Table des matières

Extréma d'une fonction de plusieurs variables

Definition 1 *Soit a et b deux points de $\mathbb{R}^n$. On appelle segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}^n$, l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}^n$ de la forme*

$$x = (1 - \lambda)\, a + \lambda b, \quad \lambda \in [0.1]$$

Definition 2 *Une partie $E \subset \mathbb{R}^n$ est dite convexe, si pour tout couple a , b de E, le segment $[a, b] \subset E$.*

Formule des accroissements finis

Soit f une fonction difféntiable d'une partie convexe $E \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

Soit x et $x + h$ deux points de E et g l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R}^n \\ t & \longmapsto & x + th = (x_1 + th_1, ..., x_n + th_n) \end{array}$$

La **jacobienne** associée à l'application f a une ligne et n colonnes

$$\left(\frac{\partial f\,(x)}{\partial x_1}, \ldots.., \frac{\partial f\,(x)}{\partial x_n}\right)$$

La matrice de **Jacobi** associée à l'application g a n lignes et une seule colonne

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ . \\ . \\ h_n \end{pmatrix}$$

$$F'(x) = \left(\frac{\partial f\,(x)}{\partial x_1}, \ldots.., \frac{\partial f\,(x)}{\partial x_n}\right) \quad = h_1 \frac{\partial f\,(x)}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial f\,(x)}{\partial x_2} + \ldots.. + h_n \frac{\partial f\,(x)}{\partial x_n}$$

Soit alors l'application $F = fog$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$F(t) = f(g(t)) = f(x_1 + th_1, \ldots\ldots., x_n + th_n)$$

F est dérivable sur $[0, 1]$,on peut lui appliquer la formule des accroissement finis

Il existe $\theta \in [0, 1]$ tel que : $F(1) - F(0) = F\prime(\theta)$

Ce qui donne :

$$\boxed{f(x + h) - f(x) = \sum_{i=1}^{i=n} h_1 \frac{\partial f\,(x + \theta h)}{\partial x_i}}$$

Formule de Taylor

Théorème 1 *Si f admet un extremum en un point a et si f admet des dérivées partielles d'ordre 1, on a alors :* $D_i f(a) = \dfrac{\partial f(a)}{\partial x_i} = 0$, *pour* $i = 1, \ldots., n$, *ou encore* $\overrightarrow{\nabla f(a)} = \overrightarrow{\text{grad}\, f(a)} = \overrightarrow{0}$.

Démonstration 3 *Il suffit de considérer la fonction d'une seule variable*

$$x_i \longrightarrow \varphi\,(a_1, a_2, \ldots., x_i, \ldots.a_n)$$

En effet si f admet un maximum au point $a \Longrightarrow \varphi$ admet un maximum en a_i, ce qui implique $\varphi'(a_i) = 0$, d'où $D_i f(a) = \dfrac{\partial f(a)}{\partial x_i} = 0$

Remarque :

Les conditions $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0,\ i \in [1, 2, .., n]$ sont donc nécessaires pour l'existence d'un extremum mais pour les fonctions à plusieurs variables ces conditions ne sont pas suffisantes

Exemple : $f(x, y) = x^2 - y^2$

on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y.$

Au point $(0, 0)$, $f(0, 0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$

Pourtant le point $(0, 0)$ n'est pas un extremum, en effet pour :

$x \neq 0, y = 0 \Longrightarrow f(x, y) = x^2$ donc $f(x, y) > f(0, 0)$

$x = 0,\ y \neq 0 \Longrightarrow f(x, y) = -y^2$ donc $f(x, y) < f(0, 0)$

Fonction à deux variables

Utilisons la formule de **Taylor** jusqu'à l'ordre 3 au voisinage de (x_0, y_0) avec

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$$

On a

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(x_0, y_0) &= \frac{1}{2!}\left[h^2 \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} + 2hk \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} + k^2 \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}\right] + \\ & \frac{1}{3!}\left[h \frac{\partial f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)}{\partial x} + k \frac{\partial f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)}{\partial y}\right]^{[3]} \end{aligned}$$

Ainsi pour h et k trés proches de 0, le signe de $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ dépend de

$$h^2\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}+k^2\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}=rh^2+2hks+k^2t$$

avec les notations suivantes :

$$\boxed{r=\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2},\ \ s=\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}\ \text{ et } t=\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}}$$

Si $\Delta = s^2-rt<0$, $f(x,y)-f(x_0,y_0)$ garde un signe constant $\Longrightarrow$

on a un **extremum**

Si $r<0 \Longrightarrow$ on a **un maximum.**

Si $r>0 \Longrightarrow$ on a **un minimum**

Si $\Delta = s^2-rt>0$, $f(x,y)-f(x_0,y_0)$ change de signe

$\Longrightarrow$ **on n'a pas d'extremum**.

Si $\Delta = s^2-rt=0$,il faudrait poursuivre le développement de **Taylo**r.

Mars 2018 Série d'exercices

Exercice 1

Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$$

a) Montrer que f admet un seul point critique $M = (1,2)$.

b) Donner la nature de ce point.

Exercice 2

Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 6x^2 + 6y^2$$

a) Montrer que f admet quatre points critiques .

b) Donner la nature de ces points.

Exercice 3

Etudier les extréma de la fonction suivante :

$$\boxed{f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1}$$

Exercice 4

Soit un **parallélipipède** rectangle de cotés x, y et z.

Sachant que la somme des cotés est constante ($x + y + z = L$)

comment choisir x, y et z pour que le volume du **parallélipipède**

soit maximal

Exercice 5

Montrer que la fonction : $f(x,y) = x^2 + y^2 + (ax+by+c)^2$

admet un minimum et trouver la valeur de ce minimum.

Exercice 6

Soit $\pi)$ le plan défini par **:** $\mathbf{z} = x + y + 1$

Trouver le point du plan $\pi)$ le plus proche de l'origine.

