# Espace $\mathbb{R}^n$. Espaces vectoriels normés

# Espaces métriques

## Espaces vectoriels normés ( EVN)

**Définition 1** *Soit $E$ un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ des nombres réels ou complexes, $E$ est dit normé si est définie une application*

$$\begin{array}{rcl} N & : & E \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ & & x \longrightarrow N(x) \end{array}$$ *vérifiant les propriétés suivantes*

*($n_1$)* $N(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

*($n_2$)* $\forall\ x \in E,\ \forall\ y \in E,\ N(x+y) \preceq N(x) + p(y)$

*($n_3$)* $\forall \in \mathbb{K},\ \forall\ x \in E,\ N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$

L'application ainsi définie est appelée norme sur E et $N(x)$ est notée $\|x\|$.

**Conséquence :** On peut déduire de la définition de la norme l'inégalité

$$\boxed{|\|x\| - \|y\|| \preceq \|x-y\|}$$

**Exemple :** Le corps $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel normé sur lui même l'application qui à $x$ lui fait correspondre $|x|$ définit une norme.

## Espace $\mathbb{R}^n$

L'ensemble $\mathbb{R}^n$ peut être muni d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Il suffit de définir une opération interne

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n x \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (x,y) & \longrightarrow & x+y \end{array}$$

et une opération externe

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} x \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (\lambda,x) & \longrightarrow & \lambda.x \end{array}$$

Avec ces deux opérations, $\mathbb{R}^n$est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, il a une dimension égale à $n$,avec comme base canonique

$$\begin{array}{rcl} e_1 & = & (1,0,0,.....,0) \\ e_2 & = & (0,1,0,.....,0) \\ & & .......... \\ e_n & = & (0,0,........,1) \end{array}$$

et tout élément x de $\mathbb{R}^n$ s'écrit :

$$\boxed{x = (x_1, x_2, ........., x_n) = x_1 e_1 + ........ + x_n e_n}$$

**Inégalité de Schwarz**

Soit $(x_1, x_2, ...., x_n,\ y_1, y_2, ..., y_n)$ 2n nombres réels, $\forall\lambda \in IR$, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + \lambda y_i)^2 \succeq 0$$

En faisant le développement, on a

$$\boxed{\lambda^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2 + 2\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \succeq 0}$$

Le.trinôme en $\lambda$ est positif quel que soit $\lambda$, donc son discriminant est négatif ou nul d'où l'inégalité de **Schwarz**

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \preceq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 . \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

**Norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ :**

Pour $x = (x_1, x_2, ......, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$\|x\|_2 = N_2(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i^2|}$$

Montrons que l'application : $x \longrightarrow \|x\|_2$ est une norme

$(n_1)$ $\|x\|_2 = 0 \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i^2| = 0 \Longleftrightarrow$pour tout $i$, $x_i = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$

$(n_2)$ $\|\lambda x\|_2 = \sqrt{\lambda^2 x_1^2 + \lambda^2 x_2^2 + .... + \lambda^2 x_n^2} = |\lambda| \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + .... + x_n^2} = |\lambda| \|x\|_2 .$

$(n_3)$ Soit $x = (x_1, x_2, ......, x_n)$ *et* $x = (y_1, y_2, ......, y_n)$, on a

$$\|x+y\|_2 = \sqrt{(x_1+y_1)^2 + ..... + (x_n+y_n)^2}$$

On doit montrer que $\|x+y\|_2 \preceq \|x\|_2 + \|y\|_2$ , c'est à dire

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2} \preceq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2}$$

Sachant qu'on a des nombres non négatifs, il suffit de prouver

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2 \preceq \sum_{i=1}^{n}x_i^2 + \sum_{i=1}^{n}y_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2}$$

ou bien

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i \preceq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2}}$$

Si $\sum_{i=1}^{n}x_iy_i \preceq 0$, l'inégalité est vérifiée, sinon il suffit de prouver que

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2 \preceq \sum_{i=1}^{n}x_i^2.\sum_{i=1}^{n}y_i^2$$

et cette inégalité est **l'inégalité de Schwarz.**

# Deuxième norme sur $\mathbb{R}^n$.

Pour $x = (x_1, x_2, ......, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$\boxed{\|x\|_1 = N_1(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|}$$

