Propriétés métriques des surfaces

Première forme fondamentale

Soit une nappe régulière définie par une paramétrisation cartésienne $M(u,v)$.

$$M(u,v) = \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

Définition : Soit T_m le plan tangent à une nappe Σ en un point M. La restriction à T_m de la forme quadratique Φ_1

$$\overrightarrow{V} \longrightarrow \left\| \overrightarrow{V} \right\|^2$$

est appelée "**première forme quadratique fondamentale"** de Σ au point M.

Expression de $\dfrac{\partial M}{\partial v}$:

La nappe Σ est définie paramétriquement par $M(u,v)$

Le plan tangent T_m a $\left(\dfrac{\partial M}{\partial u}, \dfrac{\partial M}{\partial v} \right)$ comme base locale.

Pour chaque vecteur $\overrightarrow{V}$ de T_m :

$$\overrightarrow{V} = \lambda \frac{\partial M}{\partial u} + \mu \frac{\partial M}{\partial v}$$

On a ainsi :

$$\boxed{\Phi_1^M \left(\overrightarrow{V} \right) = \left\| \overrightarrow{V} \right\|^2 = \lambda^2 \left\| \frac{\partial M}{\partial u} \right\|^2 + 2\lambda\mu \frac{\partial M}{\partial u} . \frac{\partial M}{\partial v} + \mu^2 \left\| \frac{\partial M}{\partial v} \right\|^2}$$

Notation : on note par : $E = \left\| \dfrac{\partial M}{\partial u} \right\|^2$, $F = \dfrac{\partial M}{\partial u} . \dfrac{\partial M}{\partial v}$, $G = \left\| \dfrac{\partial M}{\partial v} \right\|^2$

On écrit souvent la forme Φ_1 sous sa forme différentielle

$$\Phi_1^M (dM) = \left\| \overrightarrow{V} \right\|^2 = E \ du^2 + 2F du dv + G^2 dv^2$$

en posant :

$$dM = \frac{\partial M}{\partial u} du + \frac{\partial M}{\partial v} dv$$

Remarque : la forme quadratique

$$\boxed{E \ \lambda^2 + 2F\lambda\mu + G\mu^2}$$

est positive, elle est définie positive $\Leftrightarrow EG - F^2 \succeq 0$

ie si les vecteurs $\dfrac{\partial M}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial M}{\partial v}$ sont linéairement indépendants

$\Longrightarrow \dfrac{\partial M}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial M}{\partial v} \neq \overrightarrow{0}$

$$\boxed{\left\| \frac{\partial M}{\partial u} \wedge \frac{\partial M}{\partial v} \right\|^2 = \left\| \frac{\partial M}{\partial u} \right\|^2 \left\| \frac{\partial M}{\partial v} \right\|^2 - \left(\frac{\partial M}{\partial u} . \frac{\partial M}{\partial v} \right)^2 = EG - F^2}$$

en effet :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial M}{\partial u} \wedge \frac{\partial M}{\partial v} \right\|^2 &= \left\| \frac{\partial M}{\partial u} \right\|^2 \left\| \frac{\partial M}{\partial v} \right\|^2 \sin^2 \theta \\ &= \left\| \frac{\partial M}{\partial u} \right\|^2 \left\| \frac{\partial M}{\partial v} \right\|^2 - \left\| \frac{\partial M}{\partial u} \right\|^2 \left\| \frac{\partial M}{\partial v} \right\|^2 \cos^2 \theta \end{aligned}$$

le point M est alors régulier.
Si l'on a : $\boxed{EG - F^2 = 0}$, M est un **point stationnaire**.

Notations :

$$\begin{aligned} H &= \sqrt{EG - F^2} \\ \overrightarrow{h_m} &= \frac{1}{H} \frac{\partial M}{\partial u} \wedge \frac{\partial M}{\partial v} \quad \text{vecteur unitaire normal} \end{aligned}$$

•

Repère de Darboux

Soit $\boldsymbol{\gamma}$ un arc régulier tracé sur la nappe Σ.
Soit $\overrightarrow{\tau}$ un vecteur tangent unitaire à $\boldsymbol{\gamma}$ et $\mathbf{s}$ un paramètre normal (abscisse curviligne)
on lui associe le repère orthonormal direct

$$D = (M,\ \overrightarrow{\tau}(s),\ \overrightarrow{g}(s),\ \overrightarrow{n}(s))$$

d'origine M défini comme suit :

-i) $\overrightarrow{\tau}(s)$ vecteur tangent unitaire à $\boldsymbol{\gamma}$
-ii) $\overrightarrow{n(s)}$ vecteur unitaire normal en M à Σ $\left(\overrightarrow{n} = \overrightarrow{h_m}\right)$.

-iii) $\overrightarrow{g(s)} = \overrightarrow{n(s)} \wedge \overrightarrow{\tau(s)}$

Courbure normale, Courbure géodésique Torsion géodésique :

En dérivant les six relations :

$$\boxed{\overrightarrow{\tau}^2(s) = \overrightarrow{g}^2(s) = \overrightarrow{n}^2(s) = 1}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\tau}(s).\overrightarrow{g}(s) = \overrightarrow{g}(s).\overrightarrow{n}(s) = \overrightarrow{n}(s).\overrightarrow{\tau}(s) = 0}$$

On a :

$$\overrightarrow{\tau}.\frac{d\overrightarrow{\tau}}{ds} = \overrightarrow{g}.\frac{d\overrightarrow{g}}{ds} = \overrightarrow{n}.\frac{d\overrightarrow{n}}{ds} = 0$$

$$\overrightarrow{n}.\frac{d\overrightarrow{g}}{ds} + \overrightarrow{g}.\frac{d\overrightarrow{n}}{ds} = \overrightarrow{\tau}.\frac{d\overrightarrow{n}}{ds} + \overrightarrow{n}.\frac{d\overrightarrow{\tau}}{ds} = \overrightarrow{g}.\frac{d\overrightarrow{\tau}}{ds} + \overrightarrow{\tau}.\frac{d\overrightarrow{g}}{ds} = 0$$

Ces différentes relations donnent une **matrice** $A(s)$ **antisymétrique**e exprimant les vecteurs $\frac{d\overrightarrow{\tau}}{ds}$, $\frac{d\overrightarrow{g}}{ds}$, $\frac{d\overrightarrow{n}}{ds}$ dans la base ($\overrightarrow{\tau}$, $\overrightarrow{g}$, $\overrightarrow{n}$)

Exemple : Le vecteur $\frac{d\overrightarrow{\tau}}{ds}$ appartient au plan ($\overrightarrow{g}$, $\overrightarrow{n}$)

$\Longrightarrow$

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{\tau}}{ds} = a\overrightarrow{g} + b\overrightarrow{n}}$$

Cacul des coefficients a et b :

$\Longrightarrow \quad \overrightarrow{n}.\frac{d\overrightarrow{\tau}}{ds} = a\overrightarrow{g}.\overrightarrow{n} + b\overrightarrow{n}.\overrightarrow{n} = b$

$\Longrightarrow \quad \overrightarrow{g}.\frac{d\overrightarrow{\tau}}{ds} = a\overrightarrow{g}.\overrightarrow{g} + b\overrightarrow{n}.\overrightarrow{g} = a$

Ce qui donne :

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{\tau}}{ds} = \left(\overrightarrow{g}.\frac{d\overrightarrow{\tau}}{ds}\right)\overrightarrow{g} + \left(\overrightarrow{n}.\frac{d\overrightarrow{\tau}}{ds}\right)\overrightarrow{n}}$$

En procédant de la même manière, on obtient :

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{g}}{ds} = \left(\overrightarrow{\tau}.\frac{d\overrightarrow{n}}{ds}\right)\overrightarrow{\tau} + \left(\overrightarrow{g}.\frac{d\overrightarrow{n}}{ds}\right)\overrightarrow{n}}$$

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{n}}{ds} = \left(\overrightarrow{\tau}.\frac{d\overrightarrow{n}}{ds}\right)\overrightarrow{\tau} + \left(\overrightarrow{g}.\frac{d\overrightarrow{n}}{ds}\right)\overrightarrow{g}}$$

Définitions et Notations :

- La fonction :

$$\rho_n : \ s \longrightarrow \rho_n(s) = \overrightarrow{n}.\frac{d\overrightarrow{\tau}}{ds} = -\overrightarrow{\tau}.\frac{d\overrightarrow{n}}{ds}$$

  est appelée **la courbure normale** de γ.

- La fonction :

$$\rho_g : \ s \longrightarrow \rho_g(s) = \overrightarrow{g}.\frac{d\overrightarrow{\tau}}{ds} = -\overrightarrow{\tau}.\frac{d\overrightarrow{g}}{ds}$$

  est appelée **la courbure géodésique de** γ.

- La fonction :

$$\theta_g : \ s \longrightarrow \rho_g(s) = \overrightarrow{g}.\frac{d\overrightarrow{n}}{ds} = -\overrightarrow{n}.\frac{d\overrightarrow{g}}{ds}$$

  est appelée **la torsion géodésique de** γ.