Exercice 7

Déterminer les extrémums de $f \ : \ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dans le cas suivant

$$f(x, y = x^3 + y^3 - 3xy$$

Solution

Exercice 1

$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$
$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2 \ = 0 \Longrightarrow x = 1$
$\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y - 4 = 0 \Longrightarrow y = 2$
Le point $(1,2)$ est un point critique avec $f(1,2) = -5$
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 = r, \ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 = t, \ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 = s$
$\Delta = s^2 - rt = -4 < 0$, on a un extremum.

$r = 2 > 0$, on a un minimum

Autre méthode : on a

$f(x,y) = (x-1)^2 + (y-2)^2 - 5 \geq -5$

Au point $(1,2)$,on a un minimum global.

Exercice 2

$f(x,y) = x^3 + y^3 - 6x^2 + 6y^2$
$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 12x = 3x(x-4) = 0 \Longrightarrow x = 0$ ou $x = 4$
$\dfrac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 + 12y = 3y(y+4)0 \Longrightarrow y = 0$ ou $y = -4$
Les points critiques sont les suivants :

$O\,(0,0)\,,A\,(4,0)\,,B\,(0,-4)$ et $C(4,-4)$
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x - 12, \ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y + 12, \ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 = \mathbf{s}$
Au point O, on a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \mathbf{r} = -12, \ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(O,O) = \mathbf{t} = 12$

$\Delta = s^2 - rt = 144 > 0$, il n'y a pas d'extremum

Au point A, on a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(4,0) = r = 12$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(4,O) = t = 12$

$\Delta = s^2 - rt = -144 < 0$, $r > 0$, on a un minimum.

Au point B, on a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,-4) = r = -12$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(O,-4) = t = -12$

$\Delta = s^2 - rt = -144 < 0$, $r > 0$, on a un minimum.

Au point C, on a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(4,-4) = r = 12$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(4,-4) = t = -12$

$\Delta = s^2 - rt = 144 < 0$, il n'y a pas d'extremum.

Sachant que $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x,1) = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} x^3 - 6x^2 = +\infty$, $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x,1) = -\infty$

il n'y a pas d'extremum global.

Exercice 3

$$f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y + 3 = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x + 2y - 2 = 0$$

La fonction a un seul point critique : $A(-\dfrac{4}{3}, \dfrac{1}{3})$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 = r$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 = t$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1 = s$

$\Delta = s^2 - rt = -3 < 0$, $r > 0$, on a donc un minimum.au point A.

et ce minimum est égal à : $f(-\dfrac{4}{3}, \dfrac{1}{3}) = -\dfrac{4}{3}$

Méthode matricielle : On a la hessienne

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Valeurs propres : $3, 1$

vecteurs propres normalisés : $\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \leftrightarrow 1, \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} \leftrightarrow 3$

On a alors : $(h,k) = \begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X\\y\end{bmatrix} \Longrightarrow h = \frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y),\ k = \frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y)$

$$f(h,k) = -\frac{4}{3} + h^2 - hk + k^2$$

En utilisant le changement de variables, on obtient

$$f(X,Y) = -\frac{4}{3} + X^2 + 3Y^2 \Longrightarrow f(X,Y) \succeq -\frac{4}{3}$$

On a donc un minimum global

Exercice 4

Le volume du **parallélipipède** rectangle est le suivant

$$V(x,y) = xy\,(a-x-y)$$

$\frac{\partial V}{\partial x}(x,y) = y\,(a-x-y) - xy = y(a-2x-y) = 0 \Longrightarrow y = 0$ ou $a-2x-y=0$

$\frac{\partial V}{\partial y}(x,y) = x\,(a-x-y) - xy = x(a-x-2y) = 0 \Longrightarrow x = 0$ ou $a-x-2y=0$

ce qui donne comme solution : $x = y = \frac{a}{3}$

Les solutions où l'on a : $x=0$ ou $y=0$ sont à rejeter

Pour $A\left(\frac{a}{3},\frac{a}{3}\right)$, on calcule les dérivées partielles d'ordre 2

$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x,y) = -2y,\ \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}(x,y) = a-2x-2y,\ \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(x,y) = -2x$

d'où : $r = -\frac{2a}{3}$ $\quad s = -\frac{a}{3}$ et $t = -\frac{2a}{3} \Longrightarrow \Delta' = -\frac{a^2}{3} < 0$

et comme r est négatif, on a ainsi un volume maximal pour

$x = y = z = \frac{a}{3}$ (Les arêtes sont égales, on a un **cube**).

Exercice 5

On commence par calculer les dérivées partielles d'ordre 1

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x + 2a(ax+by+c) = 2\left[\left(1+a^2\right)x + aby + ac\right]$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2y + 2b(ax+by+c) = 2\left[abx + \left(1+b^2\right)y + bc\right]$$

Pour la recherche des points singuliers de la fonction étudiée, on doit avoir :

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0$$

Ce qui donne l'existence d'un seul point critique :

$$M_0 = \left(-\frac{ac}{1+a^2+b^2}, -\frac{bc}{1+a^2+b^2}\right)$$

Pour connaitre la nature de ce point, on se doit de calculer les dérvées partielles d'ordre 2

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 2\left(1+a^2\right) = r,\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 2\left(1+b^2\right),\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = 2ab$$

avec ces résultats, on a :

$$s^2 - rt = 4a^2b^2 - 4\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right) = -4\left(1+a^2+b^2\right)$$

$\mathbf{s^2 - rt} < 0$, $\mathbf{r > 0} \Longrightarrow$ on a donc un **minimum** au point M_0.