# Troisième norme sur $\mathbb{R}^n$

Pour $x = (x_1, x_2, ......, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose :

$$\boxed{\|x\|_\infty = N_\infty(x) = \sup |x_i|}$$

# Normes équivalentes

**Définition 2** *Deux normes $N_1$ et $N_2$ sur $E$ sont dites équivalentes s'ils existent deux nombres réels $\lambda$ et $\mu$ positifs tels que*

$$\boxed{\lambda N_1(x) \preceq N_2(x) \preceq \mu N_1(x), \quad \forall x \in E}$$

# Espaces métriques

**Définition 3** *Un ensemble $E$ est dit espace métrique si on a une application de $ExE$ dans $\mathbb{R}^+$ :*

$(x, y) \quad \longrightarrow \quad d(x, y)$

*appelée distance et vérifiant les conditions suivantes :*

*1)* $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$

*2)* $\forall\ x \in E,\ \forall\ y \in E\ :\quad d(x, y) = d(y, x)$

*3)* $\forall\ x \in E,\ \forall\ y \in E, \forall\ z \in E\ :\quad d(x, y) \preceq d(x, z) + d(z, y)$

# Série d'exercices

– **1)** On considère les trois normes définies sur $\mathbb{R}^2$ :

$$\| \|_1 = |x| + |y| \,, \quad \| \|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \| \|_\infty = \max\{|x|\,,|y|\}$$

**Représenter**, dans un repère orthonormé, les boules unités de chacune d'elles.

**Montrer que** les trois normes son équivalentes.

**Donner** les expressions des distances $d_1$, $d_2$ et $d_\infty$ associées aux trois normes.

– **2)** Démontrer l'inégalité triangulaire renversée :

$$\boxed{\big|\|x\| - \|y\|\big| \preceq \|x - y\|}$$

– **3)** Soit **E** un ensemble quelconque, on pose pour tout $x \in \mathbf{E}$, $d(x,x) = 0$ et $\forall\, x \in \mathbf{E}$, $\forall\, y \in \mathbf{E}$ avec $x \neq y \Longrightarrow d(x,y) = 1$.

Montrer que l'on définit une distance sur **E**.

Quelles sont les boules pour cette distance.

– **4) Soit $(\mathbf{E}, \| \|.)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).**

a) Montrer que pour tous $x, y \in E$

$$\boxed{\|x\| + \|y\| \leq 2max\{\|x+y\|\,,\|x-y\|\}}$$

b) Montrer que l'on peut avoir l'égalité avec $x \neq 0$ et $y \neq 0$.

c) Si l'on a la norme euclidienne$\|\| = \|\|_2$, montrer que :

$$\boxed{\|x\| + \|y\| \leq \sqrt{2}\max\{\|x+y\|\,,\|x-y\|\}}$$

– **5)** On définit sur $\mathbb{R}^2$ l'application

$$\mathbf{N}: \ (x,y) \longrightarrow \mathbf{N}(x,y) = \ \max \ \{|x|\,, \ |2x+y|\}$$

**a.)** Montrer que **N** est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

**b).** Montrer que **N** est équivalent à la norme $\|\|_1$ ,ie

trouver deux constantes positives $\boldsymbol{\lambda}$ et $\boldsymbol{\mu}$ telles que

$$\lambda \|\|_1 \preceq \mathbf{N} \preceq \mu \|\|_1$$

– **6**) Soit l'application définie sur $\mathbb{R}$ par

$$x \longrightarrow f(x) = \frac{x}{1+|x|}$$

**a)** Montrer que l'application $f$ définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $I = ]-1,1[$ .

**b)** On pose : $\delta\,(x,y) = |f(x) - f(y)|\,.$

Vérifier que $\delta$ est une distance sur $\mathbb{R}$.

