Intégrales multiples

Intégrales doubles

1) Description hiérarchisée d'un compact de $\mathbb{R}^2$

Définition :

On appelle description hiérarchisée du domaine Δ un compact de $\mathbb{R}^2$ l'existence de 2 réels a et b et de 2 applications continues sur $[a;b]$ notées u et v tels que $a < b$ et $\forall x \in [a\ ;b]$ $\Longrightarrow u(x) < v(x)$ avec :

$$\forall\ x \in [a;b] \Longleftrightarrow \begin{cases} x \in [a;b] \\ y \in [u(x);v(x)] \end{cases}$$

Ce qui peut s'illustrer par la figure 1:

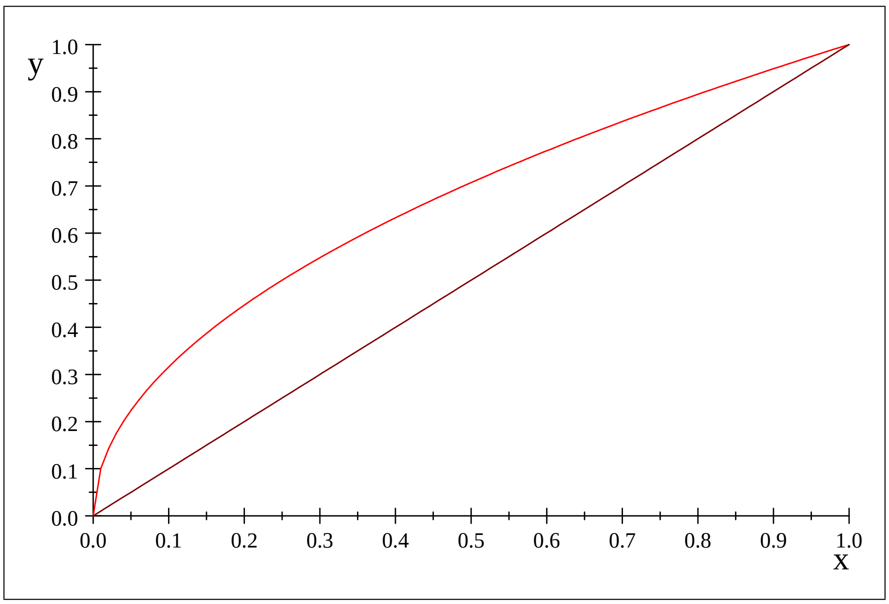


Figure 1

Avec : $\quad 0 \leq x \leq 1, \quad u(x) = x,\ v(x) = \sqrt{x}$

$$\boxed{\forall\ x \in [0;1] \Longleftrightarrow \begin{cases} x \in [0;1] \\ y \in [x;\sqrt{x}] \end{cases}}$$

2) Intégrale double de f continue sur Δ, un compact de $\mathbb{R}^2$

Définition :

f continue sur Δ, si on dispose d'une description hiérarchisée de Δ, on appelle intégrale double de f sur Δ :

$$\boxed{\iint\limits_{\Delta} f(x;y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)dy\right) dx}$$

On transforme ainsi cette intégrale double en 2 intégrales simples emboîtées.

Exemple : Sur le domaine Δ d'intégration de la figue 1, on a :

$$\boxed{\iint\limits_{\Delta} f(x;y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt{x}} f(x,y)dy\right) dx}$$

3) Théorème de Fubini : Inversion des bornes

Théorème :

Si on a par ailleurs :

$$(x;y) \in \Delta \Longleftrightarrow \begin{cases} y \in [c;d] \\ x \in [\alpha(y);\beta(y) \end{cases} \quad]$$

avec $c < d$ et $\forall\ y \in [c;d],\ \ \alpha(y) < \beta(y$ alors:

$$\boxed{\iint\limits_{\Delta} f(x;y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)dy\right) dx = \int_c^d \left(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx\right) dy}$$

On peut ainsi changer l'ordre d'intégration, le calcul est différent mais le résultat est le même.