Calcul du minimum :

$$\begin{aligned} f(M_0) &= \left(\frac{bc}{1+a^2+b^2}\right)^2 + \left(\frac{ac}{1+a^2+b^2}\right)^2 + \left(-\frac{a^2c}{1+a^2+b^2} - \frac{b^2c}{1+a^2+b^2} + c\right)^2 \\ &= \frac{b^2c^2}{\left(1+a^2+b^2\right)^2} + \frac{a^2c^2}{\left(1+a^2+b^2\right)^2} + \frac{c^2}{\left(1+a^2+b^2\right)^2} \\ &= \frac{c^2}{1+a^2+b^2} \end{aligned}$$

Exercice 6

Soit $M \in \pi) \Longrightarrow M$ a pour coordonnées $(x, y, x+y+1)$

ce qui donne : $d(O,M) = \sqrt{x^2+y^2+(x+y+1)^2}$

Pour trouver le point M du plan le plus proche de l'origine, il suffit d'utiliser les résultats de l'exercice **5** ave $a=b=c=1$, soit comme solution

$$M\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$$

Exercice 7

$f(x,y) = x^3+y^3-3xy$,

La fonction f n'a pas d'extrémum global, car

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x,1) = \lim_{x\longrightarrow+\infty} x^3-3x = +\infty, \lim_{x\longrightarrow-\infty} f(x,1) = -\infty$$

Calcul des dérivées partielles

$$\frac{\partial\left(x^3+y^3-3xy\right)}{\partial x} = 3x^2-3y = 0 \Longrightarrow x^2 = y$$

$$\frac{\partial\left(x^3+y^3-3xy\right)}{\partial y} = 3y^2-3x = 0 \Longrightarrow y^2 = x$$

On a donc deux points critiques : $\mathbf{O} = (\mathbf{0},\mathbf{0})$ **et** $\mathbf{A}(\mathbf{1},\mathbf{1})$

$$\frac{\partial^2\left(x^3+y^3-3xy\right)}{\partial x^2} = 6x \Longrightarrow \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2} = 0 = r, \quad \frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial x^2} = 6 = r$$

$$\frac{\partial^2\left(x^3+y^3-3xy\right)}{\partial y^2} = 6y \Longrightarrow \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y^2} = 0 = t, \quad \frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial y^2} = 6 = t$$

$$\frac{\partial^2\left(x^3+y^3-3xy\right)}{\partial x\partial y} = -3 = s \Longrightarrow$$

Etude à l'origine :

$f(h,k)-f(0,0) = -3hk++\varepsilon(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$

$\Delta' = 9$

L'origine est point col ou point selle

Etude au point $A(1,1)$:

$f(h,k)-f(1,1)=3\left(h^2-hk+k^2\right)+\varepsilon\left(h,k\right)\sqrt{h^2+k^2}\Longrightarrow\Delta'=-27,\ r=6$

Au point $(1,1)$, on a un minimum local égal à -1.

Formes différentielles
Intégrales curvilignes

I) Formes différentielles

Définition 1 : *On appelle forme différentielle définie sur l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, une application ω de Ω dans le dual de $\mathbb{R}^n$.*

Notation : dual de $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n)^*$

C'est donc une application qui prend ses valeurs dans un espace de formes linéaires. La différentielle d'une fonction à plusieurs variables va nous fournir un exemple.

Définition 2 : Soit

$$f \quad : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

la fonction est de classe C^1 sur l'ouvert Ω .

la différentielle de f notée df est définie par :

$$x \in \ \Omega \to df_x = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_i$$

Généralement, on note par $(dx_1, dx_2, ..., dx_n)$ la base duale de la base canonique ($e_1, e_2, ..., e_n$).

Ainsi pour tout $x \in \Omega$, la forme différentielle $\omega(x)$ va s'écrire comme suit :

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i (x_1, x_2, ..., x_n) \, dx_i$$

où les coefficients a_i dépendent du point $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Définition 3 : *La forme différentielle ω est de classe C^k sur l'ouvert Ω si les fonctions a_i sont de classe C^k sur l'ouvert Ω.*

II) Forme différentielle exacte

Définition 4 : *La forme différentielle ω de classe C^0 sur l'ouvert Ω est exacte s'il existe une fonction f de classe C^1 sur l'ouvert Ω telle que : $\omega = df$.*

La fonction f est une primitive de la forme différentielle ω.

Autre formulation : Soit le champ de vecteurs

$$\boxed{\overrightarrow{V(x)} = (a_1(x_1, x_2, ..., x_n), a_2(x_1, x_2, ..., x_n), .., a_n(x_1, x_2, ..., x_n))}$$

ω est une forme différentielle exacte si elle dérive d'une fonction

potentielle f , autrement dit :

$$\overrightarrow{\text{grad }\ f\ (x)} = \overrightarrow{\nabla f\ (x)} = \overrightarrow{V(x)}$$

Théorème 1 : Soit P et Q deux fonctions de classe C^1 sur l'ouvert Ω *simplement connexe* de $\mathbb{R}^2$, alors la forme différentielle définie par :

$$\omega\,(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

est exacte ssi :

$$\boxed{\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x},\ \forall\,(x, y) \in \nleq}$$

Remarque : $\nleq$ est simplement connexe, cela veut dire sans trou et constitué d'un seul morçeau.

Théorème 2 : Soit P , Q et R trois fonctions de classe C^1 sur l'ouvert Ω *simplement connexe* de $\mathbb{R}^3$, alors la forme différentielle définie par :

$$\boxed{\omega\,(x, y, z) = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3}$$

est exacte ssi $\forall\,(x,y,z)\in \nleq$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial R(x,y)}{\partial y} &= \frac{\partial Q(x,y)}{\partial z}\\ \frac{\partial P(x,y)}{\partial z} &= \frac{\partial R(x,y)}{\partial x}\\ \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} &= \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\end{aligned}$$

Autre formulation : La forme différentielle $\omega\,(x,y,z)$ définie sur $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ est exacte si

- Ω est simplement connexe

- le champ de vecteurs $V=(P,Q,R)$ est irrotationnel ie :

$$\overrightarrow{rotV}=\overrightarrow{\nabla\wedge V}=\overrightarrow{0}\Longrightarrow\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P(x,y,z) & Q(x,y,z) & R(x,y,z)\end{vmatrix}=\overrightarrow{0}$$

Remarque : Si l'on a seulement :

$$\overrightarrow{rotV}=\overrightarrow{\nabla\wedge V}=\overrightarrow{0}$$

et l'ouvert Ω n'est pas simplement connexe, on dit que ω est une forme différentielle **fermée**.

