Université Sétif 1
Faculté des Sciences
Département de mathématiques.

Samedi 07 Janvier 2017

Analyse 3 Examen

1) Séries numériques.

Etudier la nature des 5 séries suivantes

1.i) $\sum_{n\succeq 0} \frac{n+(-1)^n}{n^2+1}$, 1.ii) $\sum_{n\succeq 1} \left(\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}$, 1.iii) $\sum_{n\succeq 0} 2^{-\sqrt{n}}$,

1.iv) $\sum_{n\succeq 1} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$ 1.v) $\sum_{n\succeq 1} \frac{(n!)^a}{(2n)!}$ $(a>0)$.

2) Séries de fonctions

Soit

$$f_n(x) = (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}, \; x \succeq 0$$

i) Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$.
ii) Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[a,+\infty[$ avec $a>0$.
iii) Est - ce que la convergence est normale sur $[0,+\infty[$.

3) Séries de Fourier

Soit la fonction périodique :

$$f(x) = |\sin x|$$

a) Tracer le graphe de la fonction sur 2 périodes.
b) Calculer les coefficients de **Fourier** :
c) Ecrire le développements de la fonction $f(x) = |\sin x|$ en série de **Fourier**.
d) En déduire la valeur des sommes suivantes.

$$\sum_{n\succeq 1} \frac{1}{4n^2-1}, \qquad \sum_{n\succeq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}$$

Correction

1) Séries numériques

1.i) $u_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n^2+1}$
On a la somme de deux séries numériques
de terme général :

$$a_n = \frac{n}{n^2+1},\ b_n = \frac{(-1)^n}{n^2+1}$$

La première série est divergente (équivalence
avec la série harmonique)
la deuxième série est convergente (série alternée
vérifiant le critère de **Liebniz**)
La série de terme général u_n est donc divergente.
1.ii) $v_n = \left(\dfrac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{n}.\ \left(\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{n}e^{-\frac{\ln(n)}{n}} \approx \dfrac{1}{n}$
On a une équivalence avec le terme général de la série
harmonique $\Longrightarrow$ la série de terme général (v_n) est
donc divergente.
1.iii) $w_n = 2^{-\sqrt{n}} = e^{-\sqrt{n}\ln 2}$
La suite : $\left(n^2 2^{-\sqrt{n}}\right) = \left(n^2 e^{-\sqrt{n}\ln 2}\right)$ converge vers 0,
on a, à partird'un certain rang :

$$n^2 2^{-\sqrt{n}} < 1 \Longrightarrow^2 2^{-\sqrt{n}} < \frac{1}{n^2}$$

La série de terme général $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge.
On en déduit que la série de terme général w_n converge.
1. iv) $t_n = \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} = \dfrac{1}{n\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} \approx \dfrac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$
La série de terme général $\dfrac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$ converge.
$\Longrightarrow$ la série de terme général t_n converge.
1. v) $x_n = \dfrac{(n!)^a}{(2n)!}\quad (a>0)$.

On utilise le critère de **D'Alembert** :
$\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{((n+1)!)^a}{(2(n+1))!}.\dfrac{(2n)!}{(n!)^a} = \dfrac{(n+1)^a}{(2n+2)(2n+1)}$
$= \dfrac{1}{2(n+1)^{1-a}(2n+1)} \approx \dfrac{1}{4n^{2-a}}$
Ce qui donne comme solution :

Si $2-a>1 \Longrightarrow 0<a<1$, la série converge
Si $2-a \leq 1 \Longrightarrow a \succeq 1$, la série diverge.

2) Séries de fonctions

$$f_n(x) = (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}, \; x \succeq 0$$

i) Pour $x=0$, la série numérique alternée

$$\sum_{n \succeq 0}^{n} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

est convergente (critère de **Liebniz**).
Pour $x>0$, la série de fonctions est absolument convergente
pour cela, on applique le critère de D'Alembert
On a :

$$\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \frac{e^{-(n+1)x}}{n+2} \cdot \frac{n+1}{e^{-nx}} = \frac{n+1}{n+2} e^{-x}$$

Ce qui donne :

$$l = \underset{n\to\infty}{Lim} \left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = e^{-x} < 1$$

La série converge absolument sur $]0,\infty[$..
Elle converge simplement sur $[0,+\infty[$.
ii) Convergence normale sur $[a,+\infty[$, $a>0$.
On commence par calculer la norme de la fonction f_n sur
l'intervalle semi-ouvert $[a,+\infty[$.