Ces différentes notations donnent les formules de Darboux

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{\tau}}{ds} = \rho_g(s)\ \overrightarrow{g} + \rho_n(s)\ \overrightarrow{n}}$$

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{g}}{ds} = -\ \rho_n(s)\overrightarrow{\tau} + \theta_g(s)\overrightarrow{n}}$$

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{n}}{ds} = -\rho_n(s)\ \overrightarrow{\tau} - \theta_g(s)\overrightarrow{g}}$$

- Avec la matrice antisymétrique suivante

$$A(s) = \begin{pmatrix} \\ \\ 0 & \rho_g(s) & \rho_n(s) \\ -\rho_g(s) & 0 & \theta_g(s) \\ -\rho_n(s) & -\theta_g(s) & 0 \end{pmatrix}$$

Calcul de la courbure normale

Soient Σ une surface de $\mathbb{R}^3$, p un point de Σ et $\overrightarrow{n}$ un vecteur directeur de la normale à

Tp au point p. Si $\overrightarrow{X}$ est un vecteur tangent unitaire, on note alors (P) le plan engendré par

$\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{n}$.

L'intersection de (P) et Σ est une courbe plane qui possède une courbure algébrique

au point p, notée ici $\rho_n(p) = K_{\overrightarrow{X}}(p)$.

C'est la courbure normale

Lorque on fait varier le vecteur tangent en restant au mème point p

La courbure normale $K_{\overrightarrow{X}}(p)$ varie, on aura ainsi une courbure maximale et une courbure minimale appellées **courbures principales**

Et les vecteurs tangents pour lesquelles on a les extrema de la courbure normale, ceux sont les **directions principales**.

Figure

$$\rho_n(s) \; = \; \overrightarrow{n}\frac{d\overrightarrow{\tau}}{ds} = -\overrightarrow{\tau}\frac{d\overrightarrow{n}}{ds}$$

:

$$\overrightarrow{n} = \frac{\overrightarrow{N}(u(s),v(s))}{H(u(s),v(s))}$$

$\Longrightarrow \overrightarrow{N} = \mathbf{H}\ \overrightarrow{n}$

Et la relation : $\overrightarrow{n}(s).\overrightarrow{\tau}(s) = 0 \Longrightarrow$

$$\overrightarrow{\tau}.\ \frac{d\overrightarrow{N}}{ds} = \overrightarrow{\tau}.\frac{d\ (H\overrightarrow{n})}{ds} = \overrightarrow{\tau}.\left[\frac{d\ H}{ds}\overrightarrow{n} + H\frac{d\ \overrightarrow{n}}{ds}\right] = H\ \tau.\frac{d\ \overrightarrow{n}}{ds} = -H\rho_n$$

$\Longrightarrow$

$$\boxed{\rho_n = -\frac{1}{H}\overrightarrow{\tau}\ .\frac{d\overrightarrow{N}}{ds}}$$

Sachant que :

$$\overrightarrow{\tau} = \frac{dM}{ds} = \frac{\partial M}{\partial u}.\frac{du}{ds} + \frac{\partial M}{\partial v}.\frac{dv}{ds}$$

$$\text{et} \quad \overrightarrow{N} = \frac{\partial M}{\partial u} \wedge \frac{\partial M}{\partial v}$$

On a :

$$\frac{d\overrightarrow{N}}{ds} = \frac{d\left(\frac{\partial M}{\partial u} \wedge \frac{\partial M}{\partial v}\right)}{ds} = \frac{\partial\left(\frac{\partial M}{\partial u} \wedge \frac{\partial M}{\partial v}\right)}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial\left(\frac{\partial M}{\partial u} \wedge \frac{\partial M}{\partial v}\right)}{\partial v}\frac{dv}{ds}$$

$$= \left[\frac{\partial^2 M}{\partial u^2} \wedge \frac{\partial M}{\partial v} + \frac{\partial M}{\partial u} \wedge \frac{\partial^2 M}{\partial u \partial v}\right]\frac{du}{ds} + \left[\frac{\partial^2 M}{\partial u \partial v} \wedge \frac{\partial M}{\partial v} + \frac{\partial M}{\partial u} \wedge \frac{\partial^2 M}{\partial v^2}\right]\frac{dv}{ds}$$

$$= \left[\frac{\partial^2 M}{\partial u^2}.\frac{du}{ds} + \frac{\partial^2 M}{\partial u \partial v}\frac{dv}{ds}\right] \wedge \frac{\partial M}{\partial v} + \frac{\partial M}{\partial u} \wedge \left[\frac{\partial^2 M}{\partial u \partial v}\frac{du}{ds} + \frac{\partial^2 M}{\partial v^2}\frac{dv}{ds}\right]$$

Ce qui donne :

$$\overrightarrow{\tau}.\frac{d\overrightarrow{N}}{ds} = \left(\left[\frac{\partial^2 M}{\partial u^2}.\frac{du}{ds} + \frac{\partial^2 M}{\partial u \partial v}\frac{dv}{ds}\right] \wedge \frac{\partial M}{\partial v} + \frac{\partial M}{\partial u} \wedge \left[\frac{\partial^2 M}{\partial u \partial v}\frac{du}{ds} + \frac{\partial^2 M}{\partial v^2}\frac{dv}{ds}\right]\right) . \left(\frac{\partial M}{\partial u}.\frac{du}{ds} + \frac{\partial M}{\partial v}.\frac{dv}{ds}\right)$$

Soit :

$$\overrightarrow{\tau}.\frac{d\overrightarrow{N}}{ds} = \left(\frac{\partial^2 M}{\partial u^2} \wedge \frac{\partial M}{\partial v}\right).\frac{\partial M}{\partial u}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 M}{\partial u \partial v} \wedge \frac{\partial M}{\partial v}\right).\frac{\partial M}{\partial u}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \left(\frac{\partial M}{\partial u} \wedge \frac{\partial^2 M}{\partial v^2}\right).\frac{\partial M}{\partial v}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2$$

Expression que l'on peut écrire comme suit

$$\overrightarrow{\tau}.\frac{d\overrightarrow{N}}{ds} = \left(\frac{\partial^2 M}{\partial u^2}, \frac{\partial M}{\partial v}, \frac{\partial M}{\partial u}\right)\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 M}{\partial u \partial v}, \frac{\partial M}{\partial v}, \frac{\partial M}{\partial u}\right)\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \left(\frac{\partial M}{\partial u}, \frac{\partial^2 M}{\partial v^2}, \frac{\partial M}{\partial v}\right)\left(\frac{dv}{ds}\right)^2$$

par permutation circulaire du **produit mixte**,
on obtient :

$$-\overrightarrow{\tau}.\frac{d\overrightarrow{N}}{ds} = \left(\frac{\partial M}{\partial u}, \frac{\partial M}{\partial v}, \frac{\partial^2 M}{\partial u^2}\right)\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial M}{\partial u}, \frac{\partial M}{\partial v}, \frac{\partial^2 M}{\partial u \partial v}\right)\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \left(\frac{\partial M}{\partial u}, \frac{\partial M}{\partial v}, \frac{\partial^2 M}{\partial v^2}\right)\left(\frac{dv}{ds}\right)^2$$

Expression que l'on écrit sous la forme suivante :

$$\boxed{\rho_n = \mathbf{L}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\mathbf{M}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \mathbf{N}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2}$$

avec les notations suivantes

$$\mathbf{L} = \frac{1}{H}\left(\frac{\partial M}{\partial u}, \frac{\partial M}{\partial v}, \frac{\partial^2 M}{\partial u^2}\right)$$

$$\mathbf{M} = \frac{1}{H}\left(\frac{\partial M}{\partial u}, \frac{\partial M}{\partial v}, \frac{\partial^2 M}{\partial u \partial v}\right)$$

$$\mathbf{N} = \frac{1}{H}\left(\frac{\partial M}{\partial u}, \frac{\partial M}{\partial v}, \frac{\partial^2 M}{\partial v^2}\right)$$

- Supposons donné un vecteur tangent en un point $M_0\left(u_0, v_0\right) \in \Sigma$

$$\overrightarrow{V} = \lambda\frac{\partial M}{\partial u} + \mu\frac{\partial M}{\partial v}$$

On peut construire sur Σ,un arc orienté et régulier passant par M_0 et dont

le vecteur tangent unitaire en M_0 soit :

$$\overrightarrow{\tau} = \frac{\overrightarrow{V}}{\left\|\overrightarrow{V}\right\|} = \frac{\lambda}{\left\|\overrightarrow{V}\right\|}\frac{\partial M}{\partial u} + \frac{\mu}{\left\|\overrightarrow{V}\right\|}\frac{\partial M}{\partial v}$$

Sachant que l'on a aussi : $\overrightarrow{\tau} = \frac{dM}{ds} = \frac{\partial M}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial M}{\partial v}\frac{dv}{ds}$