4) Changement de variables

Théorème :Soit $(u,v) \in D,\ (x,y) = \varphi\ \ (u,v)\ \ \in$ une bijection de classe C^1 du domaine Δ au domaine D.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \Delta & \longrightarrow & D \\ (x,y) & \longrightarrow & \varphi(u,v) = (x(u,v), y(u,v) \end{array}$$

Soit la valeur absolue du déterminant $|J_\varphi|$ de la matrice jacobienne de φ .

Alors, on a :

$$\boxed{\iint\limits_{\Delta} f(x;y)dxdy = \iint\limits_{D} f\ \ (\varphi(u,v))\ \ |J_\varphi\,(u,v)|\, dudv}$$

Avec : $$J_\varphi\,(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x\,(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial x\,(u,v)}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y\,(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial y\,(u,v)}{\partial u} \end{vmatrix}$$

Exemple : *Coordonnées polaires*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longrightarrow & \varphi\,(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}$$

En coordonnées cartésiennes, l'élément différentiel d'aire est défini par $dxdy$.

En coordonnées polaires l'élément différentiel d'aire représenté par le trapèze curviligne (en rouge sur le schéma) a une aire égale à : $rdrd\theta$

En effet le jacobien du passage en coordonnées polaires est égale à :

$$J_\varphi\,(r,\theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = rdrd\theta$$

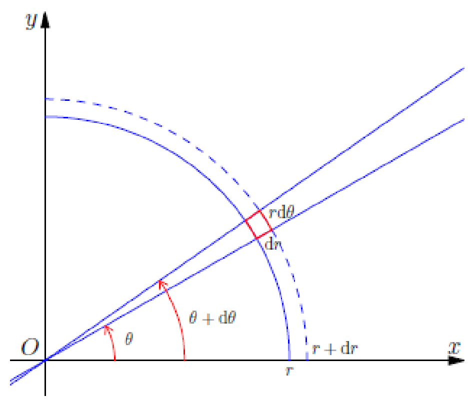


Figure 1: Figure 2

Intégrales triples

1) Description hiérarchisée d'un compact de $\mathbb{R}^3$

Définition :

Une description hiérarchisée du domaine Δ un compact de $\mathbb{R}^3$, est comme suit :

$$\forall\ (x,y,z) \in \Delta \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x \in [a;b] \\ y \in [u(x);v(x)] \\ z \in\in [\alpha\,(x,y)\,,\beta(x,y)] \end{array} \right.$$

L'intégrale triple d'une fonction continue f sur Δ est définie ainsi :

$$\boxed{\iiint\limits_{\Delta} f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} \left(\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y} f(x,y,z)dz \right) dy \right) dx}$$

Changement de variables

Avec des hypothèses équivalentes à la dimension 2

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \Delta & \longrightarrow & D \\ (x,y,z) & \longrightarrow & \varphi\,(u,v,w) = (x(u,v,w), y(u,v,w)\,, z(u,v,w)) \end{array}$$

avec : $f(x,y,z) = g(u,v,w)$

On a alors :

$$\boxed{\iiint\limits_{\Delta} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{D} g(u,v,w)\,|J_\varphi(u,v,w)|\,dudvdw}$$

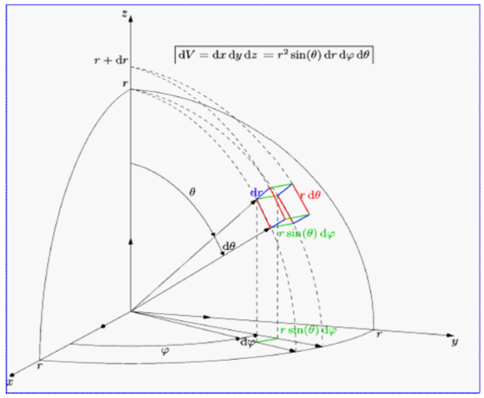
où $J_\varphi(u,v,w)$ représente le jacobien du changement de variables

Exemple : Passage en coordonnées sphériques

On a comme formules de passage :

$$\left\{ \begin{array}{c} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{array} \right.$$

La valeur du Jacobien:



$$J_\varphi(r,\theta,\varphi) = \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & -r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\theta$$