III) Facteur intégrant :

Si la forme ω n'est pas exacte mais que la forme

$$f\,(x_1,x_2,..,x_n)\,\omega$$

l'est, on dit que f est un facteur intégrant de ω.

IV)Intégrales curvilignes

Définition 5 : On considère une forme différentielle ω définie continue sur l'ouvert sur l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ par :

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, x_{2,\ldots}, x_n)\, dx_i,\ \ x \in \mathbb{R}^n$$

On considère une courbe paramétrée (Γ) tracée dans Ω avec le paramétrage suivant :

$$\overrightarrow{OM(t)} = \sum_{i=1}^{n} x_i(t)\overrightarrow{e_i}\ ,\ \ t \in [a, b]$$

On appelle intégrale curviligne de la forme différentielle ω l'intégrale définie par :

$$\int_\Gamma \omega = \int_a^b \omega(M(t))\left(\frac{dM(t)}{dt}\right) = \int_a^b \sum_{i=1}^{n} a_i(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))\, x_i^{'} dt$$

Remarque : Dans le cas où $n = 2$ avec $\omega = Pdx + Qdy$, on a :

$$\int_\Gamma \omega = \int_a^b P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)dt$$

Propriétés de l'intégrale curviligne :

Proposition 1 : L'intégrale curviligne de la forme ω sur la courbe Γ est indépendante du paramétrage choisi sur la courbe Γ, a condition de conserver la même orientation de la courbe.

Proposition 2 : Si on change l'orientation de la courbe Γ, l'intégrale curviligne de la forme ω change de signe, ce que l'on peut représenter par

$$\int_{\Gamma^+} \omega = -\int_{\Gamma^-} \omega$$

Proposition 3 : (Relation de **Chasles**) Si D est un point de la courbe

$(\Gamma) = \left(\widehat{AB}\right)$, on a l'égalité :

$$\int_{\widehat{AB}} \omega = \int_{\widehat{AD}} \omega + \int_{\widehat{DB}} \omega$$

Forme différentielle exacte

Proposition 4 : Si ω est une forme différentielle exacte sur l'ouvert Ω et si f est une primitive de ω (ie $\omega = df$), alors pour toute courbe $(\Gamma) = \left(\widehat{AB}\right)$ de classe C^1, d'origine A et d'extrémité B tracée dans Ω, on a :

$$\int_{\widehat{AB}} \omega = f(B) - f(A)$$

Corollaire : Si ω est une forme différentielle exacte sur l'ouvert Ω, alors pour toute courbe Γ **fermée** de classe C^1 tracée dans Ω on a :

$$\oint \omega = 0$$

Formule de Green-Riemann

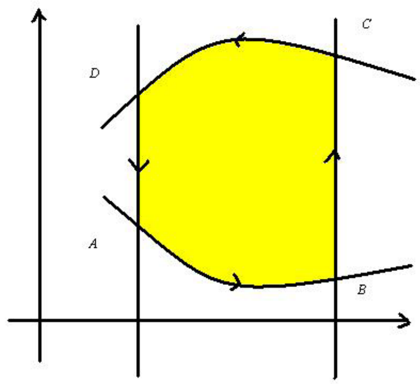
Théorème : On considère une forme différentielle continue définie par

$$\omega(x, y) = P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy,\ \forall (x, y) \in \Omega$$

et un compact $K \subset \Omega$ dont la frontière Γ soit de classe C^1 par morceaux orientée dans le sens direct , on a :

$$\int_{\Gamma} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = \iint_{K} \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dxdy$$

Démonstration :



On suppose avoir un compact K schématisé par le dessin ci-dessus.

Donc il existe deux fonctions de classe C^1, φ et ψ définies sur $[a, b]$ telles que :

$$K = \left\{(x, y) \in R^2 : \ a \preceq x \leq b, \ \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\right\}$$

La frontière du compact K comprend alors :

- l'arc $\overset{\frown}{AB}$ d'équation $y = \varphi(x)$.
- la verticale BC.
- l'arc $\overset{\frown}{CD}$ d'équation $y = \psi(x)$.
- la verticale DA orientèe vers le bas.

On a ainsi :

$$\int_\Gamma P(x, y)\, dx = \int_a^b P(x, \varphi(x))dx + \int_b^a P(x, \psi(x))dx$$

car sur les verticales BC et DA, l'élément différentiel dx est nul.

Avec l'intégrale double $\iint\limits_K \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dxdy$, on a aussi :

$$\iint\limits_K \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dy \right) dx = \int_a^b \left[P(x,y)\right]_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dx$$

Ce qui donne : $\int_\Gamma P\left(x,y\right)dx = -\iint\limits_K \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dxdy$

En procédant avec la même approche, on obtient :

$$\int_\Gamma Q\left(x,y\right)dy = \iint\limits_K \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} dxdy$$

Ce qui donne la formule de *Green-Riemann*.

Application : Calcul d'une aire plane

Soit un compact $K \subset \Omega$ dont la frontière Γ soit de classe C^1 par morceaux orientée dans le sens direct , alors on peut calculer l'aire S de K au moyen de l'une des intégrales curvilignes suivantes :

$$S = \frac{1}{2}\oint\limits_\Gamma xdy - ydx = \oint\limits_\Gamma xdy = -\oint\limits_\Gamma ydx$$

Pour faire la démonstrtion, il suffit d'appliquesr la formule

de **Green-Riemann**.