$\Longrightarrow \frac{du}{ds} = \frac{\lambda}{\left\|\overrightarrow{V}\right\|}$ et $\frac{dv}{ds} = \frac{\mu}{\left\|\overrightarrow{V}\right\|}$

On obtient alors : $\boxed{\boldsymbol{\rho}_n = \frac{\mathbf{L}\lambda^2 + 2\mathbf{M}\lambda\mu + \mathbf{N}\mu^2}{\left\|\overrightarrow{V}\right\|^2}}$

Théorème :

Si : $\boxed{\overrightarrow{V} = \boldsymbol{\lambda}\frac{\partial M}{\partial u} + \boldsymbol{\mu}\frac{\partial M}{\partial v}}$ est un vecteur tangent en un point M

de la nappe Σ, **la courbure normale** de Σ au point M, est le nombre

$$\boxed{\boldsymbol{\rho}_n = \frac{\mathbf{L}\lambda^2 + 2\mathbf{M}\lambda\mu + \mathbf{N}\mu^2}{\mathbf{E}\lambda^2 + 2\mathbf{F}\lambda\mu + \mathbf{G}\mu^2}}$$

• Paramétrisation cartésienne:

Soit la nappe Σ définie par :

$$z = f(x, y)$$

- Soit M le point de coordonnées : $M = (x,\ y,\ f(x, y))$.
  On utilise les notations suivantes :

$$p = f\ '_x,\ q = f_y{}',\ r = f\ ''_{xx}\ ,\ s = f\ ''_{xy},\ t = f\ ''_{yy}$$

Les vecteurs : $\dfrac{\partial M}{\partial x},\ \dfrac{\partial M}{\partial y},\ \dfrac{\partial^2 M}{\partial x^2},\ \dfrac{\partial^2 M}{\partial x \partial y},\ \dfrac{\partial^2 M}{\partial y^2}$
sont définis comme suit :

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ p \end{pmatrix},\ \frac{\partial M}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ q \end{pmatrix},\ \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x \partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ s \end{pmatrix},\ \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$$

$\mathbf{E} = \left\| \dfrac{\partial M}{\partial x} \right\|^2 = 1 + p^2,\ \mathbf{F} = \dfrac{\partial M}{\partial x} . \dfrac{\partial M}{\partial y} = pq,\ \mathbf{G} = \left\| \dfrac{\partial M}{\partial y} \right\|^2 = 1 + q^2$
$\mathbf{H} = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$
$\mathbf{L} = \dfrac{r}{H},\ \mathbf{M} = \dfrac{s}{H},\ \mathbf{N} = \dfrac{t}{H}$

- **La seconde forme fondamentale :**

$$\Phi_2\,(dM) = \frac{r dx^2 + 2s\ dxdy + t dy^2}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

- ## Calcul de la torsion géodésique :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\theta}_g(s) &= \overrightarrow{g}.\frac{d\overrightarrow{n}}{ds} = (\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{\tau}).\frac{d\overrightarrow{n}}{ds} = \left[\overrightarrow{n},\ \overrightarrow{\tau},\frac{d\overrightarrow{n}}{ds}\right] \\ &= \frac{1}{H}\left(\frac{\partial M}{\partial u} \wedge \frac{\partial M}{\partial v}\right).\left(\overrightarrow{\tau} \wedge \frac{d\overrightarrow{n}}{ds}\right)\end{aligned}$$

On a le produit scalaire de deux produits vectoriels, et pour faire les calculs, on utilise la formule du **double produit vectoriel**

$$\overrightarrow{V_1}\wedge.\left(\overrightarrow{V_2} \wedge \overrightarrow{V_3}\right) = \left(\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_3}\right)\overrightarrow{V_2} - \left(\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2}\right)\overrightarrow{V_3}$$

Ce qui donne :

$$\boldsymbol{\theta}_g(s) = \frac{1}{H}\left(\frac{\partial M}{\partial u},\frac{\partial M}{\partial v},\overrightarrow{\tau} \wedge \frac{d\overrightarrow{n}}{ds}\right) = \frac{1}{H}\frac{\partial M}{\partial u}.\left(\frac{\partial M}{\partial v} \wedge \left(\overrightarrow{\tau} \wedge \frac{d\overrightarrow{n}}{ds}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{H}\frac{\partial M}{\partial u}.\left[\left(\frac{\partial M}{\partial v}.\frac{d\overrightarrow{n}}{ds}\right)\overrightarrow{\tau} - \left(\frac{\partial M}{\partial v}.\overrightarrow{\tau}\right)\frac{d\overrightarrow{n}}{ds}\right]$$
$$= \frac{1}{H}\begin{vmatrix} \frac{\partial M}{\partial u}.\overrightarrow{\tau} & \frac{\partial M}{\partial v}.\overrightarrow{\tau} \\ \frac{\partial M}{\partial u}\frac{d\overrightarrow{n}}{ds} & \frac{\partial M}{\partial v}.\frac{d\overrightarrow{n}}{ds}\end{vmatrix} \qquad (1)$$

On a :

$$\frac{\partial M}{\partial u}.\overrightarrow{\tau} = \frac{\partial M}{\partial u}.\left(\frac{\partial M}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial M}{\partial v}\frac{dv}{ds}\right) = E\frac{du}{ds} + F\frac{dv}{ds}$$
$$\frac{\partial M}{\partial v}.\overrightarrow{\tau} = \frac{\partial M}{\partial v}.\left(\frac{\partial M}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial M}{\partial v}\frac{dv}{ds}\right) = F\frac{du}{ds} + G\frac{dv}{ds}$$

Sachant que : $\frac{\partial M}{\partial u}.\overrightarrow{n} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial M}{\partial u}\frac{\partial \overrightarrow{n}}{\partial u} + \overrightarrow{n}.\frac{\partial^2 M}{\partial u^2} = 0$

D'où :

$$\frac{\partial M}{\partial u}\frac{\partial \overrightarrow{n}}{\partial u} = -\overrightarrow{n}.\frac{\partial^2 M}{\partial u^2} = -\frac{1}{H}\left(\frac{\partial M}{\partial u},\frac{\partial M}{\partial v},\frac{\partial^2 M}{\partial u^2}\right) = -\mathbf{L}$$
$$\frac{\partial M}{\partial u}\frac{\partial \overrightarrow{n}}{\partial v} = -\overrightarrow{n}.\frac{\partial^2 M}{\partial u \partial v} = -\frac{1}{H}\left(\frac{\partial M}{\partial u},\frac{\partial M}{\partial v},\frac{\partial^2 M}{\partial u \partial v}\right) = -\mathbf{M}$$
$$\frac{\partial M}{\partial v}\frac{\partial \overrightarrow{n}}{\partial u} = -\overrightarrow{n}.\frac{\partial^2 M}{\partial u \partial v} = -\frac{1}{H}\left(\frac{\partial M}{\partial u},\frac{\partial M}{\partial v},\frac{\partial^2 M}{\partial u \partial v}\right) = -M$$
$$\frac{\partial M}{\partial v}\frac{\partial \overrightarrow{n}}{\partial v} = -\overrightarrow{n}.\frac{\partial^2 M}{\partial v^2} = -\frac{1}{H}\left(\frac{\partial M}{\partial u},\frac{\partial M}{\partial v},\frac{\partial^2 M}{\partial v^2}\right) = -N$$

On a ainsi :

$$\frac{d\overrightarrow{n}}{ds}\frac{\partial M}{\partial u} = \left(\frac{\partial \overrightarrow{n}}{\partial u}.\frac{\partial M}{\partial u}\right)\frac{du}{ds} + \left(\frac{\partial \overrightarrow{n}}{\partial v}.\frac{\partial M}{\partial u}\right)\frac{dv}{ds} = -L\frac{du}{ds} - M\frac{dv}{ds}$$

$$\frac{d\overrightarrow{n}}{ds}\frac{\partial M}{\partial v} = \left(\frac{\partial \overrightarrow{n}}{\partial u}.\frac{\partial M}{\partial v}\right)\frac{du}{ds} + \left(\frac{\partial \overrightarrow{n}}{\partial v}.\frac{\partial M}{\partial v}\right)\frac{dv}{ds} = -M\frac{du}{ds} - N\frac{dv}{ds}$$

En utilisant de la formule (1) ,on a donc :

$$\boldsymbol{\theta}_g(s) = \frac{1}{H}\begin{vmatrix} \frac{\partial M}{\partial u}.\overrightarrow{\tau} & \frac{\partial M}{\partial v}.\overrightarrow{\tau} \\ \frac{\partial M}{\partial u}\frac{d\overrightarrow{n}}{ds} & \frac{\partial M}{\partial v}.\frac{d\overrightarrow{n}}{ds} \end{vmatrix} = -\frac{1}{H}\begin{vmatrix} E\frac{du}{ds} + F\frac{dv}{ds} & F\frac{du}{ds} + G\frac{dv}{ds} \\ L\frac{du}{ds} + M\frac{dv}{ds} & M\frac{du}{ds} + N\frac{dv}{ds} \end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{\theta}_g(s) = -\frac{1}{H}\left[(EM - FL)\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + (EN - GL)\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + (FN - GM)\left(\frac{dv}{ds}\right)^2\right]$$

