Table des matières

Fonctions différentiables

Soit f une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie au voisinage $\mathcal{V}(x)$

$x = (x_1,\ x_2, ..., x_n)$ et soit $h = (h_1,\ h_2, ..., h_n)$ un autre
élément de $\mathbb{R}^n$ tel que $x + h \in \mathcal{V}(x)$
$\mathbb{R}^n$ est muni d'une struture d'espace vectoriel normé
sur le corps des réels $\mathbb{R}$ et $\|x\|$ désigne la norme d'un vecteur x de $\mathbb{R}^n$.

Définition 1 *La fonction f est dite différentiable au point $x \in \mathbb{R}^n$, si on peut écrire*

$$f(x+h) - f(x) = df_x(h) + \varepsilon_x(h)\|h\| \qquad (1)$$

où pour x fixé, l'application : $l \longrightarrow d_x f(l)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et l'application $l \longrightarrow \varepsilon_x(l)$ est une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie

$$\lim_{l \longrightarrow 0} \varepsilon_x(l) = 0$$

Conséquences :

a) S'il existe une application linéaire vérifiant (1), elle est unique.

b) Soit $(e_1, e_2, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on peut écrire

$h = (h_1,\ h_2, ..., h_n) = \sum_{i=1}^{n} h_i e_i$, d'où

$$df_x(h) = df_x\left(\sum_{i=1}^{n} h_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} h_i df_x(e_i) = \sum_{i=1}^{n} A_i(x) h_i$$

Ainsi si la fonction f est différentiable au point $x \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$f(x+h) - f(x) = \sum_{i=1}^{n} A_i(x) h_i + \varepsilon_x(h) \|h\|$$

Définition 2 *Si f est une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, différentiable au point $x \in \mathbb{R}^n$, l'application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$:*

$$h \longrightarrow df_x(h) = \sum_{i=1}^{n} A_i(x) h_i$$

*est dite **différentielle** au point x de la fonction f.*

Exemple : Les fonctions projections de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ sont différentiables.

En effet comme $p_i(x) = x_i$ et $p_i(x+h) = x_i + h_i$, d'où $p_i(x+h) - p_i(x) = h_i$,

ce qui montre bien que p_i est différentiable avec $A_j = 0$ pour $i \neq j$, $A_i = 1$ *et* $\varepsilon = 0$.

Ce qui donne : $dp_{i(x)}(h) = h_i$,

on utilisera alors la notation suivante : $\mathbf{dp}_{ix} = \mathbf{dx}_i$.

Avec cette notation, la différentielle au point x s'écrira

$$\mathbf{df}_x = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{A}_i(\mathbf{x}) \mathbf{dx}_i$$

Définition 3 *Soit f une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, on dira que f est différentiable si on peut écrire*

$$f(x+h) - f(x) = df_x(h) + \varepsilon_x(h) \|h\| \qquad (2)$$

où pour x fixé, l'application : $l \longrightarrow d_x f(l)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ et l'application $l \longrightarrow \varepsilon_x(l)$ est une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ qui vérifie $\lim\limits_{l \longrightarrow 0} \varepsilon_x(l) = 0$

L'égalité (2) est une égalité entre vecteurs de $\mathbb{R}^p$, en passant aux composantes de ces vecteurs, on a alors p égalités

$$(f(x+h))_i - (f(x))_i = (df_x(h))_i + (\varepsilon_x(h))_i \|h\| \qquad (3)$$

où $(f(x+h))_i$, $(f(x))_i$, $(df_x(h))_i$, $(\varepsilon_x(h))_i$
désignent les i^{èmes} composantes des vecteurs

$$f(x+h), \quad f(x), \quad df_x(h), \quad \varepsilon_x(h)$$

En conclusion, une application f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$est différentiable au point $x \Longleftrightarrow$

les fonctions composantes $f_i = p_i o f$ sont différentiables en ce point.

Ce qui permet d'écrire, en utilisant les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$:

$$df_x(h) = A(x)h$$

où $A(x)$ est la matrice $(A_{ij}(x))$ à p lignes et n colonnes.