$S = \frac{1}{2}\oint\limits_\Gamma xdy - ydx$, on a : $P(x,y) = -\frac{y}{2}$ et $Q(x,y) = \frac{x}{2} \Longrightarrow$

$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = -\frac{1}{2}$, $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{2}$

$\Longrightarrow S = \frac{1}{2}\oint\limits_\Gamma xdy - ydx = \iint \left(\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) dxdy = \iint\limits_K dxdy$

Exercices

Exercice 1

Soit la forme différentielle de degré 1 définie par :

$$\omega = \frac{2x}{y}dx - \frac{x^2}{y^2}dy$$

sur $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; y > 0\}$

Montrer que ω est fermée sur Ω.

Montrer que ω est exacte sur Ω

Trouver une primitive de ω.

Exercice 2

Soit la forme différentielle définie par

$$\omega = \frac{(z+y)\,dx + (z-x)\,dy - (x+y)\,dz}{(y+z)^2}$$

sur une partie E de $\mathbb{R}^2$ ne rencontrant pas le plan d'équation $y+z=0$.

Montrer que ω est exacte et calculer sa primitive.

Exercice 3

Trouver la fonction $f \; : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 vérifiant $f(0) = 0$

de la forme différentielle exacte ω définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{2xy}{(1+x^2)^2}\mathbf{dx} + \mathbf{f(x)dy}$$

Exercice 4

On donne la forme différentielle

$$\omega(x,y) = \left(x^2 + y^2 + 2x\right)dx + 2ydy$$

Montrer qu'elle admet un facteur intégrant $\mu\;(x)$.

Déterminer alors une fonction f (primitive) admettant $\mu\ (x)\,\omega(x,y)$ comme différentielle.

Exercice 5

Soit $\varphi \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ avec $\varphi(0)=0$ et le champ de vecteurs

$$\overrightarrow{V} = \left(\left(1+x^2\right)\varphi(x)\,,\ -2xy\varphi(x)\,, -z\right)$$

Déterminer φ pour que $\overrightarrow{V}$ dérive d'une potentiel $f=f(x,y,z)$ et calculer f.

Exercice 6

Soit la forme différentielle

$$\omega(x,y,z) = 2xzdx - 2yzdy - \left(x^2-y^2\right)dz$$

Trouver un facteur intégrant de la forme $f(z)$ ($f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 7

Vérifier les relations suivantes où $\boldsymbol{\varphi}$ est une fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$
et $\overrightarrow{V}\ (x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z),\ R(x,y,z)\ )$ un champ de vecteurs

$\operatorname{div}\left(\boldsymbol{\varphi}\overrightarrow{V}\right) = \boldsymbol{\varphi}\operatorname{div}\left(\overrightarrow{V}\right) + \overrightarrow{\operatorname{grad}\boldsymbol{\varphi}}\ .\overrightarrow{V}$

$\overrightarrow{Rot\left(\boldsymbol{\varphi}\overrightarrow{V}\right)} = \boldsymbol{\varphi}.Rot\left(\overrightarrow{V}\right) +\ \overrightarrow{\operatorname{grad}\boldsymbol{\varphi}}\ \Lambda\ \overrightarrow{V}.$

Exercice 8

Calculer l'intégrale curviligne $\mathbf{I} = \oint\limits_C y^2dx + x^2dy$ où $\mathbf{C}$ est la courbe fermée définie implicitement par $\mathbf{x^2+y^2-2x=0}$ et orientée dans le sens trigonométrique.

Exercice 9

Soit $\overrightarrow{V}(x,y) = \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$ un champ de vecteurs.

Calculer la ciculation le long du cercle de centre O et de rayon r.

En déduire que la forme différentielle ω n'est pas exacte.

Exercice 10

Calculer l'intégrale curviligne de

$$\omega = x^2 dx - xydy$$

le long des contours suivants

- le segment de droite OB avec $O(0,0)$ *et* $B(1,1)$

- l'arc de parabole : $x = y^2$, $0 \leq x \leq 1$, orienté dans le sens

des x croissants.

Que peut-on conclure pour la forme ω.

Exercice 11

Soit la forme différentielle

$$\boldsymbol{\omega}\,(x,y) = (x+y)\mathbf{dx} + (\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathbf{dy}$$

Calculer l'intégrale curviligne $\oint_{AB} \omega$ le long de la **demi-cardioïde**

d'équation polaire : $\rho = 1 + \cos\theta$ pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi$

$$\boxed{:/swp55/temp/graphics/swp0000_{2.pdf}}$$

Calculer l'aire de la **cardioïde**

Calculer le périmètre de la **cardioïde**

Exercice 12

Soit la forme différentielle :

$$\boldsymbol{\omega}\,(x,y) = \mathbf{ydx} + \mathbf{aydy}$$

Calculer l'intégrale curviligne $\oint_{\Gamma} \omega$ le long du contour Γ limitant l'intersection des deux disques

$$x^2 + y^2 - 2x \preceq 0$$

$$x^2 + y^2 - 2y \preceq 0$$

$$\boxed{:/swp55/temp/graphics/swp0000_{3.pdf}}$$

Correction

Exercice 1

Soit $\omega = \frac{2x}{y}dx - \frac{x^2}{y^2}dy$ avec $P(x,y) = \frac{2x}{y}$ et $Q(x,y) = -\frac{x^2}{y^2}$

Ce qui donne : $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = -\frac{2x}{y^2}$ et $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = -\frac{2x}{y^2}$

La forme différentielle est donc une forme fermée

Comme $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ y > 0\}$ est un domaine simplement connexe

la forme différentielle est exacte.