Si l'on a un vecteur quelconque : $\overrightarrow{V} = \lambda\frac{\partial M}{\partial u} + \mu\frac{\partial M}{\partial v}$
appartenant au plan tangent à $\boldsymbol{\Sigma}$ au point M

la **torsion géodésique** a pour formule:

$$\boldsymbol{\theta}_g = -\frac{1}{H}\frac{(EM - FL)\lambda^2 + (EN - GL)\lambda\mu + (FN - GM)\mu^2}{E\lambda^2 + 2F\lambda\mu + G\mu^2}$$

Courbure totale et courbure moyenne

Par commodité d'écriture, on pose :

$$\frac{\partial \overrightarrow{n}}{\partial u} = \overrightarrow{n}_u, \qquad \frac{\partial \overrightarrow{n}}{\partial v} = \overrightarrow{n}_v$$

Les vecteurs $\overrightarrow{n}_u$, $\overrightarrow{n}_v$ appartiennent au plan tangent $T_g(M)$.
En considérant (X_u, Y_u) ,comme base, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{n}_u &= w_{11}X_u + w_{12}X_v \\ \overrightarrow{n}_v &= w_{21}X_u + w_{22}X_v \end{aligned}$$

- Sous forme matricielle, on a :

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{n}_u \\ \overrightarrow{n}_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{w}_{11} & \mathbf{w}_{12} \\ \mathbf{w}_{21} & \mathbf{w}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_u \\ X_v \end{pmatrix}$$

La matrice

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \mathbf{w}_{11} & \mathbf{w}_{12} \\ \mathbf{w}_{21} & \mathbf{w}_{22} \end{pmatrix}$$

est appelée matrice de Weingarten.

Soit $-\mathbf{k}_1$, $-\mathbf{k}_2$ ses valeurs propres.

Les $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ sont appelés : les courbures principales

et les vecteurs propres associés : les directions principales.

Les invariants de la matrice, le déterminant de $\mathbf{W}$

$$\mathbf{K}_g = \det\ (\mathbf{W})\ = \mathbf{k}_1\mathbf{k}_2$$

et l'opposé de la demi-trace

$$\mathbf{K}_m = \frac{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2}{2}$$

représentent :

- $\mathbf{K}_g$ **la courbure de Gauss (courbure totale)**
- $\mathbf{K}_m$ **la courbure moyenne**.

- Calcul des coefficients de la **matrice de Weingarten** :

On a

$$\begin{aligned}
\mathbf{L} &= -\mathbf{X}_u.\overrightarrow{n}_u = -X_u\left(w_{11}X_u + w_{12}X_v\right) = -\left(w_{11}E + w_{12}F\right) \\
\mathbf{M} &= -\mathbf{X}_v.\overrightarrow{n}_u = -X_v\left(\ w_{11}X_u + w_{12}X_v\right) = -\left(w_{11}F + w_{12}G\right) \\
\mathbf{M} &= -\mathbf{X}_u.\overrightarrow{n}_v = -X_u\left(w_{21}X_u + w_{22}X_v\right) = -\left(w_{21}E + w_{22}F\right) \\
\mathbf{N} &= -\mathbf{X}_v.\overrightarrow{n}_v = -X_v\left(\ w_{21}X_u + w_{22}X_v\right) = -\left(w_{21}F + w_{22}G\right)
\end{aligned}$$

- Explication : En effet, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_u.\overrightarrow{n}_u &= \frac{\partial M(u,v)}{\partial u}.\frac{\partial\left(\dfrac{\dfrac{\partial M(u,v)}{\partial u}\wedge\dfrac{\partial M(u,v)}{\partial v}}{H}\right)}{\partial u} \\
&= \frac{\partial M(u,v)}{\partial u}.\frac{\dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial M(u,v)}{\partial u}\wedge\dfrac{\partial M(u,v)}{\partial v}\right)}{\partial u}H - \left(\dfrac{\partial M(u,v)}{\partial u}\wedge\dfrac{\partial M(u,v)}{\partial v}\right)H'}{H^2} \\
&= \frac{1}{H}\frac{\partial M(u,v)}{\partial u}.\frac{\partial\left(\dfrac{\partial M(u,v)}{\partial u}\wedge\dfrac{\partial M(u,v)}{\partial v}\right)}{\partial u} \\
&= \frac{1}{H}\frac{\partial M(u,v)}{\partial u}.\left(\frac{\partial^2 M(u,v)}{\partial u^2}\wedge\frac{\partial M(u,v)}{\partial v}\right) \\
&= -\frac{1}{H}\frac{\partial M(u,v)}{\partial u}.\left(\frac{\partial M(u,v)}{\partial v}\wedge\frac{\partial^2 M(u,v)}{\partial u^2}\right) = -L
\end{aligned}$$

- Ce qui donne sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix}\mathbf{L} & \mathbf{M}\\ \mathbf{M} & \mathbf{N}\end{pmatrix} = -W\begin{pmatrix}\mathbf{E} & \mathbf{F}\\ \mathbf{F} & \mathbf{G}\end{pmatrix}$$

Sachant que ;

$$\begin{pmatrix}\mathbf{E} & \mathbf{F}\\ \mathbf{F} & \mathbf{G}\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\mathbf{EG}-\mathbf{F}^2}\begin{pmatrix}\mathbf{G} & -\mathbf{F}\\ -\mathbf{F} & \mathbf{E}\end{pmatrix}$$

On obtient :

$$\begin{pmatrix}\mathbf{w}_{11} & \mathbf{w}_{12}\\ \mathbf{w}_{21} & \mathbf{w}_{22}\end{pmatrix} = -\frac{1}{\mathbf{H}^2}\begin{pmatrix}\mathbf{L} & \mathbf{M}\\ \mathbf{M} & \mathbf{N}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{G} & -\mathbf{F}\\ -\mathbf{F} & \mathbf{E}\end{pmatrix}$$

Avec

$$\begin{pmatrix} \mathbf{w}_{11} & \mathbf{w}_{12} \\ \mathbf{w}_{21} & \mathbf{w}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\mathbf{MF}-\mathbf{LG}}{\mathbf{H}^2}, & \dfrac{\mathbf{LF}-\mathbf{ME}}{\mathbf{H}^2} \\ \dfrac{\mathbf{NF}-\mathbf{MG}}{\mathbf{H}^2}, & \dfrac{\mathbf{MF}-\mathbf{NE}}{\mathbf{H}^2} \end{pmatrix}$$

Calcul du polynome caractéristique :

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} \dfrac{\mathbf{MF}-\mathbf{LG}}{\mathbf{H}^2} - \lambda, & \dfrac{\mathbf{LF}-\mathbf{ME}}{\mathbf{H}^2} \\ \dfrac{\mathbf{NF}-\mathbf{MG}}{\mathbf{H}^2}, & \dfrac{\mathbf{MF}-\mathbf{NE}}{\mathbf{H}^2} - \lambda \end{vmatrix}$$

On obtient :

$$P(\lambda) = \left[\left(\frac{\mathbf{MF}-\mathbf{LG}}{\mathbf{H}^2}\right) - \lambda\right]\left[\left(\frac{\mathbf{MF}-\mathbf{NE}}{\mathbf{H}^2}\right) - \lambda\right] - \left(\frac{\mathbf{NF}-\mathbf{MG}}{\mathbf{H}^2}\right)\left(\frac{\mathbf{LF}-\mathbf{ME}}{\mathbf{H}^2}\right) = 0$$

Ce qui donne :

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \frac{2\mathbf{MF}-\mathbf{LG}-\mathbf{NE}}{\mathbf{H}^2}\lambda + \frac{(\mathbf{MF}-\mathbf{LG})(\mathbf{MF}-\mathbf{NE}) + (\mathbf{NF}-\mathbf{MG})(\mathbf{LF}-\mathbf{ME})}{\mathbf{H}^4}. = 0$$

Sachant que : $(\mathbf{MF}-\mathbf{LG})(\mathbf{MF}-\mathbf{NE}) - (\mathbf{NF}-\mathbf{MG})(\mathbf{LF}-\mathbf{ME}) = \left(\mathbf{LN}-\mathbf{M}^2\right)\left(\mathbf{GE}-\mathbf{F}^2\right)$

On obtient une écriture simplifiée de $P(\lambda)$:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \frac{2\mathbf{MF}-\mathbf{LG}-\mathbf{NE}}{\mathbf{H}^2}\lambda + \frac{\left(\mathbf{LN}-\mathbf{M}^2\right)}{\mathbf{H}^2}. = 0$$