Propriétés des fonctions différentiables :

a) Continuité :

Soit f une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, différentiable au point $x \ \in \mathbb{R}^n$, de la définition de la différentiabilité :

$$f(x+h) - f(x) = df_x\left(h\right) + \varepsilon_x\left(h\right)\left\|h\right\| \ , \lim_{h \longrightarrow 0} \varepsilon_x(h) = 0$$

on peut déduire que : $\lim\limits_{h \longrightarrow 0} f(x+h) - f(x) = 0.$

Ce qui montre que toute fonction différentiable au point x est continue en ce point.

b) Existences des dérivées partielles :

Soit f une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, différentiable au point $x \ \in \mathbb{R}^n$.

On a :

$$f(x+h) - f(x) = \sum_{i=1}^{n} A_i(x) h_i + \varepsilon_x\left(h\right)\left\|h\right\| \ , \lim_{h \longrightarrow 0} \varepsilon_x(h) = 0$$

Soit : $h = (0, 0, ..., h_p, ..., 0, 0) \Longrightarrow \left\|h\right\| = \left|h_p\right| \Longrightarrow$

$$\frac{f(x_1, ..., x_p + h_p, ..., x_n) - f(x_1, ..., x_n)}{h_p} = A_p\left(x\right) \pm \varepsilon_x\left(h_p\right)$$

Ainsi, si on considére la fonction d'une seule variable :

$$t \longrightarrow f(x_1, ..., x_{p-1}, t, x_{p+1}, ...x_n)$$

Cette fonction admet pour la valeur x_p une dérivée égale à $A_p(x)$, que l'on note :

$$D_p f(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_p}$$

On dit alors que que la fonction f admet une dérivée partielle relative à la variable x_p.

D'où l'écriture de la différentielle :

$$Df_x = \sum_{i=1}^{n} D_i f(x) dx_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} dx_i$$

Si l'on a une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, différentiable

au point $x \in \mathbb{R}^n$,la différentielle est représentée par une matrice appelée

Matrice jacobienne

$$Jf(x) = D_j f(_i(x) = \left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \right)$$

($i = 1, ...p$ indice des lignes ; $j = 1, ..., n$ indice des colonnes).

$Jf(x)$ est une matrice à p lignes et n colonnes.

Si l'on a $n = p$, la valeur absolue du déterminant de la matrice $Jf(x)$ est appelé

Jacobien.

Remarque : On vient de voir que si l'on a une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ différentiable au point $x \in \mathbb{R}^n$, alors les dérivées partielles par rapport à chaque coordonnées variables x_i existent.

Mais l'existence des dérivées partielles en un point n'assurent pas la différentiabilité en ce même point.

Théorème 1 *Toute application f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, définie sur un voisinage d'un point $x \in \mathbb{R}^n$ et admettant des **dérivées partielles continues** sur ce voisinage, est différentiable au point x.*

Une telle fonction est dite **continuement différentiable** au point x ou de classe $\mathbf{C}^1$

Définition 4 ***Dérivée dans une direction :***

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^n$ ($\|\overrightarrow{u}\| = 1$) et f une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

On appelle dérivée directionnelle de la fonction f , au point x et dans la direction du vecteur $\overrightarrow{u}$ la limite suivante (si elle existe)

$$\underset{\lambda \longrightarrow 0}{Lim} \frac{f(x+\lambda\overrightarrow{u}) - f(x)}{\lambda} = D_u f(x)$$

Théorème 2 *Si f est une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, différentiable au point $x \in \mathbb{R}^n$. elle admet des dérivées partielles dans toutes les directions et l'on a*

$$D_{\overrightarrow{u}} f(x) = df_x(\overrightarrow{u})$$

Démonstration 1 *Si f est différentiable en un point $x \in \mathbb{R}^n$, on a :*

$$f(x+h)-f(x)=df_x\left(h\right)+\varepsilon_x\left(h\right)\left\Vert h\right\Vert \ ,\lim_{h\longrightarrow 0}\varepsilon_x(h)=0$$

Soit $h=\lambda\overrightarrow{u} \Longrightarrow f(x+\lambda\overrightarrow{u})-f(x)=df_x\left(\lambda\overrightarrow{u}\right)+\varepsilon_x\left(\lambda\overrightarrow{u}\right)\left\Vert\lambda\overrightarrow{u}\right\Vert$

$\Longrightarrow f(x+\lambda\overrightarrow{u})-f(x)=\lambda df_x\left(\overrightarrow{u}\right)+\varepsilon_x\left(\lambda\overrightarrow{u}\right)\left\vert\lambda\right\vert$