Avec comme élément différentiel volumétriques

$$\boxed{dV = dxdydz = r^2\sin\theta drd\theta d\varphi}$$

Exercices

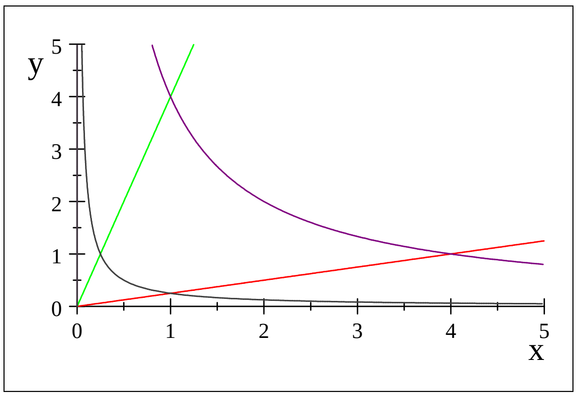
Exercice 1

Calculer l'aire du domaine Ω limité par les courbes d'équation

$$\boxed{y = 4x,\ y = \frac{x}{4},\ y = \frac{4}{x},\ \ y = \frac{1}{4x},\ x > 0}$$

en faisant le changement de variables :

$$x\left(u,v\right) = \frac{u}{v},\ y\left(u,v\right) = uv$$



Le Domaine Ω

Exercice 2

Calculer l'intégrale double :

$$\boxed{\mathbf{I} = \iint\limits_{D} \left(x+y\right)^2 e^{x^2-y^2} dxdy}$$

où le domaine d'intégration D est défini comme suit

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1\right\}$$

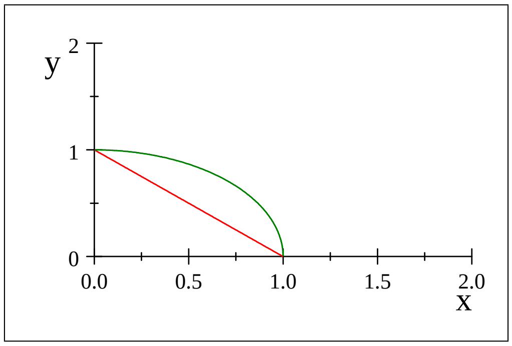
en utilisant le chagement de variables : $u = x+y,\ v = x-y$.

Exercice 3

Calculer l'intégrale double :

$$\boxed{\mathbf{J} = \iint\limits_{K} xy^2 dxdy}$$

avec $K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x+\ y \geq 1,\ x^2+y^2 \leq 1\right\}$.



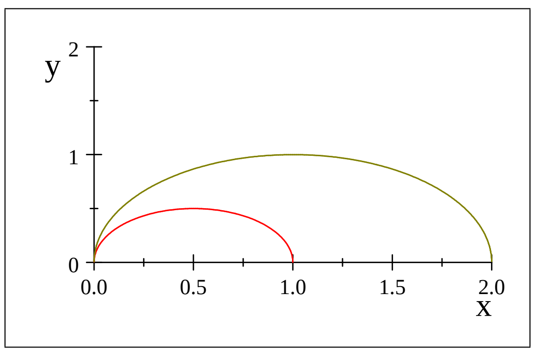
Le domaine d'intégration

Exercice 4 : Calculer l'intégrale double :

$$\boxed{\iint\limits_D \frac{x-y}{x^2+y^2}dxdy}$$

sachant que D est défini comme suit

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2+y^2-x \geq 0,\ x^2+y^2-2x \leq 0\right\}$$



Le domaine d'intégration

.
Exercice 5

Calculer l'intégrale triple de la fonction

$$f(x,y,z) = xyz$$

dans le volume limité par les plans : $\mathbf{x=0}$, $\mathbf{y=0}$, $\mathbf{z=0}$ *et* $\mathbf{x+y+z=1}$.