$$|f_{\ n}(x)|' = \frac{-ne^{-nx}}{n+1} < 0 \Longrightarrow \|f_n\| = \sup_{x\in[a,+\infty[} |f_n(x)| = \frac{e^{-na}}{n+1}$$

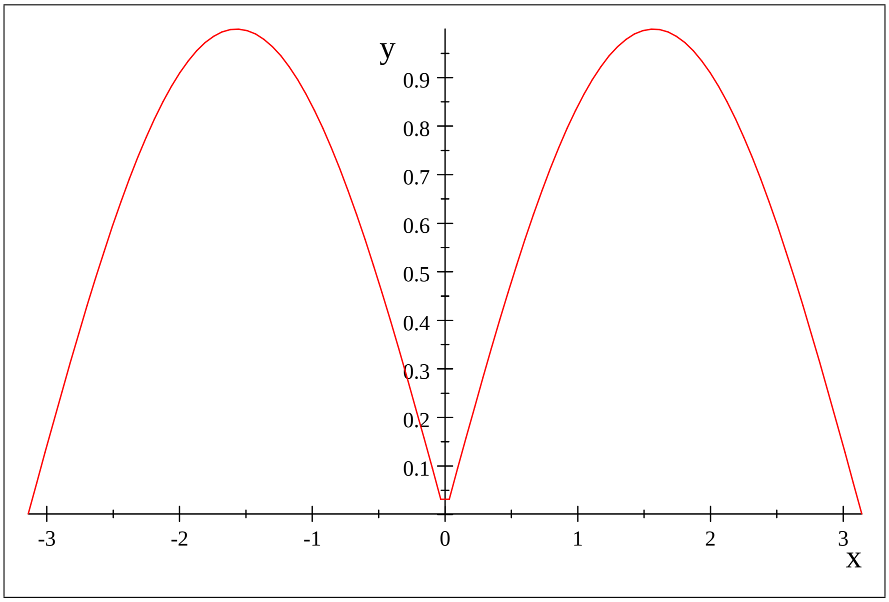
La série numérique $\sum_{n\geq 0} \frac{e^{-na}}{n+1}$ étant convergente, la convergence est
normale sur $[a,+\infty[$.
iii) Sur l'intervalle $[0,+\infty[$, on a :

$$\|f_n\| = \sup_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)| = \frac{1}{n+1}$$

La série numérique $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1}$ étant divergente, la convergence n'est
pas normale sur $[0,+\infty[$.

3) Séries de Fourier

a) Graphe de $f(x) = |\sin x|$



b) Calcul des coeffiicients de **Fourier**
la fonction est paire et de période $2\omega = \pi \Longrightarrow b_n = 0$
Calcul de a_0 :

$$a_0 = \frac{2}{\omega}\int_0^{\omega} \sin x dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{4}{\pi}$$

Calcul de a_n :

$$a_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos 2nx \; dx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sin\left(2n+1\right)x - \sin\left(2n-1\right)x\right] dx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos\left(2n+1\right)x}{2n+1} - \frac{\cos(1-2n)x}{1-2n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2n+1} - \frac{2}{2n-1}\right]$$

$$= -\frac{4}{\pi\left(4n^2-1\right)}$$

c) Développements de **Fourier**
La fonction $f(x) = |\sin x|$ est continue sur $\mathbb{R}$, elle est donc égale à sa série de **Fourier (Thèorème de Dirichlet)**

$$\boxed{|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{3} + \frac{\cos 4x}{15} + \frac{\cos 6x}{35}\ldots\ldots + \frac{\cos 2nx}{(2n)^2-1} + \ldots\ldots\right)}$$

d) Pour $x = 0$, on a :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35}....... + \frac{1}{(2n)^2 - 1} + ...\right) \\ \Longrightarrow & \quad \sum_{n \succeq 1} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Pour $x = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow$

$$1 = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{15} - \frac{1}{35} + ... + \frac{(-1)^n}{(2n)^2 - 1} + ...\right)$$

$$\sum_{n \succeq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1} = \frac{\pi - 2}{4}$$

Université Sétif 1 Samedi 20 Janvier 2018
Faculté des Sciences
Département de mathématiques.

Analyse 3 Examen

---

1)Question de cours :

Montrer que si une série numérique converge, son terme général (u_n) tend vers zéro ($\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$).