En divisant par λ, on obtient :

$$\frac{f(x+\lambda\overrightarrow{u})-f(x)}{\lambda}=df_x\left(\overrightarrow{u}\right)\pm\varepsilon_x\left(\lambda\overrightarrow{u}\right)$$

Ce qui donne par passage à la limite :

$$\underset{\lambda\longrightarrow 0}{Lim}\frac{f(x+\lambda\overrightarrow{u})-f(x)}{\lambda}=df_x\left(\overrightarrow{u}\right)=D_uf(x)$$

Remarque 1 : Comme on a :

$$D_uf(x)=df_x\left(\overrightarrow{u}\right)=\frac{\partial f\left(x\right)}{\partial x_1}.u_1+.......+\frac{\partial f\left(x\right)}{\partial x_n}.u_n$$

En utilisant l'opérateur différentiel (**gradient**) :

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}f(x)}=\nabla f(x)=\left(\frac{\partial f\left(x\right)}{\partial x_1},\frac{\partial f\left(x\right)}{\partial x_2},.....,\frac{\partial f\left(x\right)}{\partial x_n}\right)$$

On a alors :

$$D_u f(x) = df_x\left(\overrightarrow{u}\right) = \nabla f(x).\overrightarrow{u}$$

Remarque 2 : Avec le gradient, on écrira que la fonction f est différentiable en un point $x \in \mathbb{R}^n$ comme suit

$$f(x+h) = f(x) + \nabla f(x).h + \varepsilon\left(h\right)\|h\|$$

Théorème 3 ***Composition de fonctions différentiables***

Soit f une application d'une partie E de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ différentiable en x, et g une application de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ défine sur $f(E)$ et différentiable en $y = f(x)$.
La fonction $F = gof$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^q$ est alors différentiable au point x et l'on a :

$$dF_x = dgof(x) = dg_{f(x)}odf_x$$

$\mathbf{J}(f(x)$ avec p lignes et n colonnes , $\mathbf{J}_g(f(x)$ avec q lignes et p colonnes
$\mathbf{J}\left(gof(x)\right)$ q lignes et n colonnes, ceux sont les matrices des applications linéaires : df_x, $dg_{f(x)}$ et $dgof(x)$.
Comme

$$dgof(x) = dg_{f(x)}odf_x$$

on en déduit que la matrice $\mathbf{J}\left(gof(x)\right)$ est le produit des deux
matrices $\mathbf{J}_g(f(x)$ **et** $\mathbf{J}(f(x)$:

$$\mathbf{J}\left(gof(x)\right) = \mathbf{J}_g(f(x).\ \mathbf{J}(f(x)$$

Prenons comme exemple q = 1 :

Soit f une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ différentiable en x, et

g une application de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ différentiable en $f(x)$.

Soit la fonction f

$$\begin{array}{ccc} f & : & \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p \\ (x_1, x_2, \; ....., x_n) & \longrightarrow & (f_1(x), \; f_2(x)\,, ..., f_p(x)) \end{array}$$

$\mathbf{J}(f(x)$ est une matrice avec p lignes et n colonnes :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ .... \\ .... \\ \frac{\partial f_p(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f_p(x)}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f_p(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Soit maintenant la fonction g :

$$\begin{array}{ccc} g & : & \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R} \\ (f_1(x), \; f_2(x)\,, ..., f_p(x)) & \longrightarrow & g\left((f_1(x), \; f_2(x)\,, ..., f_p(x))\right) \end{array}$$

$\mathbf{J}_g(f(x)$ est une matrice à une ligne et p colonnes :

$$\left(\frac{\partial g}{\partial f_1}, \frac{\partial g}{\partial f_2}, ..., \frac{\partial g}{\partial f_p}\right)$$

En faisant le produit des deux matrices :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_2}, ..., \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ .... \\ .... \\ \dfrac{\partial f_p(x)}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f_p(x)}{\partial x_2}, ..., \dfrac{\partial f_p(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial f_1}, \frac{\partial g}{\partial f_2}, ..., \frac{\partial g}{\partial f_p}\right) =$$