Exercice 6 : Calculer l'intégrale triple $\boxed{\iiint\limits_D \frac{z^3 dxdydz}{(y+z)(x+y+z)}}$

où le domaine d'intégration D est défini comme suit :

$$\boxed{D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x+y+z \leq 1\right\}}$$

en effectuant le changement de variables :

$$\boxed{\mathbf{u = x + y + z,\ v = y + z,\ w = z.}}$$

Exercice 7 : Soit : $V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ x^2+y^2+z^2 < 1,\ z > 0\right\}$

Calculer : $\iiint\limits_V z\,dx\,dy\,dz$

Correction

Exercice 1

L'aire d'un domaine plan Ω de $\mathbb{R}^2$ est défini par :

$$S = \iint\limits_{\Omega} dxdy = \frac{1}{2}\oint\limits_{\partial\Omega} xdy - ydx = \oint\limits_{\partial\Omega} xdy = -\oint\limits_{\partial\Omega} ydx$$

On va calculer l'aire de Ω sous forme d'intégrale double en utilisant le changement de variables, on a :

$$A = \iint_{\Omega} dxdy = \int\int\limits_{\mathrm{Im}(\Omega)} \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| dudv$$

avec : $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}, & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}, & \dfrac{\partial y}{\partial u} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{v}, & -\dfrac{u}{v^2} \\ v\ , & u \end{vmatrix} = \dfrac{2u}{v}$

Limites de $\mathrm{Im}(\Omega)$:

$y = 4x \Longrightarrow\ uv = \dfrac{4u}{v} \quad \Longrightarrow v^2 = 4$

$y = \dfrac{x}{4} \ \Longrightarrow\ uv = \dfrac{u}{4v} \quad \Longrightarrow v^2 = \dfrac{1}{4}$

$y = \dfrac{4}{x} \ \Longrightarrow\ uv = \dfrac{4v}{u} \quad \Longrightarrow u^2 = 4$

$y = \dfrac{1}{4x} \Longrightarrow\ uv = \dfrac{v}{4u} \quad \Longrightarrow u^2 = \dfrac{1}{4}$

Comme $x \succeq 0 \quad \Longrightarrow y \succeq 0 \ \Longrightarrow$

$$\frac{1}{2} \leq u \leq 2,\ \frac{1}{2} \leq v \leq 2$$

L'image du domaine Ω est donc un carré, ce qui donne comme intégrale double

$$\begin{aligned} A &= \int\int\limits_{\mathrm{Im}(\Omega)} \frac{2u}{v} dudv = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{2u}{v} dudv \\ &= \left[u^2\right]_{\frac{1}{2}}^{2} \left[\ln v\right]_{\frac{1}{2}}^{2} = \left(4 - \frac{1}{4}\right) 2\ln 2 = \frac{15\ln 2}{2} \end{aligned}$$

Autre Méthode : on utilise l'intégrale curviligne $\oint\limits_{\partial\Omega} xdy$ pour calculer l'aire .

On calcule les coordonnées des quatre points d'intersection

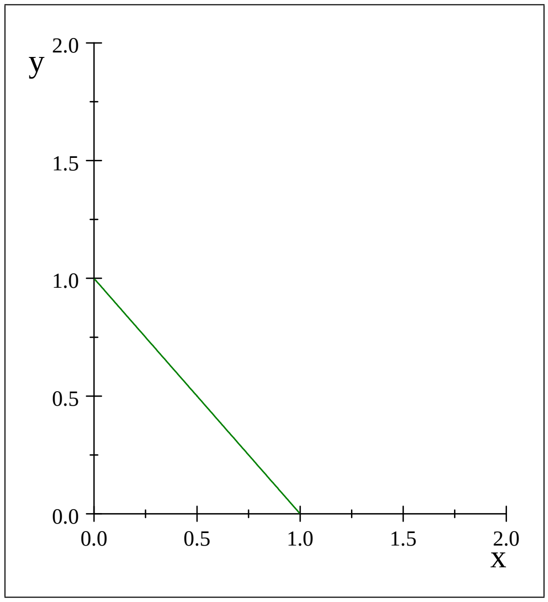
$$A = \left(1, \frac{1}{4}\right), B = (4, 1), C = (1, 4), D = \left(\frac{1}{4}, 1\right)$$

Ce qui donne : $S = \int\limits_{AB} xdy + \int\limits_{BC} xdy + \int\limits_{CD} xdy + \int\limits_{DA} xdy$

$$= \int_1^4 \frac{x}{4} dx - \int_4^1 \frac{4dx}{x} + \int_1^{\frac{1}{4}} 4xdx - \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{dx}{4x} = \frac{15}{2} \ln 2$$

