2}}$$ 0.5

2- On donne un développement limité d'ordre 2 au voisinage $+\infty$ de

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}}\sqrt{1+\frac{1}{x}}$$

On a

0.5

$$e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

0.5

$$\sqrt{1+\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Donc

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}}\sqrt{1+\frac{1}{x}} = \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}\right)\left(1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2}\right) + \frac{1}{x^2}\varepsilon\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= 1 + \frac{3}{2x} + \frac{7}{8x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

01

Exercice 2 (5 Points)

On démontre que : $\underset{n \to \infty}{Lim} \dfrac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1} e^{\frac{px}{n}} = \dfrac{e^x - 1}{x}$

On a

0.5

$$\sum_{p=0}^{n-1} e^{\frac{px}{n}} = 1 + e^{\frac{x}{n}} + \left(e^{\frac{x}{n}}\right)^2 + \ldots + \left(e^{\frac{x}{n}}\right)^{n-1}$$

01

$$= \frac{1 - \left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n}{1 - e^{\frac{x}{n}}} = \frac{1 - e^x}{1 - e^{\frac{x}{n}}} = \frac{1 - e^x}{1 - \left(1 + \frac{x}{n}\right)}$$

$$= n\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$$

0.5

Rappel : $e^{\frac{x}{n}} \approx 1 + \dfrac{x}{n}$

0.5

Finalement

$$\underset{x \to \infty}{Lim} \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1} e^{\frac{px}{n}} = \underset{x \to \infty}{Lim} \frac{1}{n}\left(n\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)\right) = \frac{e^x - 1}{x}$$

2- On utilise ce résultat pour établir le relation

$$\int_0^x e^t dt = e^x - 1$$

01

On a

$$\int_0^x e^t dt = \underset{n \to \infty}{Lim} \frac{x}{n}\sum_{p=0}^{n-1} f\left(\frac{px}{n}\right) \text{ d'où } f(t) = e^t$$

0.5

Donc

$$\int_0^x e^t dt = \underset{n \to \infty}{Lim} \frac{x}{n}\sum_{p=0}^{n-1} e^{\frac{px}{n}} = x\,\underset{n \to \infty}{Lim} \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1} e^{\frac{px}{n}}$$

$$= x\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) = e^x - 1$$

01

Exercice 3 (8 Points)

1- On calcule l'intégrale :

$$I=\int \frac{1}{x^2+x+\frac{5}{4}}\,dx=\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1}\,dx$$

1.5

On pose $t = x + \frac{1}{2}$ donc $dx = dt$ alors

$$I=\int \frac{1}{t^2+1}\,dt=Arctg\,t+C=Arctg\left(x+\frac{1}{2}\right)+C$$

1.5

2- On résout l'équation différentielle

$$(E):\ y'-\frac{1}{x}y=\frac{x}{x^2+x+\frac{5}{4}} \qquad , \qquad x\neq 0$$

a) Résolution de l'équation sans second membre (ESSM)

$$y'-\frac{1}{x}y=0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}y \Leftrightarrow \int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\Leftrightarrow Ln|y|=Ln|x|+c$$

$$\Leftrightarrow y(x)=k.x$$

1.5

En posant $k = \pm e^{C}$ (k est donc un réel quelconque non nul)

b) Par la variation de la constante on a $y(x) = k(x)\,x$ est une solution de l'équation (E).

0.5

On a $y' = k'x + k$ ce qui donne dans (E) :

$$k'x + k - \frac{1}{x}kx = \frac{x}{x^2 + x + \frac{5}{4}}$$

01

0.5

$$\Leftrightarrow k'(x) = \frac{x}{x^2 + x + \frac{5}{4}} \Leftrightarrow k(x) = \int \frac{1}{x^2 + x + \frac{5}{4}}dx$$

0.5

D'après la question (1) on

$$k(x) = \int \frac{1}{x^2 + x + \frac{5}{4}}dx = Arctg\left(x + \frac{1}{2}\right) + C$$

Finalement la solution générale de l'équation differentielle (E) est donnée par

$$y(x) = \left(Arctg\left(x + \frac{1}{2}\right) + C\right)x$$

$$= x\,Arctg\left(x + \frac{1}{2}\right) + Cx$$

01