Université Sétif1,Faculté des sciences Jeudi 24 mai 2018
Département de Mathématiques, Master 1

A.N.S et Géométrie Examen

1) Soit **S** une surface d'équation :

$$\boxed{F(x,y,z) = x(\lambda - y) + y(\lambda - z) + z(\lambda - x) - \lambda = 0}$$

i) Montrer que **S** a un centre de symétrie Ω.
ii) Ecrire l'équation de **S** sous sa forme canonique.
iii) Discuter suivant les valeurs de λ la nature de la surface **S**.

2) Soit Σ la surface d'équation :

$$\boxed{f\ (x,y,z) = x^2 - 4yz + 1 = 0}$$

a) Donner un paramètrage rationnel de Σ.
b) Donner l'équation de la normale à Σ au point $M_0 = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
c) Calculer les coefficients E, F, G au point $M_0 = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
d) Quelle est la nature de Σ.

Barème :
Exercice 1 : 10 points, 2+4+4.
Exercice 2 : 10 points, 1+4+2+3

Correction

1)

i) S a un centre de symétrie

$F(x,y,z) = xy + xz + yz - \lambda(x+y+z) + \lambda = 0$

$\nabla F(x,y,z) = (y+z-\lambda, x+z-\lambda \ \ , x+y-\lambda)$

on a trois équations :

$$\begin{cases} x+y=\lambda \\ x+z=\lambda \\ y+z=\lambda \end{cases} \Longrightarrow x=y=z=\frac{\lambda}{2}$$

Donc la surface **S** a un centre de symétrie :

$$\boxed{\Omega = \left(\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}\right)}$$

Avec : $\quad f(\Omega) = \frac{3}{4}\lambda^2 - \lambda$

ii) Forme canonique :

Matice associée à la partie quadratique de F.

$$\begin{matrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{matrix}$$

Valeurs propres : $1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$.

Ce qui donne l'expression de **S** sous sa forme canonique

$$\boxed{X^2 - \frac{Y^2}{2} - \frac{Z^2}{2} + \ f(\Omega) = 0 \Longrightarrow X^2 - \frac{Y^2}{2} - \frac{Z^2}{2} = -\frac{3}{4}\lambda^2 + \lambda}$$

iii) Nature de la surface S.

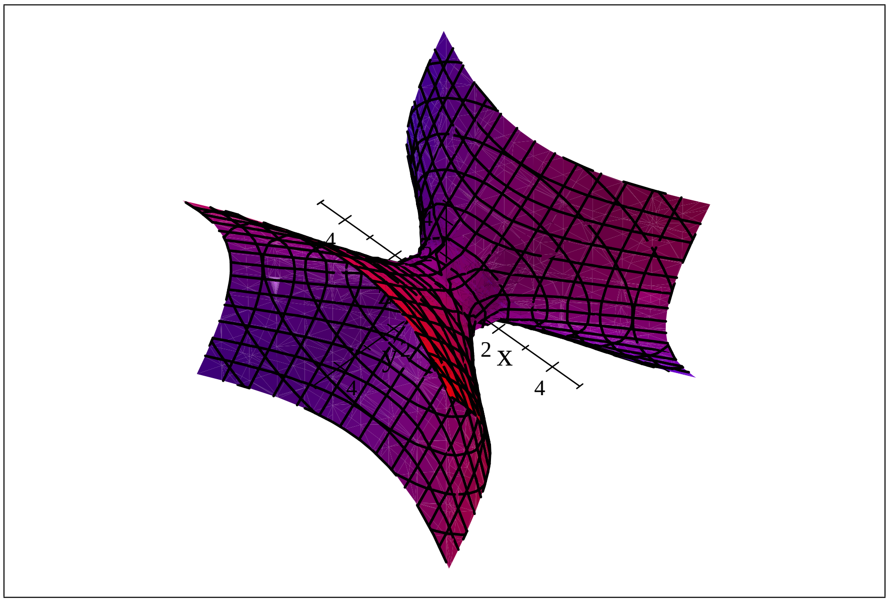
Pour $\lambda = 0, \ \lambda = \frac{4}{3}$, **on a un cône**.

Pour $\lambda \in \left]0, \frac{4}{3}\right[$, **on a une hyperboloïde H_2 a deux nappes**.

Pour $\lambda \in \left]-\infty, 0\right[\cup \left]\frac{4}{3}, +\infty\right[$, **on a une hyperboloïde H_1 a une nappe**.

Exemple : $\lambda = 2$

$$x^2 - \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{2} = -1$$



2)

a) Paramétrage :

$$M(u,v) = \begin{cases} x\,(u,v) = u \\ y\,(u,v) = v \\ z\,(u,v) = \dfrac{u^2+1}{4v} \end{cases}$$

b) $f(x,y,z) = x^2 - 4yz + 1 = 0$

$\overrightarrow{\operatorname{grad} f(x,y,z)} = \overrightarrow{\nabla} f(x,y,z) = (2x, -4z,\ -4y)$

$\Longrightarrow \quad \boxed{\nabla_{M_0} f(x,y,z) = (0,-2,-2) = \overrightarrow{N}}$

Equation de la normale Δ à au point M_0

Soit $M \in \Delta$, $\overrightarrow{M_0M} \parallel \overrightarrow{N} \Longrightarrow$

$$\overrightarrow{M_0M} = \begin{pmatrix} x \\ y+2 \\ z+2 \end{pmatrix} = \alpha\overrightarrow{N} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow$ La normale Δ a pour équation :

$$\boxed{\frac{x}{0} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z+2}{-2} = \alpha}$$

C'est la première bissectrice de yoz d'équation $\boxed{y=z}$

c) $$M(u,v) = \begin{cases} x\,(u,v) = u \\ y\,(u,v) = v \\ z\,(u,v) = \dfrac{u^2+1}{4v} \end{cases}$$

$$\frac{\partial M}{\partial u} = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ \dfrac{2u}{4v} \end{cases} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial M}{\partial v} \begin{cases} 0 \\ 1 \\ -\dfrac{u^2+1}{4v^2} \end{cases} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$E = 1,\ F = 0, G = 2.$

d) Nature de la surface ;

On peut écrire le produit $4yz$ comme suit :

$4yz = (y+z)^2 - (y-z)^2$

$\Longrightarrow \boxed{x^2 - 4yz + 1 = 0 = x^2 - (y+z)^2 + (y-z)^2 = -1}$

On pose : $x = X,\ y + z = Z,\ y - z = Y$

$\Longrightarrow \boxed{X^2 + Y^2 - Z^2 = -1}$

on a une hyperboloïde H_2 a deux nappes.