---

2) Séries numériques :

Etudier la nature des 5 séries suivantes

i) $\sum_{n \succeq 0} \frac{n^{100}}{n!}$, ii) $\sum_{n \succeq 1} \frac{(-1)^n}{\ln(n+2)}$, iii) $\sum_{n \succeq 0} \left(ne^{\frac{1}{n}} - n \right)$

iv) $\sum_{n \succeq 1} \frac{2^n + 4^n}{n + \ln(n) + 5^n}$, v) $\sum_{n \succeq 1} \ln\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$.

---

3) Séries entières

Déterminer le rayon de convergence des deux séries entières suivantes, puis calculer leurs sommes.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} nx^n, \ \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\,x^n}$$

En déduire la somme de la série entière. $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n}$

---

4) Séries de Fourier

Soit la fonction 2π-périodique définie par:

$$\boxed{f(x) = \pi - \boxed{x}, \quad x \in \boxed{-\pi, +\pi}}$$

a) Tracer le graphe de la fonction sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$.
b) Donner l'expresion de la fonction f sur l'intervalle $[-3\pi, -2\pi]$
c) Calculer les coefficients de **Fourier** :
d) Ecrire le développement de la fonction $f(x)$ en série de **Fourier** et étudier le cas où $x = 0$.

Correction

1) Si la série numérique est convergente, on a :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} u_n = S}$$

alors les sommes partielles S_n *et* S_{n-1}

$$\boxed{S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots.. + \cancel{u}_n,\ S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots.. + \cancel{u}_{n-1}}$$

ont pour limite S.
Sachant que : $\boxed{u_n = S_n - S_{n-1}}$
Conclusion : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = 0$

2) Séries numériques

i) $u_n = \dfrac{n^{100}}{n!}$
On utilise le critère de **D'Alembert** :

$$\boxed{\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{100}}{(n+1)!} \cdot \frac{(n)!}{(n)^{100}} = \frac{(n+1)^{99}}{(n)^{100}}}$$

Ce qui donne : $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0$
La série est convergente.
ii) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln(n+2)}$
On a une série alternée, on utilise le critère de **Liebniz**
La suite : $|u_n| = \dfrac{1}{\ln(n+2)}$ est décroissante et elle tend vers 0.
La série est convergente.
iii) $u_n = \left(ne^{\frac{1}{n}} - n\right) = n\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) = \dfrac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}$
Sachant que : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^0}{x - 0} = 1}$
Le terme général u_n ne tend pas vers 0.
la série est divergente grossièrement.
iv) $u_n = \dfrac{2^n + 4^n}{n + \ln(n) + 5^n} \approx \dfrac{4^n}{5^n} = \left(\dfrac{4}{5}\right)^n$
Le terme général u_n est équivalent au terme général d'une
série géométrique de raison $\dfrac{4}{5} < 1$, **la série est convergente**.
v) $u_n = \ln\left(1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}\right) \approx \dfrac{1}{(n+1)^2} \approx \dfrac{1}{n^2}$
On a une équivalence avec le terme général d'une série
de **Riemann** avec un exposant égal à 2, **la série est convergente.**

3) Séries entières

On rappelle que l'on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + ... + x^n + ... = \frac{1}{1-x}, \quad x \in]-1,1[$$

En dérivant une première fois, on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Et la dérivée seconde donne :

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) x^n = x^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) x^{n-2} = \frac{2x^2}{(1-x)^3}$$

Pour la série entière $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$

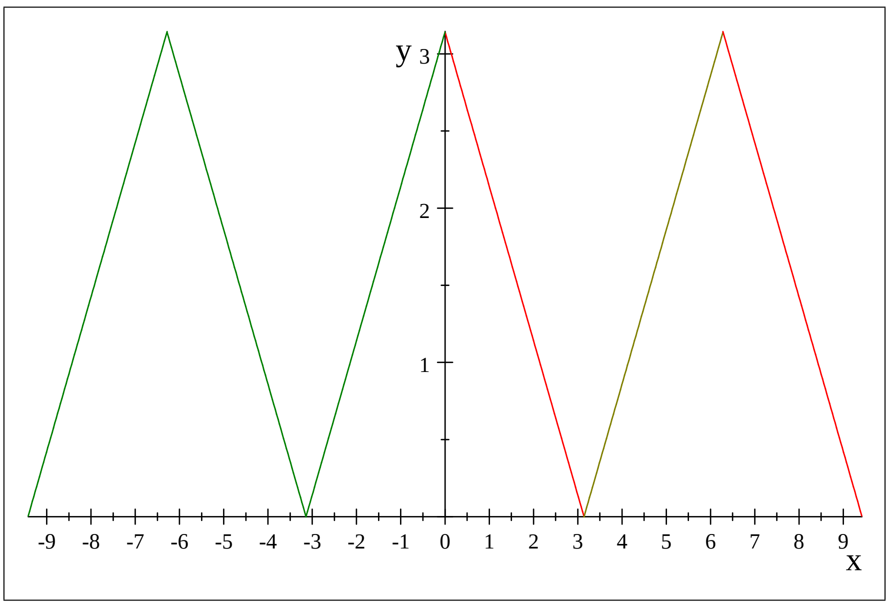
En écrivant n^2sous la forme suivante : $n^2 = n(n-1) + n$

