Université Sétif 1,Faculté des sciences Lundi 21 mai 2018

Département de Mathématiques, LMD 2ème année

Analyse 4   Examen

Question de cours (3pts)

Donner les conditions nécessaires d'existence d'un extremum
pour une fonction $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
Ces conditions sont-elles suffisantes ?
Justifier à l'aide d'un exemple.

Exercice1(5pts).

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\boxed{f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4 - x^3 - xy^2}{x^2+y^2}, & \text{pour } (x,y) \neq (0,0) \\ o & \text{pour } (x,y) = (0,0) \end{cases}}$$

i) Montrer que l'on a pour $(x,y) \neq (0,0)$

$$\boxed{|\ f\ (x,y)| \preceq y^2 + |x|}$$

ii) Montrer que f est continue en $(0,0)$.

iii) Calculer : $\dfrac{\partial f\,(0,0)}{\partial x}, \dfrac{\partial f\,(0,0)}{\partial y}$.

iv) Montrer que f est différentiable en $(0,0)$ et calculer $df\ (0,0)$.

Exercice 2 (6pts).

Soit l'application $f\ :\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\boxed{f(x,y) = (x-1)(y-2)(x+y-6)}$$

a. Trouver les points critiques de f

b. Est-ce que f présente un extremum **local** au point $(2,3)$?

Exercice 3 (6pts).

Soit l'intégrale curviligne

$$\boxed{\mathbf{I} = \oint_{\mathbf{C}} (2x-y)\,dx + (x+y)dy}$$

C est le cercle centré à l'origine, de rayon R, décrit
dans le sens trigonométrique.
Calculer **I** en utilisant **trois méthodes différentes**
Barème : Question de cours **3pts**, Exercice 1 : **5pts**, Exercice 2: **6pts**
Exercice 3 : **6pts**

Correction

1. i) $\left|\dfrac{y^4-x^3-xy^2}{x^2+y^2}\right| \preceq \dfrac{y^4+|x|\left(\left|x^2\right|+\left|y^2\right|\right)}{x^2+y^2}$

$$\preceq \left|y^2\right| \frac{\left|y^2\right|}{x^2+y^2} + |x| \preceq \left|y^2\right| + |x|$$

ii).**Continuité en $(\mathbf{0},\mathbf{0})$**

on a : $\boxed{\underset{(x,y)\to(0,0)}{Lim} \left|\dfrac{y^4-x^3-xy^2}{x^2+y^2}\right| \preceq \underset{(x,y)\to(0,0)}{Lim} \left(\left|y^2\right|+|x|\right) = 0 = f(0,0)}$

La fonction f est donc continue en $(0,0)$.

iii) $\dfrac{\partial\ \ f\ (0,0)}{\partial x} = \underset{x\to 0}{Lim} \dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \underset{x\to 0}{Lim} \dfrac{\left(\dfrac{-x^3}{x^2}\right)}{x} = -1$

$\dfrac{\partial\ \ f\ (0,0)}{\partial y} = \underset{y\to 0}{Lim} \dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \underset{x\to 0}{Lim} \dfrac{\left(\dfrac{y^4}{y^2}\right)}{y} = 0$

iv) f est différentiable en $(0,0)$

$f\left(h,k\right) - \ f\left(0,0\right) = \dfrac{\partial\ \ f\ (0,0)}{\partial x} h + \dfrac{\partial\ \ f\ (0,0)}{\partial y} k + \varepsilon\left(h,k\right)\sqrt{h^2+k^2}$

$\Longrightarrow\ f\left(h,k\right) = -h + \varepsilon\left(h,k\right)\sqrt{h^2+k^2}$

$\Longrightarrow \varepsilon\left(h,k\right) = \dfrac{f\left(h,k\right)+h}{\sqrt{h^2+k^2}} = \dfrac{\dfrac{k^4-h^3-hk^2}{h^2+k^2}+h}{\sqrt{h^2+k^2}} = \dfrac{k^4}{\left(h^2+k^2\right)^{\frac{3}{2}}} \preceq |k|$

$\underset{(h,k)\to(0,0)}{Lim} \varepsilon\left(h,k\right) = 0$

La fonction f est donc différentiable en $(\mathbf{0},\mathbf{0})$

avec $df(0,0) = \dfrac{\partial\ \ f\ (0,0)}{\partial x} dx + \dfrac{\partial\ \ f\ (0,0)}{\partial y} = -dx.$