Il existe alors une fonction f telle que : $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = \omega$

Ce qui donne : $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{y}$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2}$

$\Longrightarrow f(x,y) = \frac{x^2}{y} + C(y) \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2} + C'(y) = -\frac{x^2}{y^2}$

$\Longrightarrow C'(y) = 0$; donc : $f(x,y) = \frac{x^2}{y} + C$

Exercice 2

Soit le champ de vecteurs $\overrightarrow{V(x,y,z)} = \left(\frac{1}{(y+z)}, \frac{(z+y)}{(y+z)^2}; -\frac{(x+y)}{(y+z)^2}\right)$

Calcul de $\overrightarrow{Rot\ V}$

$$\overrightarrow{Rot\ V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{y+z} & \frac{(z-x)}{(y+z)^2} & -\frac{(x+y)}{(y+z)^2} \end{vmatrix} = \vec{0}$$

La forme est fermée, E étant simplement connexe $\Longrightarrow$

la forme est exacte, elle admet une primitive f telle que

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{1}{y+z} \Longrightarrow f(x,y,z) = \frac{x}{y+z} + C(y,z)$

$\Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = -\frac{x}{(y+z)^2} + \frac{\partial C}{\partial y}(y,z) = \frac{(z-x)}{(y+z)^2}$

$\Longrightarrow \frac{\partial C}{\partial y}(y,z) = \frac{z}{(y+z)^2}$

$\Longrightarrow C(y,z) = -\frac{z}{y+z} + K(z)$

$$f(x,y,z) = \frac{x-z}{y+z} + K(z)$$
$$\Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -\frac{x+y}{(y+z)^2} + K'(z) = -\frac{(x+y)}{(y+z)^2}$$
$$\Longrightarrow K'(z) = 0 \Longrightarrow K(z) = C.$$

Finalement, on a : $\quad f(x,y,z) = \dfrac{x-z}{y+z} + C$

Exercice 3

Si $\boldsymbol{\omega} = \dfrac{2xy}{(1+x^2)^2}\mathbf{dx} + \mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{dy}$ est une forme exacte, on a :

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2xy}{(1+x^2)^2}\right) = \frac{2x}{(1+x^2)^2} = \mathbf{f}'(\mathbf{x}) \Longrightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \int \frac{2xdx}{(1+x^2)^2}$$
$$\Longrightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{1+x^2} + C, \text{comme } \mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \Longrightarrow \mathbf{C} = \mathbf{1}$$

Ce qui donne comme solution finale : $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$

Exercice 4

On donne la forme différentielle

$$\mu\ (x)\,\omega(x,y) = \mu\ (x)\,(x^2+y^2+2x)\,dx + 2y\mu\ (x)\,dy$$

$\mu\ (x)\ \omega(x,y)$ est un forme différentielle exacte

donc :

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\ (x)\left(x^2+y^2+2x\right)\right) = \frac{\partial}{\partial x}2y\mu\ (x)$$

$2y\mu\ (x) = 2y\mu'\ (x) \Longrightarrow \mu\ (x) = \mu'\ (x) \Longrightarrow$

$$\boxed{\mu\ (x) = ke^x}$$

d'où : $\boxed{\mu\ (x)\,\omega(x,y) = e^x\,(x^2+y^2+2x)\,dx + 2y\ e^x dy}$

La forme différentielle $\mu\ (x)\,\omega(x,y)$ admet ainsi une primitive $f(x,y)$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= e^x\left(x^2+y^2+2x\right) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2y\ e^x \end{aligned}$$

On commence par intégrer la deuxième égalité : $f(x,y) = y^2e^x + C(x)$

En calculant la dérivée partielle de $f(x,y)$ par rapport à la variable x

on obtient :
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2e^x + C'(x) = e^x\left(x^2+y^2+2x\right)$
Ce qui donne : $C'(x) = e^x\left(x^2+2x\right) \Longrightarrow C(x) = x^2e^x + k$

Finalement : $f(x,y) = \left(x^2+y^2\right)e^x + k$

Exercice 5

$\overrightarrow{V}(x,y,z) = (\left(1+x^2\right)\varphi(x),\ -2xy\varphi(x), -z)$

Calcul de $\overrightarrow{Rot\ \overrightarrow{V}}$

$$\overrightarrow{Rot\ \overrightarrow{V}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \left(1+x^2\right)\varphi(x) & -2xy\varphi(x) & -z \end{vmatrix}$$
$$= 0\,\overrightarrow{i} + 0\,\overrightarrow{j} + \left(-2y\varphi(x) - 2xy\varphi'(x)\right)\overrightarrow{k}$$

Pour que le champ de vecteur $\overrightarrow{V}$ dérive d'une potentiel, on doit avoir :
$\overrightarrow{Rot\ \overrightarrow{V}} = \left(-2y\varphi(x) - 2xy\varphi'(x)\right)\overrightarrow{k} = 0 \Longrightarrow \quad \varphi(x) + x\varphi'(x) = 0$
$\Longrightarrow \dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = -\dfrac{1}{x} \Longrightarrow \ln(\varphi(x)) = -\ln(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x}\right) \Longrightarrow .\varphi(x) = \dfrac{1}{x}$
Ce qui donne : $\overrightarrow{V}(x,y,z) = \left(\dfrac{1+x^2}{x},\ -2y, -z\right)$

Calcul de la fonction "potentielle" :

Soit $f = f(x,y,z)$ telle que

$$\overrightarrow{\text{grad}\, f(x,y,z)} = \overrightarrow{V}(x,y,z)$$

On a alors : $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{1+x^2}{x},\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=-2y,\ \dfrac{\partial f}{\partial z}=-z$

$\Longrightarrow f(x,y,z)=-\dfrac{z^2}{2}+C(x,y)$

$\Longrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial C}{\partial y}(x,y)=-2y \Longrightarrow f(x,y,z)=-\dfrac{z^2}{2}-y^2+k(x)$

$\Longrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}=k'(x)=\dfrac{1+x^2}{x} \Longrightarrow f(x,y,z)=\ln x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{z^2}{2}-y^2+C$

Exercice 6

Avec $f(z)$ comme facteur intégrant, le champ de vecteur :