On a alors les expressions de $\mathbf{K}_g$ et de $\mathbf{K}_m$:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_g &= \frac{\mathbf{LN}-\mathbf{M}^2}{\mathbf{H}^2} \\ \mathbf{K}_m &= \frac{\mathbf{LG}+\mathbf{NE}-\mathbf{2MF}}{2\mathbf{H}^2} \end{aligned}$$

- Exemple :

Soit la sphère d'équation
$$\boxed{f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0}$$

- On utilise la paramétrisation shérique

$$M(\varphi, \theta) = \left| \begin{array}{c} r\cos\varphi\sin\theta \\ r\sin\varphi\sin\theta \\ r\cos\theta \end{array} \right.$$

Ce qui donne pour les vecteurs tangents

$$\frac{\partial M(\varphi, \theta)}{\partial \varphi} = \left| \begin{array}{c} -r\sin\varphi\sin\theta \\ r\cos\varphi\sin\theta \\ 0 \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial M(\varphi, \theta)}{\partial \theta} = \left| \begin{array}{c} r\cos\varphi\cos\theta \\ r\sin\varphi\cos\theta \\ -r\sin\theta \end{array} \right.$$

Calcul des coefficients de la première

forme fondamentale :

On a :

$$E = \left\| \frac{\partial M(\varphi, \theta)}{\partial \varphi} \right\|^2 = r^2 \sin^2\theta,$$

$$F = \frac{\partial M(\varphi, \theta)}{\partial \varphi} . \frac{\partial M(\varphi, \theta)}{\partial \theta} = 0,$$

- $G = \left\| \dfrac{\partial M(\varphi, \theta)}{\partial \theta} \right\|^2 = r^2$

- Calcul du produit vectoriel :

$$\frac{\partial M(\varphi,\theta)}{\partial\varphi} \wedge \frac{\partial M(\varphi,\theta)}{\partial\theta} = -r^2\sin\theta \left| \begin{array}{c} \cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta \\ \cos\theta \end{array} \right.$$

Avec :

$$H = \left\| \frac{\partial M(\varphi,\theta)}{\partial\varphi} \wedge \frac{\partial M(\varphi,\theta)}{\partial\theta} \right\| = \sqrt{EG-F^2} = r^2\sin\theta$$

- Calculs des dérivées secondes :

$$\frac{\partial^2 M(\varphi,\theta)}{\partial\varphi^2} = -r\sin\theta \left| \begin{array}{c} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{array} \right. , \quad \frac{\partial^2 M(\varphi,\theta)}{\partial\theta^2} = -r \left| \begin{array}{c} \cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta \\ \cos\theta \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial^2 M(\varphi,\theta)}{\partial\theta\partial\varphi} = -r\cos\theta \left| \begin{array}{c} \sin\varphi \\ -\cos\varphi \\ 0 \end{array} \right.$$

- Calcul des coefficients de la deuxième forme fondamentale :

$$\left[\frac{\partial M(\varphi,\theta)}{\partial\varphi}, \frac{\partial M(\varphi,\theta)}{\partial\theta}, \frac{\partial^2 M(\varphi,\theta)}{\partial\varphi^2}\right] = \left(-r^2\sin\theta \left| \begin{array}{c} \cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta \\ \cos\theta \end{array} \right.\right) . \left(-r\sin\theta \left| \begin{array}{c} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{array} \right.\right) = r^3\sin^3\theta$$

$$\boxed{\left[\frac{\partial M(\varphi,\theta)}{\partial\varphi}, \frac{\partial M(\varphi,\theta)}{\partial\theta}, \frac{\partial^2 M(\varphi,\theta)}{\partial\varphi\partial\theta}\right] = \left(-r^2\sin\theta \left| \begin{array}{c} \cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta \\ \cos\theta \end{array} \right.\right) . \left(-r\cos\theta \left| \begin{array}{c} \sin\varphi \\ -\cos\varphi \\ 0 \end{array} \right.\right) = 0}$$

$$
\left[\frac{\partial M(\varphi,\theta)}{\partial \varphi}, \frac{\partial M(\varphi,\theta)}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 M(\varphi,\theta)}{\partial \theta^2}\right] =
$$

$$
\left(-r^2\sin\theta \left| \begin{array}{c} \cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta \\ \cos\theta \end{array}\right.\right) . \left(-r \left| \begin{array}{c} \cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta \\ \cos\theta \end{array}\right.\right) = r^3\sin\theta
$$

• Expressions des deux formes fondamentales de la sphère:

• On a :

$$
\mathbf{E} = r^2\sin^2\theta, \qquad \mathbf{F} = 0, \qquad \mathbf{G} = r^2
$$

avec

$$
\mathbf{L} = \mathbf{r}\sin^2\theta, \qquad \mathbf{M} = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{N} = \mathbf{r}
$$

Ce qui donne :

$$
\begin{aligned}
\mathbf{\Phi}_1(\mathbf{M}) &= r^2\sin^2\theta.\lambda^2 + r^2\mu^2 \\
\mathbf{\Phi}_2(M) &= r\sin^2\theta.\lambda^2 + r\mu_2 \\
\boldsymbol{\rho}_n(M) &= \frac{1}{r}
\end{aligned}
$$

Matrice de **Weingarten** associée à la sphère :

$$
\begin{pmatrix} \frac{\mathbf{MF}-\mathbf{LG}}{\mathbf{H}^2}, & \frac{\mathbf{LF}-\mathbf{ME}}{\mathbf{H}^2} \\ \frac{\mathbf{NF}-\mathbf{MG}}{\mathbf{H}^2}, & \frac{\mathbf{MF}-\mathbf{NE}}{\mathbf{H}^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{r}, & 0 \\ 0, & -\frac{1}{r} \end{pmatrix}
$$

D'où les valeurs propres : $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{r} \Longrightarrow$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{K}_g &= \frac{\mathbf{LN}-\mathbf{M}^2}{\mathbf{H}^2} = \frac{1}{\mathbf{r}^2} \\
\mathbf{K}_m &= \frac{\mathbf{LG}+\mathbf{NE}-\mathbf{2MF}}{2\mathbf{H}^2} = \frac{1}{\mathbf{r}}
\end{aligned}
$$

Série d'exercices

Exercice 1

Former une équation cartésienne du plan tangent en un point régulier quelconque de la nappe paramétrée par :

$$\begin{cases} x = shu \\ y = shv \\ z = u + v. \end{cases}$$

Exercice 2

Former une équation cartésienne du support de la nappe paramétrée par

$x = u + v$
$y = uv$
$z = u^2 + v^2.$

Exercice 3

Déterminer la nature de la quadrique

$$z = xy = \frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{4}$$

Donner une équation de son plan tangent en un point $M(x_0,\ y_0,\ z_0)$.
Donner l'expression des deux formes fondamentales.

Exercice 4

Soit Σ la surface de $\mathbb{R}^3$d'équation:

$$2(2z^2 + y^2) + x = 0.$$

1 La surface Σ est-elle régulière ?

2 Paramétrer la surface Σ (de manière polynomiale) en prenant les paramètres u et v .

3 Déterminer une base de l'espace tangent à la surface Σ en $M_0(-6, 1, -1)$.

4 Calculer un vecteur normal à la surface Σ en $M_1(-6, 1, -1)$.

5 Le vecteur $\overrightarrow{V} = (27, -29, -1)$ appartient-il au plan tangent à Σ en $M_3(-6, 1, 1)$?

Exercice 5

Soit Σ la nappe de $\mathbb{R}^3$ d'équations paramétriques :

$$\boxed{f(u,v) = \begin{cases} u \cos u \cos v \\ u \sin u \cos v \\ u \sin v \end{cases}}$$

On a ainsi une application de :

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$[0, 2\pi]^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

Calculer l'aire de Σ.

Les quadriques

Définition : On appelle quadrique de $\mathbb{R}^3$ toute surface algébrique Σ admettant dans un repère orthonormée $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$
une équation de la forme :
$\boxed{F(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + gx + hy + iz + j = 0}$
Sous forme matricielle, l'équation de la quadrique s'écrit également comme suit :

$$\boxed{{}^t\mathbf{XAX} + \mathbf{LX} + \mathbf{j} = 0}$$

où $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}$ est une matrice symétrique ,

$\mathbf{L}\,(g, \quad h, \quad i)$ et $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Le terme : $\boxed{{}^t\mathbf{XAX} = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2eyz + 2fxz}$
est la partie quadratique.

Le terme $\mathbf{LX}$ est la partie linéaire.