on alors :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) x^n = \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{2x^2}{(1-x)^3} = \frac{1+x^2}{(1-x)^3}}$$

4)Séries de Fourier

a) Graphe de $f(x) = \pi - x$, 2π. périodique.



b) Sur l'intervalle $[-3\pi, -2\pi]$, l'expression de f est la suivante

$$\boxed{f(x) = \pi + (x + 2\pi) = 3\pi + x}$$

c) Calcul des coeffiicients de **Fourier**

la fonction est paire $\Longrightarrow b_n = 0$

Calcul de a_0 :

$$\boxed{a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x)\, dx = \frac{2}{\pi} \left[\pi x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \pi}$$

Calcul de a_n :

$$\boxed{a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - x)\cos nx\ dx}$$

On fait une intégration par parties en posant :

$$u(\ x) = \pi - x, \qquad dv(x) = \cos nx dx$$
$$du(x) = -dx, \qquad v(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$$

On obtient :

$$\boxed{a_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{(\pi - x)\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\sin(nx)}{n}dx}$$

On constate que le terme tout intégré est nul
on a alors :

$$\boxed{a_n = \frac{2}{\pi n^2}\left[-\cos(nx)\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2}\left(1 - (-1)^n\right)}$$

c) Développements de **Fourier**
La fonction $f(x)$ est continue, monotone par morceaux, bornée sur $\mathbb{R}$, elle est donc égale à sa série de **Fourier**
(Thèorème de Dirichlet)

$$\boxed{f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2}\ldots\ldots + \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} + \ldots\ldots\right)}$$

Pour $x = 0$, on a :

$$\pi = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2}\ldots\ldots + \frac{1}{(2n+1)^2} + \ldots\ldots\right)$$
$$\Longrightarrow \qquad \sum_{n \succeq 1}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Rattrapage 20 Mars 2018

1) Séries numériques

Donner la nature des séries suivantes :

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n-1))^n} \quad , \quad \sum_{n\succeq 1} \frac{n^n}{(n+1)\,(n+2)\,.....(n+n)}$$

$$\sum_{n\succeq 1} \left(e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+a}} \right), \quad \sum_{n\succeq 1} \frac{n-1}{n} e^{-2n},$$

$$\sum_{n\succeq 1} \left(\alpha + \frac{1}{n} \right)^n \quad .$$

2) Séries de fonctions

Soit la série de fonctions

$$\boxed{\mathbf{F(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x). = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n} e^{-nx}, \quad x \in \mathbb{R}^+ = [0, \infty[}$$

a) Montrer que la série de fonctions converge simplement dans $\mathbb{R}^+$.
b) Calculer la dérivée de $f_n\ (x)$ et $\sup |f_n(x)|$ pour $x \in \mathbb{R}^+$.
c) Est ce que la convergence est normale sur $\mathbb{R}^+$.
d) Calculer $f\,''_n(x)$ (dérivée seconde) et $\sup\limits_{x\in\ I R^+} |f_n{}'(x)|$.

La série $\boxed{\sum_{n\succeq 1} f_n{}'\ (x)}$ converge-t-elle normalement dans $\mathbb{R}^+$.

3) Séries de Fourier

Soit f la fonction de période 2π et **impaire**, égale à :

$$\boxed{(\pi - x\ )\ ,\ x \in\ ]0, \pi]}$$

i) Donner l'expression de la fonction dans l'intervalle $[-3\pi, -2\pi]$.
ii) Tracer le graphe de f sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$
iii) Calculer les coefficients de **Fourier** .
iv) Ecrire le développement de f en série de Fourier f .

En déduire la valeur de : $\boxed{\sum_{n\succeq 1} \frac{\sin(n)}{n}}$.