$\overrightarrow{V}(x,y,z)=(\ 2xzf(z),-2yzf(z),-\left(x^2-y^2\right)f(z))$

doit être irrotationnel

$$\overrightarrow{Rot\ \overrightarrow{V}}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 2xzf(z) & -2yzf(z) & -\left(x^2-y^2\right)f(z)\end{vmatrix}$$

$\overrightarrow{Rot\ \overrightarrow{V}}=(4yf(z)+2yzf\ '(z))\ \overrightarrow{i}+(4xf(z)+2xzf\ '(z))\overrightarrow{j}+0\overrightarrow{k}=\overrightarrow{0}$

On a alors : $2f(z)+zf\ '(z)=0 \Longrightarrow \dfrac{f\ '(z)}{f(z)}=-\dfrac{2}{z} \Longrightarrow f(z)=\dfrac{1}{z^2}$

Exercice 7.-

$$\begin{aligned}\varphi\overrightarrow{V}=(\varphi P,\varphi Q,\ \varphi R\ ) &\Longrightarrow \operatorname{div}\left(\varphi\overrightarrow{V}\right)=\frac{\partial\varphi P}{\partial x}+\frac{\partial\varphi Q}{\partial y}+\frac{\partial\varphi R}{\partial z}\\ &=\varphi\frac{\partial P}{\partial x}+P\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\varphi\frac{\partial Q}{\partial y}+Q\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\varphi\frac{\partial R}{\partial z}+R\frac{\partial\varphi}{\partial z}\\ &=\left(\varphi\frac{\partial P}{\partial x}++\varphi\frac{\partial Q}{\partial y}+\varphi\frac{\partial R}{\partial z}\right)+\left(P\frac{\partial\varphi}{\partial x}+Q\frac{\partial\varphi}{\partial y}+R\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\\ &=\varphi\operatorname{div}\left(\overrightarrow{V}\right)+\overrightarrow{\operatorname{grad}\varphi}\ .\overrightarrow{V}\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{Rot\ \varphi\overrightarrow{V}}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \varphi P & \varphi Q & \varphi R\end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial\varphi R}{\partial y}-\frac{\partial\varphi Q}{\partial z}\right)\overrightarrow{i}+\left(\frac{\partial\varphi P}{\partial z}-\frac{\partial\varphi R}{\partial x}\right)\overrightarrow{j}+\left(\frac{\partial\varphi Q}{\partial x}-\frac{\partial\varphi P}{\partial y}\right)\overrightarrow{k}$$

$$= \varphi\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\overrightarrow{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\overrightarrow{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\overrightarrow{k}\right]+$$
$$\left(R\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial y}-Q\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial z}\right)\overrightarrow{i}+\left(P\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial z}-R\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x}\right)\overrightarrow{j}+\left(Q\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x}-P\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial y}\right)\overrightarrow{k}$$
$$= \boldsymbol{\varphi}.Rot\left(\overrightarrow{V}\right)+\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x} & \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial y} & \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix} = \boldsymbol{\varphi}.Rot\left(\overrightarrow{V}\right)+\ \overrightarrow{\mathrm{grad}\,\boldsymbol{\varphi}}\ \Lambda\ \overrightarrow{V}.$$

Exercice 8

L'équation du cercle s'écrit comme suit

$$(x-1)^2+y^2=1$$

ce qui donne la paramétrisation suivante

$$x=\cos\theta+1,\quad y=\sin\theta$$

$$\mathbf{I}=\oint_C y^2dx+x^2dy=\int_0^{2\pi}\left[\sin^2\theta\,(-\sin\theta)+(\cos\theta+1)^2\cos\theta\right]d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\left(\cos^3\theta-\sin^3\theta+2\cos^2\theta+\cos\theta\right)d\theta$$

pour calculer cette intégrale, on utise la linéarisation

de : $\cos^3\theta=\dfrac{\cos 3\theta+3\cos\theta}{4}, \sin^3\theta=\dfrac{3\sin\theta-\sin 3\theta}{4}$

on obtient alors !

$$\mathbf{I}=\int_0^{2\pi}\left(\frac{\cos 3\theta+3\cos\theta}{4}-\frac{3\sin\theta-\sin 3\theta}{4}+1+\cos 2\theta+\cos\theta\right)d\theta$$
$$\mathbf{I}=\left[\frac{\sin 3\theta}{12}+\frac{3\sin\theta}{4}+\frac{3\cos\theta}{4}+\frac{\cos 3\theta}{12}+\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}+\sin\theta\right]_0^{2\pi}$$
$$=2\pi$$

Exercice 9

$\mathbf{I}=\oint_{\mathbf{C}}\dfrac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$, on pose $x=r\cos t,\ y=r\sin t$

d'où : $\mathbf{I} = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t}{r^2} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$

Le chemin d'intégration est fermé, l'intégrale curviligne n'est pas nulle

la forme différentielle : $\omega = \dfrac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$ n'est pas alors **exacte**.

Posons : $P(x,y) = \dfrac{-y}{x^2+y^2} \Longrightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{-\left(x^2+y^2\right) + 2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \dfrac{y^2 - x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$

$Q(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2} \Longrightarrow \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\left(x^2+y^2\right) - 2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \dfrac{y^2 - x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$

$\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, la forme est seulement fermée, car le domaine

$\mathbb{R}^2 - \{0,0\}$ n′est pas **simplement connexe**

Exercice 10

$\omega = x^2dx - xydy$ le long du segment de droite OB avec $O(0,0)$ *et* $B(1,1)$

:/swp55/temp/graphics/swp0000$_{4.pdf}$

Le segment OB a pour équation $y = x$

$$\int_{OB} x^2dx - xydy = \int_0^1 \left(x^2 - x^2\right) dx = 0$$

Le long de l'arc de parabole $x = y^2$, $0 \leq x \leq 1$, orienté

dans le sens des x croissants.

$$\int_{OB} x^2dx - xydy = \int_0^1 \left(2y^5 - y^3\right) dy = \frac{1}{12}$$

On a deux résultats différents car la forme n'est pas exacte, en effet

si l'on pose $P(x,y) = x^2 \Longrightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0$

$Q(x,y) = -xy \Longrightarrow \dfrac{\partial Q}{\partial x} = -y$

On a ainsi : $\dfrac{\partial P}{\partial y} \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, la forme ω n'est mème pas fermée.