On obtient une matrice avec **une** ligne et **n** colonnes dont les éléments sont donnés par la formule :

$$\frac{\partial g(f(x_1, x_2, .., x_n)}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial g\left(f_1(x),\ f_2(x)\,, ..., f_p(x)\right)}{\partial f_i} . \frac{\partial f_i(x_1, x_2, .., x_n)}{\partial x_j}$$

– Exemple : **Soit :** $f(x, y) = x^3 + xy^2$.

et $F(x, y) = f(y, x) \quad = \quad y^3 + yx^2$

La fonction F est la composition de deux fonctions

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longrightarrow (y, x) \longrightarrow f'(y, x)$$

La matrice jacobienne de la première application est la suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La jacobienne associée à f :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Ce qui donne :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x}\right)(y, x)$$

Finalement, on obtient :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(y,x) = [2xy]_{(y,x)} = 2xy$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f\,(y,x)}{\partial x} = [3x^2 + y^2]_{(y,x)} = 3y^2 + x^2$$

Exercice 1

a) Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ privé de la première bissectrice ($y = x$) :

$$f(x, y) = \frac{\sin x - \sin y}{x - y}$$

Montrer que :

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(a,a)} \frac{\sin x - \sin y}{x - y} = \cos a$$

b) Calculer la limite suivante en utilisant deux méthodes différentes

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{x + y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

Exercice 2

a) Déterminer les courbes de niveau (**isoclines**) de la fonction

$$\begin{array}{cccc} f & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longrightarrow & xy \end{array}$$

Tracer l'allure de quelques unes sur un même repère.

b) Mèmes questions pour la fonction :(Courbes de niveau pour $k = 0$ et $k \neq 0$) :

$$f(x, y) = \frac{-3y}{x^2 + y^2 + 1}$$

Exercice 3

*** Calculer la limite suivante :

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

Exercice 4

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \text{ et } f(0, 0) = 0$$

Calculer les dérivées partielles d'ordre 1

Est ce que f est continuement différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

$$f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \text{ et } f(0, 0) = 0$$

– Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0, 0)$ et les calculer.

– Calculer les dérivées partielles du premier ordre pour $(x, y) \neq (0, 0)$.

– Etudier leur continuité en $(0, 0)$.

– La fonction f est-elle différentiable en $0, 0$

Exercice 6

Justifier que la fonction f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y, z) = xy + yz + zx$$

est différentiable et donner l'expression de sa différentielle.

Exercice 7

Soit f une fonction à valeurs réelles de classe $\mathbf{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Calculer les dérivées partielles d'ordre 1

de la fonction $f(u, v) = u + v$ avec $u(x, y) = e^{x+y}$ et $v(x, y) = x^2 + y^2$

Exercice 8

Soit f une fonction numérique de classe C^1sur $\mathbb{R}^2$.

Calculer les dérivées (ou les dérivées partielles) des fonctions suivantes

$F(x, y) = f(y, x)$, $\quad g(x) = f(x, x)$

$H(x, y) = f(y, f(x, x))$, $\quad G(x) = f(x, f(x, x))$

Vérifier vos résultats sur l'exemple suivant : $f(x, y) = x^3 + xy^2$.

Exercice 9

Soit donnée la fonction $f(x, y, z) = x + y^2 + z^3$.

Calculer la dérivée directionnelle au point $(1, 1, 1)$

a) dans la direction du vecteur $\overrightarrow{u_1} = (2, 1, 3)$

b) dans la direction du vecteur $\overrightarrow{u_2} = (1, -1, 1)$

Exercice 10

Soit la fonction définie implicitement $f(x, y) = e^x - e^y + x^2 + xy = 0$. Calculer $\dfrac{dy}{dx}$

Correction

Exercice 1

a)En utilisant les formules de trigonométrie, on obtient :

$$f(x,y)=\frac{\sin x-\sin y}{x-y}=\frac{\sin\frac{x-y}{2}}{\frac{x-y}{2}}\cos\frac{x+y}{2}=$$

Sachant que : $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(a,a)}\dfrac{\sin\frac{x-y}{2}}{\frac{x-y}{2}}=1$, on a alors $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(a,a)}f(x,y)=\cos a$

b) Le numérateur est de degré **1** et le dénominateur de degré $\frac{1}{2}$, il parait logique de penser que lorsque $x,\ y$ tendent vers 0, on aura une limite égale à 0.