La matrice $\mathbf{A}$ étant symétrique et réelle, il existe une matrice orthogonale $\mathbf{P}$ (matrice de passage) telle que:

$$\boxed{{}^t\mathbf{PAP} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}}$$

où P est la matrice de passage de la base canonique $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$
à une base orthonormale des vecteurs propres ($\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$)
et dans ce nouveau repère $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$, l'équation de $\mathbf{\Sigma}$ ne présente plus de termes en xy , yz, xz.

i) Supposons $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$ ie $\det A \neq 0$

Par rapport à une base orthonormée choisie, on peut écrire l'équation de la quadrique comme suit :

$$\boxed{\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 = \alpha}$$

On a alors les possibilités suivantes :

i) a)* Les λ_1, λ_2, λ_3 sont de même signe que l'on peut supposer positif ce qui donne

$$\begin{cases} \alpha < 0 \Longrightarrow \Sigma = \emptyset \\ \alpha = 0 \Longrightarrow \Sigma = \{0\} \\ \alpha > 0 \Longrightarrow \Sigma \text{ est une ellipsoïde} \end{cases}$$

i) b)

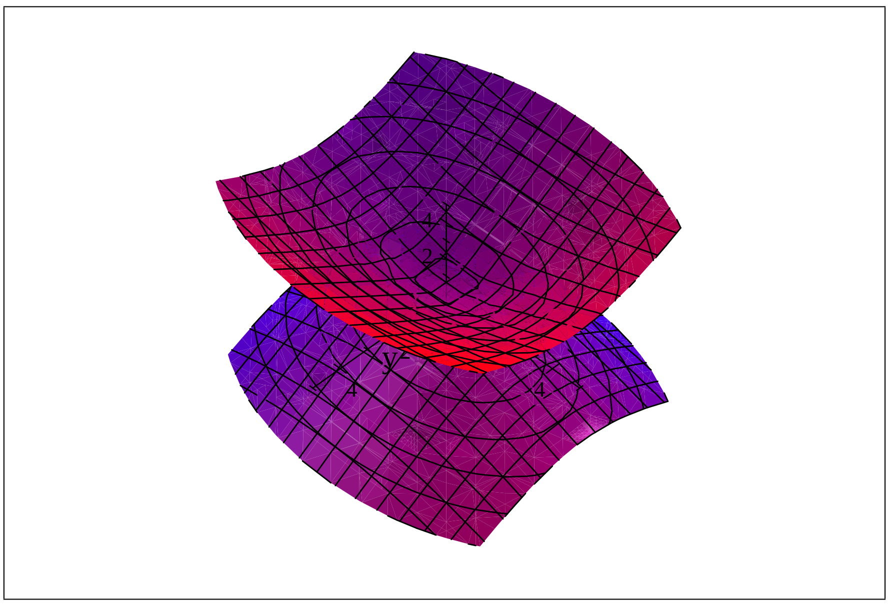
* Les $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ sont de signes différents

$\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0,\ \lambda_3 < 0$

$$\boxed{\lambda_1 X^2 +\ \lambda_2 Y^2 +\ \lambda_3 Z^2 = \alpha}$$

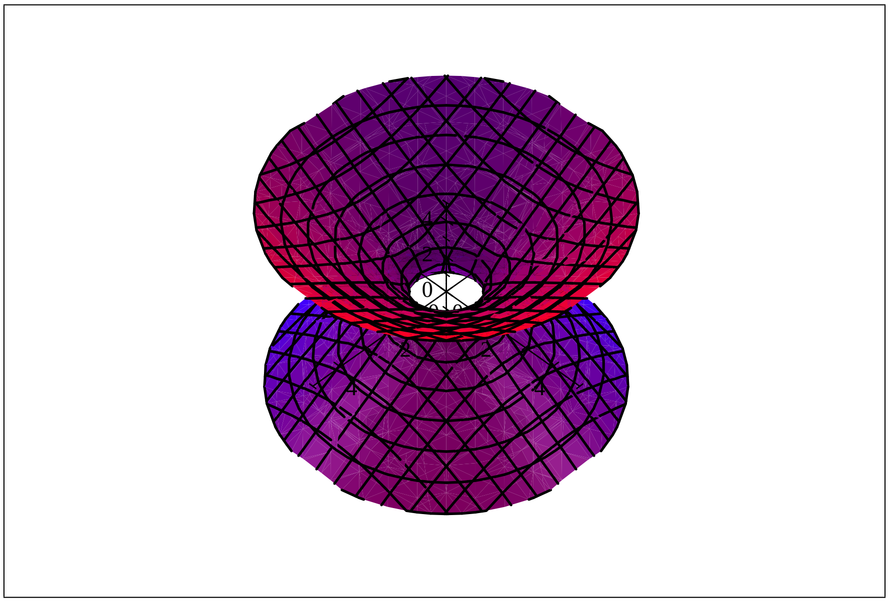
$$\begin{cases} \alpha < 0 \Longrightarrow \Sigma \text{ est une hyperboloïde à deux nappes} \\ \alpha > 0 \Longrightarrow \Sigma \text{ est une hyperboloïde à une nappe} \\ \alpha = 0,\ \Sigma \text{ est un cône} \end{cases}$$

Hyperboloïde à deux nappes



Hyperboloïde à une nappe

$x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$



ii) L'une des valeurs propres est nulle

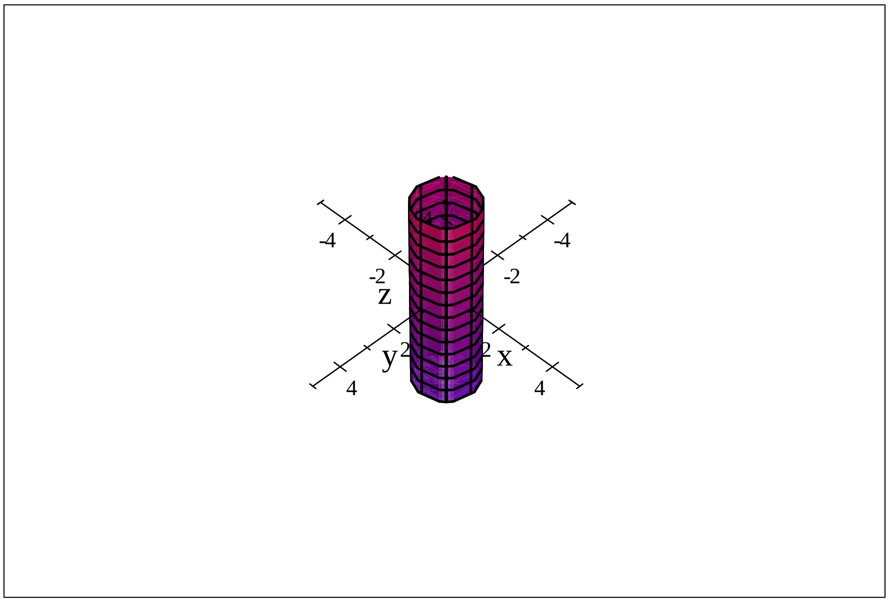
Par exemple λ_3 est nul,
on a alors deux possibiltés d'équations de la quadrique

$$\begin{aligned} \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 &= \alpha \quad (\mathbf{1}) \\ \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \mu Z &= \alpha \quad (\mathbf{2}) \end{aligned}$$

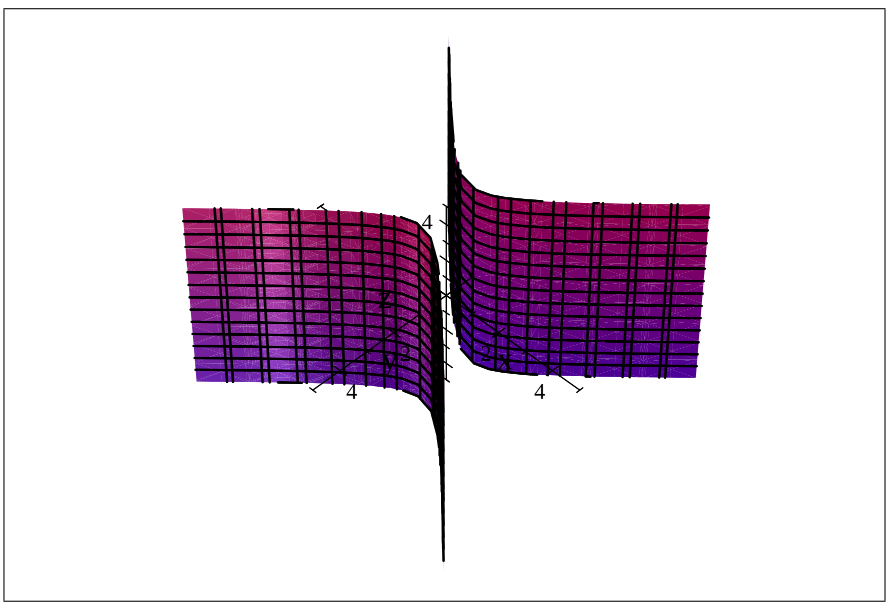
ii) 1)

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = \alpha$$

On a alors
- Soit un cylindre elliptique.



- Soit un **cylindre hyperbolique**.



- Soit la réunion de deux droites ou l'ensemble vide.