Exercice 11

la forme différentielle $\boldsymbol{\omega}\left(x,y\right) = (x+y)\mathbf{dx} + (\mathbf{x} - \mathbf{y})\mathbf{dy}$

est une forme exacte, elle admet une primitive f telle que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x + y \quad \text{et } \frac{\partial f}{\partial y} = x - y$$

Ce qui donne : $f(x, y) = \dfrac{x^2}{2} + xy + C(y)$

avec $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x + C'(y) = x - y \Longrightarrow C'(y) = -y$

$\Longrightarrow C(y) = -\dfrac{y^2}{2} + k$

Finalement : $\quad f(x, y) = \dfrac{x^2}{2} + xy - \dfrac{y^2}{2} + k$

$$\oint_{AB} \omega = [f(x, y)]_A^B = [f(x, y)]_{(2,0)}^{(0.0)} = -2$$

Calcul de l'aire de la cardioïde

On utilise la formule donnant l'aire d'un secteur curviligne

en coordonnées polaires

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\theta)d\theta = \frac{1}{2}\left(2\int_0^\pi (1 + \cos\theta)^2\, d\theta\right)$$

$$= \int_0^\pi (1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta)d\theta$$

$$= \int_0^\pi (1 + 2\cos\theta + \frac{1 + \cos 2\theta}{2})d\theta$$

$$= \int_0^\pi (\frac{3}{2} + 2\cos\theta + \frac{\cos 2\theta}{2})d\theta$$

$$= \left[\frac{3}{2}\theta + 2\sin\theta + \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^\pi = \frac{3\pi}{2}$$

Calcul du périmètre de la cardioïde

Pour le périmètre, on a la formule suivante

$$P = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 + \cos\theta)^2 + \sin^2\theta}d\theta =$$

$$= 2\int_0^\pi \sqrt{1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta}d\theta$$

$$= 2\int_0^\pi \sqrt{2 + 2\cos\theta}d\theta$$

$$= 2\sqrt{2}\int_{0}^{\pi}\sqrt{2\cos^2\frac{\theta}{2}}d\theta = 4\int_{0}^{2\pi}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta$$
$$= 8\left[\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi} = 8$$

Exercice 12

:/swp55/temp/graphics/swp0000$_{5.pdf}$

Le contour d'intégration

i) Utilisation de la formule de Green-Riemann

$$\oint P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right)dxdy$$

$$\mathbf{I} = \oint \mathbf{ydx} + \mathbf{aydy} = -\iint_D dxdy$$

Pour trouver la solution, il suffit alors de connaitre l'aire de D et l'aire de D est égale à deux fois la différence entre l'aire du quart de cercle de rayon 1 $\left(S_1 = \frac{\pi}{4}\right)$ et l'aire du triangle rectangle isocèle $\left(S_2 = \frac{1}{2}\right)$

$$Aire\,(D) = 2(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}) = \frac{\pi}{2} - 1$$

Finalement, on a :

$$\mathbf{I} = \oint \mathbf{ydx} + \mathbf{aydy} = \mathbf{1} - \frac{\pi}{2}$$

ii) Calcul direct :

On commente par la paramétrisation des deux cercles

$x^2 + y^2 - 2x = 0 \Longrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1 \Longrightarrow x = \cos\theta + 1,\ y = \sin\theta$

$x^2+y^2-2y=0 \Longrightarrow x^2+(y-1)^2=1 \Longrightarrow x=\cos\theta,\ y=\sin\theta+1$

Lorsque l'on fait un tel changement de variables, il faut

faire attention aux bornes d'intégration

$$\oint_\Gamma \mathbf{ydx}+\mathbf{aydy} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \left((\sin\theta+1)(-\sin\theta)+a(\sin\theta+1)\cos\theta\right)d\theta$$

$$+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\sin\theta(-\sin\theta)+a\sin\theta\cos\theta\right)dt$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \left(-\sin^2\theta.+a\sin\theta\cos\theta-\sin\theta+a\cos\theta\right)d\theta$$

$$+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(-\sin^2 t+a\sin t\cos t\right)dt$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\cos 2\theta+a\sin 2\theta-1}{2}+a\cos\theta-\sin\theta d\theta+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\frac{\cos 2\theta+a\sin 2\theta-1}{2}\right)d\theta$$

$$= \left[\frac{\sin 2\theta-a\cos 2\theta-2\theta}{4}+a\sin\theta+\cos\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}$$

$$+\left[\frac{\sin 2t-a\cos 2t-2t}{4}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= \left(-\frac{a}{4}+1-\left(\frac{a+\pi}{4}-a\right)\right)+\left(\frac{-a-2\pi}{4}-\left(\frac{a-\pi}{4}\right)\right)$$

$$= \left(1+\frac{a}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+\left(-\frac{a}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=1-\frac{\pi}{2}$$

iii) On décompose la forme différentielle comme suit : $\omega=\omega_1+\omega_2$

avec : $\omega_1=ydx,\ \omega_2=aydy$

on remarque que la forme ω_2 est une forme différentielle exacte $\Longrightarrow$

$$\oint_\Gamma \omega_2 = 0$$

d'où : $\oint_\Gamma \mathbf{ydx} + \mathbf{aydy} = \oint_\Gamma \mathbf{ydx} = -\mathbf{aireD} = 1 - \frac{\pi}{2}.$

0.0.1