Première méthode : on utilise les coordonnées polaires :

$$\left|\frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right|\preceq\frac{|x|+|y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\preceq\frac{2\sqrt{\rho}}{\sqrt{\cos\theta}+\sqrt{\sin\theta}}$$

sachant que : $\left(\sqrt{\cos\theta}+\sqrt{\sin\theta}\right)\neq0,\ \forall\theta\implies\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)}\dfrac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=0$

Deuxième méthode : On a $|x|=\sqrt{x}\sqrt{x}\preceq\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$

$|y|=\sqrt{y}\sqrt{y}\preceq\sqrt{y}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$

Donc : $\left|\dfrac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right|\preceq\dfrac{|x|+|y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\preceq\sqrt{x}+\sqrt{y}\Longrightarrow\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)}\dfrac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=0$

Exercice 3

On fait tendre (x,y) vers $(0,0)$ le long de la courbe d'équation : $y=\sqrt{x}$

$\Longrightarrow\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim\limits_{x\longrightarrow0}\dfrac{x^2}{x^2+x^2}=\dfrac{1}{2}.$

Si $(x,y)\longrightarrow(0,0)$ le long de la droite d'équation : $y=x$

$$\Longrightarrow \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{x^3}{x^2+x^4} = 0$$

Donc la fonction donnée n'admet pas de limite pour $(x, y) \longrightarrow (0,0)$.

Exercice 4

1) **Calcul des dérivées partielles du premier ordre**

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2}$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0$

2) **Etude de la continuité**

En utilisant l'inégalité :

$$|2xy| \leq x^2 + y^2$$

on peut faire les majorations suivantes

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| = \left|\frac{2xy.y^3}{(x^2+y^2)^2}\right| \leq \frac{|y^3|}{x^2+y^2} = |y| \frac{.\,|y^2|}{x^2+y^2} \leq |y|$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$$

Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}$est continue sur $\mathbb{R}^2$ .On a le mème résultat pour $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Ainsi la fonction donnée est de classe $\mathbf{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, elle est donc différentiable

sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5

– $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-0}{x} = 1$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-y-0}{y} = -1$

– $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{x^4+3x^2y^2+2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$
$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{-y^4-3x^2y^2-2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$
En utilisant les coordonnées polaires, on montre qu'il n' y pas

de continuité à l'origine des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$
Par exemple : $\dfrac{x^4+3x^2y^2+2xy^3}{(x^2+y^2)^2} = \cos^4\theta + 3\cos^2\theta\sin^2\theta + 2\cos\theta\sin^3\theta$
Le rapport n'a pas de limite pour $r \longrightarrow 0$.

La fonction f n'est pas différentiable en $(0,0)$:

En effet , on a :

$$\begin{aligned} f(h_1,h_2) = \frac{h_1^3 - h_2^3}{h_1^2+h_2^2} &= \frac{(h_1-h_2)(h_1^2+h_1h_2+h_2^2)}{h_1^2+h_2^2} \\ &= (h_1-h_2)\left(1+\frac{h_1h_2}{h_1^2+h_2^2}\right) \\ &= h_1-h_2+h_1\left(\frac{h_1h_2}{h_1^2+h_2^2}\right)+h_2\left(-\frac{h_1h_2}{h_1^2+h_2^2}\right) \\ &= h_1-h_2+\varepsilon_1(h)\,h_1+\varepsilon_2(h)\,h_2 \end{aligned}$$

les fonctions

$$\varepsilon_1(h) = \left(\frac{h_1h_2}{h_1^2+h_2^2}\right), \quad \varepsilon_2(h) = \left(-\frac{h_1h_2}{h_1^2+h_2^2}\right)$$

ne tendent pas vers zéro pour $(h_1,h_2) \to (0,0)$.

Exercice 6

La fonction f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y,z) = xy + yz + zx$$

est $C^\infty(\mathbb{R}^2\ )$, elle est donc différentiable sur $\mathbb{R}^2$ avec :

$$df = (y+z)\,dx + (x+z)dy + (x+y)dz$$

Exercice 7 (Dérivée d'une fonction composée)

$f(u,v) = u + v$ avec $u(x,y) = e^{x+y}$ et $v(x,y) = x^2 + y^2$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \longmapsto & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & (u(x,y), v(x,y)) & \longrightarrow & f(u,v) \end{array}$$

La matrice jacobienne assaociée à la première application

est la suivante :

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \quad \text{avec } J(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u}\right)$$

Ce qui donne :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\right) \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial\ v}\frac{\partial v}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial\ v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

Donc
$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1.e^{x+y} + 1.2x$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = 1.e^{x+y} + 1.2y$$

Exercice 8

On a au départ : $f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x^3+xy^2}$.