Exercice 2

0.1



On commence par trouver les expressions de x et y en fonction de u et v : $u = x + y,\ v = x - y. \Longrightarrow$

$$x(u,v) = \frac{u+v}{2},\ y(u,v) = \frac{u-v}{2}$$

Sachant que : $0 \leq\ x + y \leq 1$, on obtient :

$$0 \leq u \leq 1$$

On a aussi : $x \geq 0 \Longrightarrow\ u + v \geq 0 \Longrightarrow v \geq -u$

$y \geq 0 \Longrightarrow\ u - v \geq 0 \Longrightarrow\ v \leq u$

ce qui donne :

$$-u \leq v \leq u$$

On a ainsi obtenu **la description hierarchique** du nouveau domaine d'intégration

$Im\ \ (D) = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq u \leq 1,\ -u \leq v \leq u\right\}$

Dans un changement de variables, on calcule **le jacobien**

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \neq 0$$

Ce qui donne comme nouvelle intégrale :

$$\mathbf{I} = \int_0^1 \left(u^2 \int_{-u}^{u} \frac{e^{uv}}{2} du dv \right) = \int_0^1 u^2 \left[\frac{e^{uv}}{2u} \right]_{-u}^{u} du = \int_0^1 \frac{u}{2} \left(e^{u^2} - e^{-u^2} \right) du$$
$$= \frac{1}{4} \left[e^{u^2} + e^{-u^2} \right]_0^1 = \frac{e^1 + e^{-1} - 2}{4} = \frac{\cosh\ 1 - 1}{2}$$

Exercice 3

On commence par donner la **description hierarchique** du domaine K

$K = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x +\ y \geq 1,\ x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$

$x +\ y \geq 1 \Longrightarrow (x +\ y)^2 \geq 1 \Longrightarrow x^2 + 2xy + y^2 \geq 1$

$2xy \geq 1 - x^2 - y^2 \geq 0 \Longrightarrow\ xy \geq 0$

Donc : $x \geq 0$ et $y \geq 0$ avec $y^2 \leq 1$ donc :

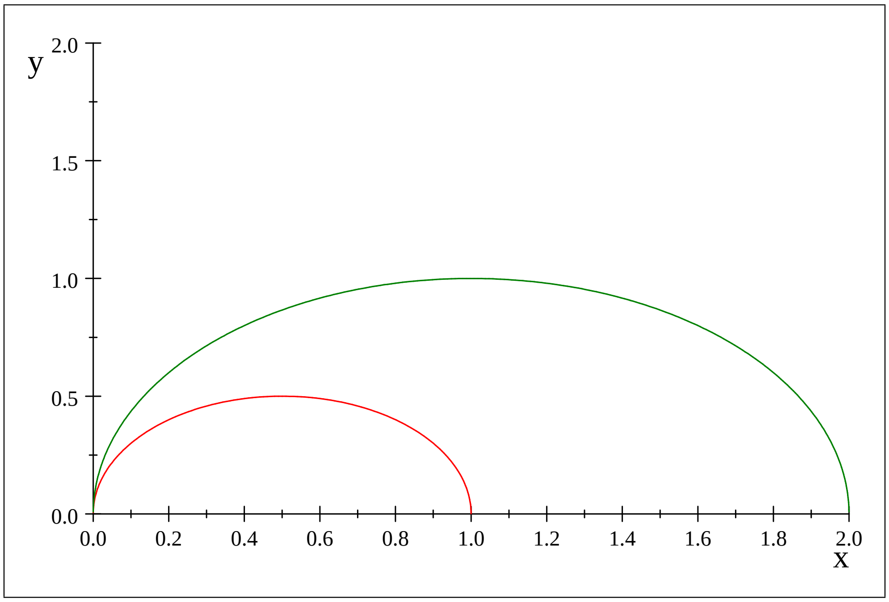
$K = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leq y \leq 1,\ 1 - y \leq x \leq \sqrt{1 - y^2} \right\}$