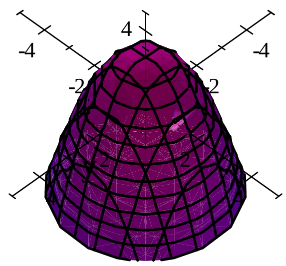
ii) 2)

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \mu Z = \alpha$$

On a alors :

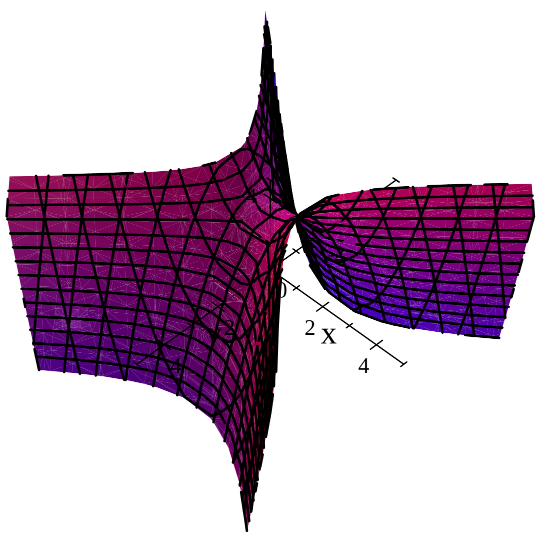
$\lambda_1\lambda_2 > 0$, Σ est une **paraboloïde elliptique**

$\lambda_1\lambda_2 < 0$, Σ est une **paraboloïde hyperbolique**.



$\lambda_1\lambda_2 < 0$, Σ est une paraboloïde hyperbolique.

$x^2 - y^2 + z - 3 = 0$



iii) Deux des valeurs propres sont nulles

on a deux possibilités :

iii) a)

$$\lambda_1 X^2 + \alpha = 0$$

Ce qui donne deux plans distincts, ou un seul plan, ou finalement l'ensemble vide.

iii) b)

$$\boxed{\lambda_1 X^2 + \alpha Y = 0}$$

La quadrique Σ est un cylindre parabolique

En résumé, les différents types de quadriques (9) sont les suivants :

-Ellipsoïde : $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1}$

-Hyperboloïde :

une nappe : $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1}$

deux nappes : $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1}$

-Cônes : $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0}$

-Paraboloïde elliptique :

$$\boxed{z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$$

-Paraboloïde hyperbolique.

$$\boxed{z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

-Cylindre elliptique: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

-Cylindre hyperbolique: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

-Cylindre parabolique: $\lambda_1 x^2 + \alpha y = 0$

Exercices

1) Déterminer la nature de la quadrique

$$\boxed{\mathbf{\Sigma}\ :\quad xy+xz+yz+2y+1=0}$$

2) Soit la quadrique d'équation :

$$\boxed{\mathbf{xz+yz=1}}$$

i) Déterminer sa nature.
ii) Déterminer l'équation du plan tangent à la quadrique au point $M_0(1,0,1)$.
iii) Donner l'expression de la première forme fondamentale en M_0.
iv) Calculer les coefficients de la deuxième forme fondamentale en M_0.

3) Soit la surface Σ d'équation : $\boxed{\mathbf{xz+yz+xy+z+1=0}}$
i) Donner une idée sur les possibles natures de Σ.
ii) Déterminer une paramétrisation de $\mathbf{\Sigma}$.
iii) Donner l'expression de la première forme fondamentale en $M_0\,(0,0,-1)$.

iv) Est ce que Σ est une surface régulière

4) Soit la quadrique $\mathbf{\Sigma}$ d'équation **:**

$$\boxed{(x-y)\,(y-z)+(y-z)\,(z-x)+(z-x)\,(x-y)+x-y=0}$$

i) Quelle est la matrice **M**.associée à la partie quadratique de f .
ii) Déterminer le rang de **M**.
iii) Ecrire l'équation de Σ sous forme canonique.

iv) Nature de la quadrique.

5) Soit S une surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation :

$$x^2+y^2+2\sqrt{2}xz-2y-1=0$$

Donner la nature de S.
Donner une paramétrisation de S.

6) Soit **la quadrique** (Σ) définie par :

$$\boxed{x^{\ 2}+y^2+z^2-2xy+2xz+3x-y+z+1=0}$$

Caractériser la nature de la quadrique.

7) Soit **la quadrique** (Σ) définie par :

$$\boxed{x^2 - 4yz + 1 = 0}$$

i) Calculer les coefficients de la première forme

fondamentale (E, F, G)

ii) Ecrire l'équation de (Σ) sous sa forme canonique.

iii) Caractériser la nature de la quadrique.

Correction

1) Pour $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, la matrice associée à la partie quadratique

$$Q(x,y,z)=xy+xz+yz$$

est la suivante :

$$A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Calcul des valeurs propres

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\lambda & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3+\frac{3}{4}\lambda+\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}\left(\lambda-1\right)\left(2\lambda+1\right)^2$$

avec $Sp\left(A\right)=\left(1,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$.

La surface $\mathbf{\Sigma}$ est soit une hyperboloïde à une ou deux nappes, soit un cone.

Vecteur propre associé à 1 :

$$A(\overrightarrow{V_1})=\overrightarrow{V_1}\Longrightarrow\overrightarrow{V_1}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Vecteurs propres associés à $-\frac{1}{2}$:

$$A(\overrightarrow{V_2})=-\frac{\overrightarrow{V_2}}{2}\Longrightarrow\quad\overrightarrow{V_2}=\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{V_3}=\overrightarrow{V_1}\wedge\overrightarrow{V_2}=\left(-\frac{2}{\sqrt{6}},+\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

Matrice de passage : $\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} x &= \frac{X}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{2}Z}{\sqrt{3}} \\ y &= \frac{X}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}Y}{2} + \frac{\sqrt{2}Z}{\sqrt{3}} \\ z &= \frac{X}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{2}Y}{2} + -\frac{\sqrt{2}Z}{2} \end{aligned}$$

On a donc l'expression de Σ dans la base des vecteurs propres :

$$X^2 - \frac{Y^2}{2} - \frac{Z^2}{2} + \frac{2X}{\sqrt{3}} + \sqrt{2}Y + \frac{2\sqrt{2}Z}{\sqrt{3}} + 1 = 0$$

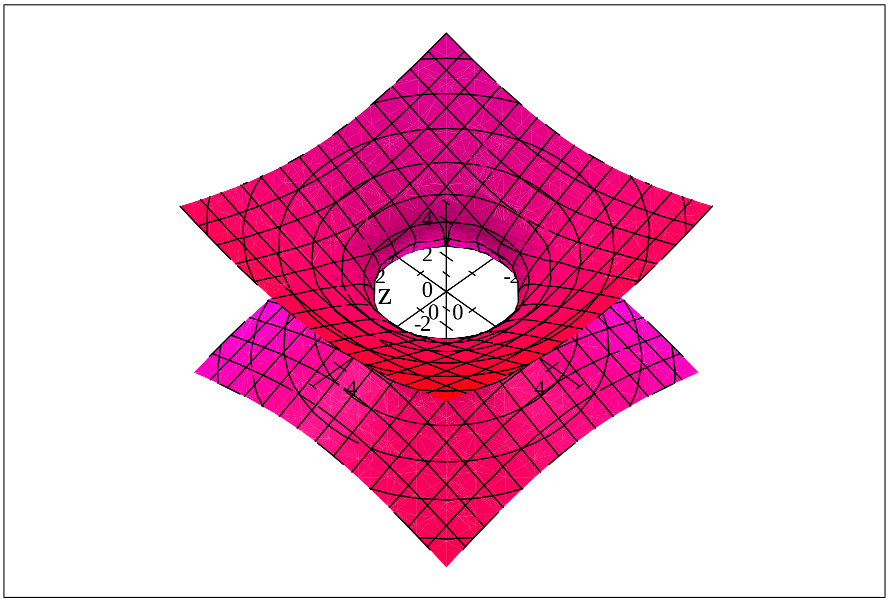
$$X^2 - \frac{Y^2}{2} - \frac{Z^2}{2} + \frac{2X}{\sqrt{3}} + \sqrt{2}Y + \frac{2\sqrt{2}Z}{\sqrt{3}} + 1 = 0$$

$$\left(X + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(Y \ - \sqrt{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(Z \ - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 + 2 = 0$$

En posant : $\left(X + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \widetilde{X}$, $\left(Y \ - \sqrt{2}\right) = \widetilde{Y}$ et $\left(Z \ - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) = \widetilde{Z}$

On obtient : $\widetilde{X}^2 - \frac{1}{2}\widetilde{Y}^2 - \frac{1}{2}\widetilde{Z} + 2 = 0$ ou encore

$$\frac{1}{4}\widetilde{Y}^2 + \frac{1}{4}\widetilde{Z}^2 - \frac{1}{2}\widetilde{X}^2 = 1$$



4
2
0
-2
Z
0
0
4
4

2) Nature de la quadrique : $xz + yz = 1$

Matrice associée à la quadrique

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Valeurs propres : $\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0$