Correction

1) **Séries numériques**

$$\boxed{\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n-1))^n}}$$

On a une série à termes positifs
On applique le critère de **Cauchy** :

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{\ln(n-1)} \Longrightarrow \underset{n\to\infty}{Lim} \frac{1}{\ln(n)} = 0 < 1$$

La série est donc convergente.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+1)(n+2).....(n+n)}}$$

On a une série à termes positifs.
On applique le critère de **D'**Alembert
On a :

$$u_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+2)(n+3).....(2n+1)(2n+2)},$$

ce qui donne :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+2)(n+3).....(2n)(2n+1)(2n+2)} \cdot \frac{(n+1)(n+2).....(n+n)}{n^n}$$

$$= \frac{(n+1)^n (n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)n^n}$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{n+1}{2(2n+1)}$$

Par passage à la limite, on a : $\underset{n\to\infty}{Lim} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e}{4} < 1$

La série est convergente.

$$\sum_{n\succeq 1} \left(e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+a}}\right)$$

Pour n assez grand, on a l**es équivalences**

$$\boxed{e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+a}} \approx \left(1+\frac{1}{n}\right) - \left(1+\frac{1}{n+a}\right) = \frac{a}{n(n+a)} \approx \frac{a}{n^2}.}$$

(série de **Riemann** avec un exposant égal à 2).
La série est convergente.

$$\boxed{\sum_{n\succeq 1} u_n = \sum_{n\succeq 1} \left(a+\frac{1}{n}\right)^n}$$

Dans l'étude de cette série, il est nécessaire de remarquer que le signe de u_n dépend de **la valeur de** a !!!

Si $a \succeq 0$, on a une série à termes positifs, on applique
le critère de **Cauchy**

$$\sqrt[n]{u_n} = a + \frac{1}{n} \Longrightarrow \underset{n\to\infty}{Lim}\left(a + \frac{1}{n}\right) = a$$

On a alors trois possibilités :
Si $0 \preceq a < 1$ la série est convergente.
Si $a > 1$, la série est divergente.
Pour $a = 1$, on a : $\underset{n\to\infty}{Lim}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ la série est divergente.
Si $a < 0$, on a une série alternée, en effet

$$u_n = \left(a + \frac{1}{n}\right)^n = \left(-|a| + \frac{1}{n}\right)^n = (-1)^n \left(|a| - \frac{1}{n}\right)^n$$

Si $-1 < a < 0$,on montre que la série est absolument convergente, en effet on a

$$|\sqrt[n]{u_n}| = |a| - \frac{1}{n} \Longrightarrow \underset{n\to\infty}{Lim}\left(|a| - \frac{1}{n}\right) = |a|$$

Pour $a \preceq -1$, le terme général de la série ne tend pas vers zéro
la série est divergente.

$$\boxed{\sum_{n\succeq 1} \frac{2n-1}{n} e^{-2n}}$$

On a une série à termes positifs avec comme équivalent

$$\frac{2n-1}{n} e^{-2n} \approx 2e^{-2n}$$

On applique le critère de **D′Alembert :**

$$\boxed{\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2e^{-2(n+1)}}{2e^{-2n}} = e^{-2} \Longrightarrow \underset{n\to\infty}{Lim}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{e^2} < 1,}$$

La série est convergente

2) Séries de fonctions

Pour $x > 0$, on a une série de fonctions à terme positifs, on applique le critère de **D'alembert**

$$\frac{f_{n+1}(x).}{f_n(x)} = \left(\frac{x}{n+1} e^{-(n+1)x}\right)\left(\frac{n}{xe^{-nx}}\right) = \frac{n}{n+1} e^{-x}$$

Ce qui donne : $\underset{n\to\infty}{Lim}\frac{f_{n+1}(x).}{f_n(x)} = e^{-x} < 1$
La série de fonctions est convergente pour x > 0.
Pour $x = 0$, on a : $f_n(0) = 0 \Longrightarrow F(0) = 0$.
En conclusion, la série de fonction converge simplement dans $\mathbb{R}^+ = [0, \infty[$.

$f_n(x).= \dfrac{x}{n} e^{-nx} \Longrightarrow {f_n}'(x) = \left(\dfrac{1}{n} - x\right) e^{-nx}$

x	$0 \qquad \frac{1}{n} \qquad +\infty$
$f\,'_n(x) = (1 - nx)\, e^{-nx}$	$+ \qquad 0 \qquad -$
$f_n(x) = xe^{-nx}$	$0 \nearrow \dfrac{1}{en^2} \searrow 0$

$$\|f_n\|_\infty = \sup |f_n(x)| = \frac{1}{n^2 e}$$

La série de terme général $\|f_n\|_\infty = \dfrac{1}{n^2 e}$ est une série numérique à termes positifs convergente (équivalence avec une série de **Riemann**)
La série de fonctions de terme général:

$$f_n(x).= \frac{x}{n} e^{-nx}$$

converge normalement sur $\mathbb{R}^+ = [0, \infty[$.