2) **a**. $\boxed{f\ (x,y) = (x-1)\,(y-2)\,(x+y-6)}$

On commence par calculer les dérivées partielles d'ordre 1 en les annulant :

$$\frac{\partial\ \ f\ (x,y)}{\partial x} = (y-2)\,(2x+y-7) = 0$$

$$\frac{\partial f\ (x,y)}{\partial y} = (x-1)\,(x+2y-8) = 0$$

Ce qui donne comme possibiltés :

$y-2=0,\qquad x-1=0 \qquad \Longrightarrow (\mathbf{1},\mathbf{2})$

$y-2=0,\qquad x+2y-8=0 \qquad \Longrightarrow (\mathbf{4},\mathbf{2})$

$x-1=0,\qquad 2x+y-7=0 \qquad \Longrightarrow (\mathbf{1},\mathbf{5})$

$2x+y-7=0,\quad x+2y-8=0 \qquad \Longrightarrow (\mathbf{2},\mathbf{3})$

On a alors 4 points critiques

$$\boxed{(\mathbf{1},\mathbf{2}),\quad (\mathbf{4},\mathbf{2}),\quad (\mathbf{2},\mathbf{3}),\quad (\mathbf{1},\mathbf{5})}$$

b. **Etude au point** $(3,2)$

On calcule les dérivées partielles d'ordre 2

$r = \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 2y - 4$

$s = \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = 2x + 2y - 9$

$t = \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 2x - 2$

Au point $(\mathbf{2}, \mathbf{3})$, on a :

$$\boxed{\mathbf{r = 2, \ s = 1, \ t = 2}}$$

d'où :

$$\boxed{\mathbf{s^2 - rt = -3} < 0}$$

on a un **extremum** au point $(2,3)$

Comme $r = 2$ est positif, on a un **minimum**.

avec : $f(\mathbf{2}, \mathbf{3}) = -\mathbf{1}$

Comme : $f(0,0) = -\mathbf{12} < f(2,3) = -1$

on a seulement un **minimum local** .

Autre justification :

$f\ (x,y) = (x-1)\,(y-2)\,(x+y-6)$

$\quad = x^2y - 2x^2 + xy^2 - 9xy + 14x - y^2 + 8y - 12$

$f\ (x,0) = -2x^2 + 14x - 12 = -2\,(x-1)\,(x-6)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f\ (x,0) = -\infty < f(2,3) = -1$

on a alors un **minimum local** .

3) **Première méthode :**

On calcule directement l'intégrale.

On commence par paramétrer le chemin d'intégration

$$x = R\cos\theta, \qquad y = R\sin\theta$$

avec : $\quad dx = -R\sin\theta d\theta, \ dy = R\cos\theta d\theta$

Ce qui donne :

$\mathbf{I} = \oint\limits_C (2x - y)\,dx + (x + 2y)dy$

$= \int_0^{2\pi} -\,(2R\cos\theta - R\sin\theta)\,R\sin\theta d\theta + (R\cos\theta + R\sin\theta)\,R\cos\theta d\theta$

$= R^2 \int_0^{2\pi} \left[-\cos\theta\sin\theta + \left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right)\right] d\theta$

$= R^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - \dfrac{\sin 2\theta}{2}\right) d\theta = 2\pi R^2 + \left[\dfrac{\cos 2\theta}{4}\right]_0^{2\pi} = 2\pi R^2$

Deuxième méthode :

On décompose l'intégrale en deux .

$\mathbf{I} = \oint\limits_C 2xdx + 2ydy + \oint\limits_C xdy - ydx$

La première intégrale est nulle, on a une forme différentielle exacte à intégrer sur un chemin fermé.

La deuxième intégrale est égale à deux fois l'aire du cercle de rayon R, soit : $\mathbf{I} = 2\pi R^2$.

Troisième méthode :
On utilise la formule de **Grenn-Riemann**

$$\boxed{\oint_{C} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_{\overset{0}{C}} \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right) dxdy}$$

$$\Longrightarrow \mathbf{I} = \oint_{C} (2x - y)\, dx + (x + 2y)dy$$

on a : $P(x,y) = 2x - y,\ Q(x,y) = x + 2y$
avec $\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = 1,\ \dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} = -1$
Ce qui donne :

$$\mathbf{I} = \oint_{C} (2x - y)\, dx + (x + 2y)dy$$

$$\mathbf{I} = \iint_{\overset{0}{C}} 1 - (-1)\, dxdy$$

$$\mathbf{I} = 2 \iint_{\overset{0}{C}} dxdy = 2\pi R^2$$