Vecteurs propres $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 0$

Vecteurs propres: $\left\{ \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

Matrice de passage :

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

On a : $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(X - Y - Z), y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(X - Y + Z), \; z = (X + Y)$

On obtient l'expression suivante :

$$\sqrt{2}X^2 - \sqrt{2}Y^2 = \frac{2}{3}$$

La quadrique donnée est un **cylindre hyperbolique**.

ii) Equation du plan tangent au point $M_0(1,0,1)$

Le vecteur normal à la quadrique : $\overrightarrow{N} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Soit $M \in T_g(M_0) \Longrightarrow \overrightarrow{M_0M} \perp \overrightarrow{N} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z-1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$x + y + z = 2$$

iii) On a la paramétrisation évidente de la quadrique

$\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \dfrac{1}{u+v} \end{pmatrix} \Longrightarrow \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{(u+v)^2} \end{pmatrix}, \; \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{(u+v)^2} \end{pmatrix}$

$E=\left\|\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\right\|^2=1+\dfrac{1}{(u+v)^4}$

$F=\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}.\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}=\dfrac{1}{(u+v)^4}$

$G=\left\|\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\right\|^2=1+\dfrac{1}{(u+v)^4}$

Au point $M_0(1,0,1)\Longrightarrow E=2,\ F=1,\ G=2$

$\Longrightarrow\Phi_1(M_0)=2\lambda^2+2\lambda\mu+2\mu^2$.

3) Possibles Natures de la quadrique :

$$\boxed{\mathbf{xz+yz+xy+z+1=0}}$$

Matrice associée à la quadrique :

$$\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$$

Valeurs propres : $-1,-1,+2$

$\Longrightarrow$ donc la surface donnée est soit une hyperboloïde

à une ou deux nappes, soit un cône.

On une quadrique à centre

$\nabla f=(z+y,x+z,x+y+1)=\overrightarrow{0}$

$\Longrightarrow\Omega=\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)\Longrightarrow f\ \ (\Omega)\ \ =\dfrac{5}{4}$

On fait le changement d'origine en posant :

$x=\left(X-\dfrac{1}{2}\right),\ y=\left(Y-\dfrac{1}{2}\right),\ z=\left(Z+\dfrac{1}{2}\right)$

$$\Longrightarrow\qquad\boxed{XY+XZ+YZ+\frac{5}{4}=0}.$$

On a finalement : $\boxed{X^2+Y^2-Z^2=\dfrac{5}{4}}$

c'est une hyperboloïde à une nappe

ii) On a la paramétrisation évidente de la quadrique

$$\varphi(u,v)=\begin{pmatrix}u\\v\\-\dfrac{1+uv}{1+u+v}\end{pmatrix}$$

iii) Première forme fondamentale :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}=\begin{pmatrix}1\\0\\\dfrac{1-v-v^2}{(1+u+v)^2}\end{pmatrix},\ \frac{\partial\varphi}{\partial v}=\begin{pmatrix}0\\1\\\dfrac{1-u-u^2}{(1+u+v)^2}\end{pmatrix}$$

Au point $M_0\,(0,0,-1)$, on a : $u=v=0$

$$\Longrightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial u}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ \frac{\partial\varphi}{\partial v}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$E=\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right\|^2=2,\ F=\frac{\partial\varphi}{\partial u}.\frac{\partial\varphi}{\partial v}=\ 1, G=\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right\|^2=2$$

Au point $M_0(1,0,1)\Longrightarrow E=2,\ F=1,\ G=2$

$$\Phi_1(M_0)=2\lambda^2+2\lambda\mu+2\mu^2$$

iv) On calcule le gradient de la fonction $f(x,y)=\mathbf{xz}+\mathbf{yz}+\mathbf{xy}+\mathbf{2y}+\mathbf{1}$

grad $f(x,y)=(z+y,\ z+x, x+y+1)$

On constate que le gradient est nul seulement au point : $M_0\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

mais le point $M_0\notin\mathbf{\Sigma}$, $\mathbf{\Sigma}$ est une surface régulière

6) **I)** On a la paramétrisation évidente suivante :

$$M(u,v)=\begin{cases}x=u\\y=v\\z=\dfrac{1+u^2}{4v},\end{cases}\Longrightarrow \frac{\partial M}{\partial u}=\begin{cases}1\\0\\\dfrac{u}{2v}\end{cases},\ \frac{\partial M}{\partial v}=\begin{cases}0\\1\\-\dfrac{1+u^2}{4v^2}\end{cases}$$

$$\Longrightarrow E=\left\|\frac{\partial M}{\partial u}\right\|^2=1+\frac{u^2}{4v^2},\ F=\frac{\partial M}{\partial u}.\ \frac{\partial M}{\partial v}=-\frac{u\left(1+u^2\right)}{8v^3}$$

$$G=\left\|\frac{\partial M}{\partial v}\right\|^2=1+\frac{\left(1+u^2\right)^2}{16v^4}$$

II) Matrice associée à la quadrique

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-2\\0&-2&0\end{pmatrix}$$

Valeurs propres : $1,2,-2$ Matrice de passage :

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}\\0&\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow x = X,\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(Z - Y\right),\ z = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(Y + Z\right)$$

$$\Longrightarrow X^2 - 2\left(Z - Y\right)\left(Y + Z\right) + 1 = 0$$

$$X^2 + 2Y^2 - 2Z^2 = -1$$

III) Nature de la quadrique : On a une **hyperboloïde à deux nappes**

6) $\boxed{x^{\,2} + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz + 3x - y + z + 1 = 0}$

Matrice associée

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Valeurs propres : $\mathbf{1, 1} \pm \sqrt{2}$

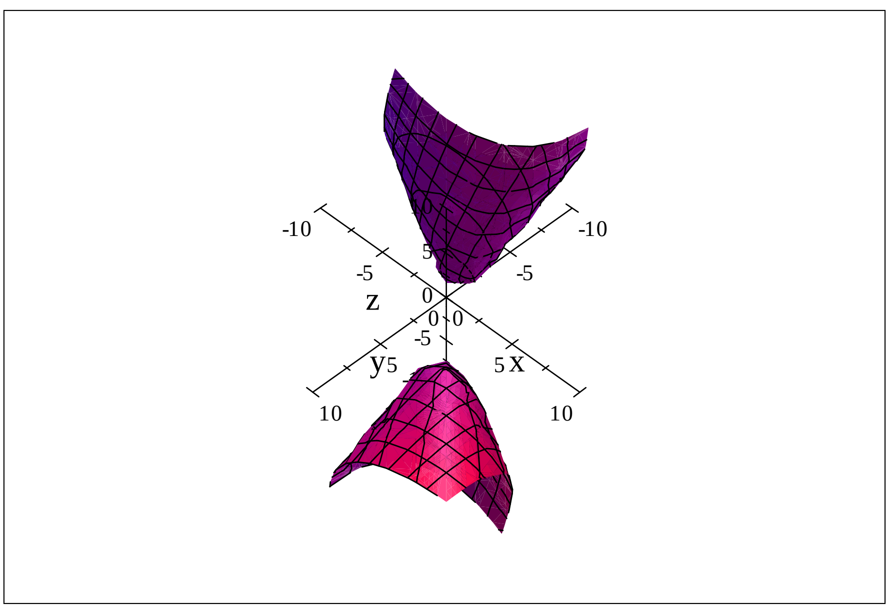
Vecteurs propres :

$\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \sqrt{2} + 1,\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow 1,\ \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow 1 - \sqrt{2}$

$\Longrightarrow$

$$X^2 + \left(1 + \sqrt{2}\right)Y^2 - \left(\sqrt{2} - 1\right)Z^2 = -\frac{3}{4}$$

On a ainsi une **hyperboloïde à deux nappes**.



Autre méthode :

Les trois valeurs sont non nulles, on a donc un quadrique à centre dont on se propose de calculer les coordonnées

On calcule le gradient de la fonction f .

$\overrightarrow{\nabla f\ (x,y,z)} = (2x - 2y + 2z + 3,\ 2y - 2x - 1\ , 2z + 2x + 1\quad)$

il faut résoudre l'équation $\overrightarrow{\nabla f\ (x,y,z)} = 0$

On obtient le système d'équation à trois inconnues

$$\left\{\begin{array}{c} 2x - 2y + 2z + 3 = 0 \\ 2y - 2x - 1 = 0 \\ 2z + 2x + 1 = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} 2x - 2y + 2z = -3 \\ 2y - 2x = 1 \\ 2z + 2x = -1 \end{array}\right.$$

Ce qui donne : $\Omega = \left(\dfrac{1}{2}\ ,\ 1,\ -1\right);\quad f\left(\Omega\right) = \dfrac{3}{4}$

On a ainsi l'équation canonique de la quadrique

$$\boxed{X^2 + \left(1+\sqrt{2}\right)Y^2 - \left(\sqrt{2}-1\right)Z^2 = -\ \ f\left(\Omega\right) = -\tfrac{3}{4}}$$