III) ${f_n}'(x) = \left(\dfrac{1}{n} - x\right) e^{-nx} \Longrightarrow$

$$f\,''_n(x) = -e^{-nx} - n\left(\frac{1}{n} - x\right) e^{-nx} = e^{-nx}(nx - 2)$$

x	$0 \qquad \frac{2}{n} \qquad +\infty$
$f\,''_n(x) = e^{-nx}(nx - 2)$	$- \qquad 0 \qquad +$
$f\,'n(x) = \left(\dfrac{1}{n} - x\right) e^{-nx}$	$\dfrac{1}{n} \searrow -\dfrac{1}{ne} \nearrow 0$

$$\boxed{\|f\,'_n\|_\infty = \sup |{f_n}'(x)| = \frac{1}{n}}$$

Comme la série de terme général :

$$\|f\,'_n\|_\infty = \frac{1}{n}$$

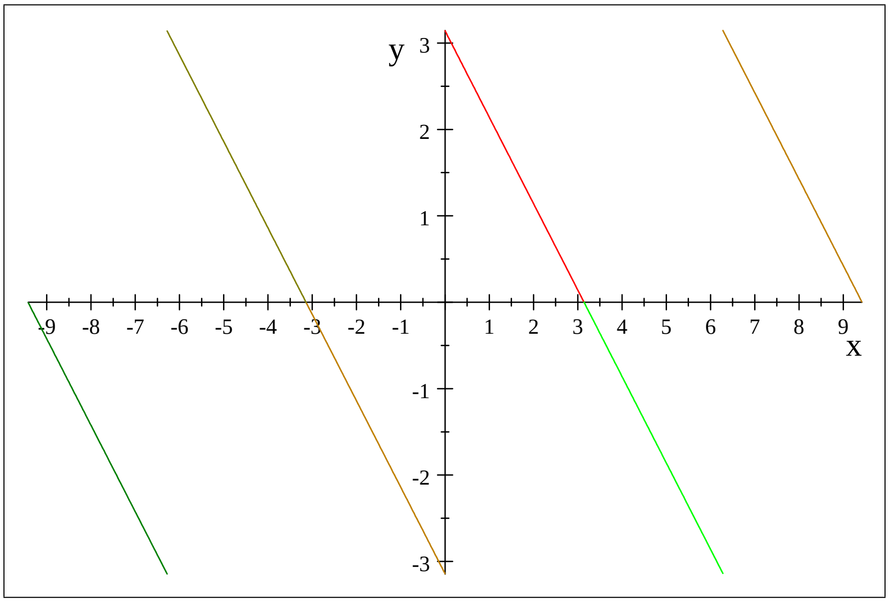
est divergente (série harmonique)
ainsi la série de fonctions de terme général

$$f\,'_n(x) = \left(\frac{1}{n} - x\right) e^{-nx}$$

ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}^+ = [0, \infty[$.

3) Série de Fourier.

i) $f(x) = -3\pi - x, \quad x \in [-\pi, 0]$
ii) Graphe de la fonction sur $]-2\pi, 2\pi[$
$f(x) = \pi - x$



Calcul des coefficients de Fourier
La fonction est impaire $\Longrightarrow a_0 = a_n = 0$, autrement dit :
on va dévelloper la fonction en série de sinus.
Calcul des b_n :

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) \sin(nx) dx$$

On fait une intégration par parties en posant :

$$\begin{array}{ll} u = \pi - x, & du = -dx \\ dv = \sin nx dx, & v = -\dfrac{\cos nx}{n} \end{array}$$

Ce qui donne :

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left[- \frac{(\pi - x) \cos(nx)}{n} \right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos(nx)}{n} dx$$

On a finalement

$$b_n = \frac{2}{n} - \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin(nx)}{n^2} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{n}$$

D'aprés le théorème de **Dirichlet**, vu que la fonction est bornée, monotone par morceaux, on a :

$$\pi - x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin(nx)}{n}, \quad \text{si} \quad x \in]0, \pi]$$

La fontion étant continue au point $x = 1$,d'aprés toujours le théorème de **Dirichlet** on a :

$$\frac{\pi - 1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n}$$