Ce qui donne : $\mathbf{J} = \displaystyle\int_0^1 \left(\int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} x dx \right) y^2 dy = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} y^2 dy$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1 - y^2}{2} - \frac{(1 - y)^2}{2} \right) y^2 dy$$
$$= \int_0^1 \left(y^3 - y^4 \right) dy = \frac{1}{20}$$

Exercice 4

On commence par faire un schéma du domaine d'intégration D



Ainsi le passage en coordonées polaires, permet d'avoir

une **description hierarchique** du domaine D :
$x^2 + y^2 - x \geq 0 \Longrightarrow r^2 - r\cos\theta \geq 0 \Longrightarrow r \geq \cos\theta$
$x^2 + y^2 - 2x \leq 0 \Longrightarrow r^2 - 2r\cos\theta \leq 0 \Longrightarrow r \leq 2\cos\theta$
$\Longrightarrow \quad \boxed{0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \cos\theta \leq r \leq 2\cos\theta}$
Ce qui donne :

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\cos\theta}^{2\cos\theta} \frac{r\cos\theta - r\sin\theta}{r^2} r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta - \sin\theta) \left(\int_{\cos\theta}^{2\cos\theta} dr \right) d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta - \sin\theta)\cos\theta \; d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2\theta - \cos\theta \; \sin\theta \;\right) d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2\theta - \sin 2\theta}{2} d\theta = \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} + \frac{\cos 2\theta}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$A = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

Exercice 5

$$\mathbf{V} = \iiint_V xyzdxdydz = \int_0^1 x(\int_0^{1-x} y(\int_0^{1-x-y} zdz)dy)dx = \int_0^1 x(\int_0^{1-x} \frac{y(1-x-y)^2}{2}dy)dx$$

Posons : $u = \dfrac{(1-x-y)^2}{2},\ dv = ydy$

$$du = -(1-x-y)dy, \quad v = \frac{y^2}{2}$$

On obtient : $\mathbf{V} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 x(\int_0^{1-x} y^2(1-x-y)dy$

$$u = 1-x-y),\ dv = y^2dy$$

$$du = -dy, \quad v = \frac{y^3}{3}$$

$$\mathbf{V} = \frac{1}{2}\int_0^1 x(\int_0^{1-x} \frac{y^3}{3}dy)dx = \frac{1}{24}\int_0^1 x\,(1-x)^4\,dx$$

On fait encore une intégration par parties

$$u = x,\ dv = (1-x)^4\,dx$$

$$du = dx, \quad v = -\frac{(1-x)^5}{5}$$

$$\mathbf{V} = \frac{1}{24}\int_0^1 \frac{(1-x)^5}{5}dx = \frac{1}{720}$$

Exercice 6

On commence par trouver les expressions des variables x, y, z en fonction des nouvelles variables u, v, w.

$$\begin{cases} u = x+y+z \\ v = y+z \\ w = z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = u-v \\ y = v-w \\ z = w \end{cases}$$

Le **jacobien** du changement de variables est le suivant

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Sachant que :
$0 \le x+y+z \le 1$, on obtient $0 \le u \le 1$
Avec $x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$, on a $0 \le w \le v \le u \le 1$
Ce qui donne comme nouvelle expression de l'intégrale $\mathbf{I}$

$$\mathbf{I} = \int_0^1 \left(\int_0^u \left(\int_0^v \frac{w^3}{uv}dw\right)dv\right)du$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^u \frac{v^3}{4u}dv\right)du = \int_0^1 \frac{u^3du}{16} = \frac{1}{64}$$

Exercice 7

Le domaine d'intégration est la demi-sphère centrée à l'origine
et de rayon 1, pour le calcul on utilise alors les coordonnées sphériques

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin\theta \cos\varphi \\ y &= \rho \sin\theta \sin\varphi \\ z &= \rho \cos\theta \end{aligned}$$

le jacobien du changement en coordonnées sphériques est égal à :

$$J(\rho,\theta,\varphi) = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = \rho^2\sin\theta$$

Le changement de variables donne trois intégrales séparées

$$\iiint_V z dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta d\theta$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta d\theta = \frac{\pi}{4}\left[-\frac{\cos 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$