- **a)** $F(x,y) = f(y,x) \ = y^3 + x^2 y$

La fonction g est la composition de deux fonctions

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x,y) \longrightarrow (y,x) \longrightarrow f'(y,x)$$

La matrice jacobienne de la première application est la suivante

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La jacobienne associée à f :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Ce qui donne :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x}\right)(y,x)$$

Finalement, on obtient :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(y,x) = 2xy \ \text{ et } \ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(y,x) = 3y^2 + x^2$$

- b) $g(x) = f(x,x)$

La fonction g est la composition de deux fonctions

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow (x,x) \longrightarrow f'(x,x)$$

La matrice jacobienne de la première application est la suivante

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La jacobienne associée à f :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

On obtient ainsi

$$g\prime(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right)(x, x)$$

Application : $f(x, y) = x^3 + xy^2. \Longrightarrow g(x) = f(x, x) = 2x^3$

$$g\prime(x) = [3x^2 + y^2 + 2xy]_{(x,x)} = 6x^2$$

– **c)** $H(x, y) = f(y,\ f(x, x))$

La fonction F est la composition de deux fonctions

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longrightarrow (y,\ f(x, x)) \longrightarrow f'\,(y, f(x, x))$$

La matrice jacobienne de la première application est la suivante

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} & 0 \end{pmatrix}$$

La jacobienne associée à f : $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$

Ce qui donne :

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} & 0 \end{pmatrix} = \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right) \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

Application : $f(x, y) = x^3 + xy^2. \Longrightarrow H(x, y) = f(y, f(x, x)) = 4x^6 y + y^3$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \left[\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right]_{(x,x)} \left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]_{(y,f(x,x))} = 6x^2\,[2xy]_{(y,2x^3)} = 6x^2.\,[2y.2x^3] = 24x^5 y\ .$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{(y,2x^3)} = [3x^2 + y^2]_{(y,2x^3)} = 3y^2 + 4x^6$$

– **d)** $G(x, x) = f(x,\ f(x, x))$

La fonction G est la composition de deux fonctions

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow (x, f(x, x)) \longrightarrow f(x,\ f(x, x))$$

La matrice jacobienne de la première application est la suivante

$$\begin{pmatrix} 1, \\ 6x^2 \end{pmatrix}$$

La jacobienne associée à f : $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 6x^2 \end{pmatrix}$$

On obtient ainsi

$$G'(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + 6x^2\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x, f(x,x))$$

Application : $f(x,y) = x^3 + xy^2 \Longrightarrow G(x) = f(x, f(x,x) = 4x^7 + x^3$.

$G'(x) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x} + g'(x)\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)(x, f(x,x)) = [3x^2 + y^2 + (6x^2)\, 2xy]_{(x,f(x,x))}$
$= 28x^6 + 3x^2$

Exercice 9

$f(x,y,z) = x + y^2 + z^3$.

On a $\overrightarrow{\text{grad}\, f}(1,1,1) = (1,2,3)$

$D_{u_1}f(1,1,1) = \overrightarrow{\text{grad}\, f}.(1,1,1)\dfrac{u_1}{\|u_1\|} = (1,2,3)\,.\dfrac{(2,1,3)}{\sqrt{14}} = \dfrac{13}{\sqrt{14}}$

$D_{u_2}f(1,1,1) = \overrightarrow{\text{grad}\, f}.(1,1,1)\dfrac{u_2}{\|u_2\|} = (1,2,3)\,.\dfrac{(1,-1,1)}{\sqrt{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

Exercice 10

$f(x,y) = e^x - e^y + x^2 + xy = 0 \Longrightarrow$ on a

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0$$

Ce qui nous donne : $(e^x + 2x + y)\,dx + (-e^y + x)\,dy$

$$\Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{e^x + 2x + y}{e^y - x}$$