– **7)** Soit $a, b > 0$. On pose, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\mathbf{N(x,y)} = \sqrt{a^2x^2 + b^2y^2}$$

**1)** Montrer que **N** est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

**2)** Dessiner la boule unité.

**3)** Montrer que **N** et $\mathbf{N}_2$ sont des normes équivalentes.

– **8)** Soit **N** une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\mathbf{N}(x,y) = \sup_{t\ \in\ \mathbb{R}} \frac{|tx+y|}{\sqrt{1+t^2}}$$

**i)** Montrer que **N** est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

**ii)** En utilisant l'inégalité de **Schwarz**, montrer que : $\mathbf{N} \leq \mathbf{N}_2$.

**iii)** Soit $\mathbf{\Delta}$ la droite d'équation : $tx + y = 0$ et $M_0(x_0, y_0)$ un point de $\mathbb{R}^2$.

Donner la valeur de $d(M_0,\ \Delta)$, en déduire que : $\mathbf{N} \approx \mathbf{N}_2$.

**iv) Autre méthode :** En étudiant la fonction

$$f(t) = \frac{(tx+y)^2}{1+t^2}$$

Montrer l'équivalence des deux normes **N** et $\mathbf{N}_2$.

– **9)** Soit $E$ l'espace vectoriel des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, définies et continues sur $[-1,1]$.

**i)** Montrer que les trois applications sont des normes sur $E$.

$$\|f\|_1 = \int_{-1}^{1} |f(x)|\, dx, \qquad \|f\|_2 = \sqrt{\int_{-1}^{1} f^{\,2}(x) dx}, \quad \|f\|_\infty = \sup_{x\in[-1,1]} |f(x)|.$$

**ii)** Soit la suite de fonctions :

$$f_n(x) = \begin{cases} -1,\ x \in \left[-1, -\frac{1}{n}\right] \\ nx,\ x \in \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] \\ 1,\ x \in \left]\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$$

La suite $(f_n)$ est-elle de Cauchy dans $(E,\ \|\|_1)$, $(E,\ \|\|_2)$ et $(E,\ \|\|_\infty)$ ?

# Correction

– **1) i) Représentation des boules**

- $B_1\ (O,1) = \{(x,y) \in\ \mathbb{R}^2,\ \|\|_1 = |x| + |y| \leq 1\ \ \}$

$\boxed{:/swp55/temp/graphics/swp0000_{1.pdf}}$

Le schéma

- $B_2\ (O,1) = \left\{(x,y) \in\ \mathbb{R}^2,\ \|\|_2 = \sqrt{x^2+y^2} \leq 1\ \ \right\}$

$\boxed{:/swp55/temp/graphics/swp0000_{2.pdf}}$

Le schéma

- $B_\infty\ (O,1) = \{(x,y) \in\ \mathbb{R}^2,\ \|\|_\infty = \max\ \{|x| + |y|\} \leq 1\ \ \}$

$|x| = 1$

$\boxed{:/swp55/temp/graphics/swp0000_{3.pdf}}$

Le schéma

ii) Equivalence :

**Comparaison entre $N_1$ et $N_\infty$ :**

On a : $\ 2\max(|x|,|y|) \geq |x| + |y| \geq \max(|x|,|y|) \implies$

$$N_\infty \leq N_1 \leq 2N_\infty$$

**Comparaison entre $N_\infty$ et $N_2$ :**

Supposons que :

$\max(|x|, |y|) = |y| \Longrightarrow \sqrt{x^2+y^2} \leq \sqrt{2y^2} = \sqrt{2}\,|y| \Longrightarrow N_2 \leq \sqrt{2}N_\infty$

Avec : $\quad x^2 + y^2 \geq y^2 \Longrightarrow \sqrt{x^2+y^2} \geq |y| \Longrightarrow N_2 \geq N_\infty$

Ce qui donne :

$$N_\infty \leq N_2 \leq \sqrt{2}N_\infty$$

Ce qui permet d'avoir :

$$\frac{N_2}{\sqrt{2}} \leq N_1 \leq 2N_\infty$$

**iii) Distances associées :**

**Soit** $\quad M_1 = (x_1,\ y_1)$ et $\ M_2 = (x_2,\ y_2) \Longrightarrow$

$d_1(M_1, M_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$

$d_2(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

$d_\infty(M_1, M_2) = \max\{\ |x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$

– **2)** L'inégalité à démontrer :

$$|\|x\| - \|y\|| \ \preceq\ \|x - y\|$$

implique une double inégalité

$$-\|x-y\| \preceq\ \|x\| - \|y\|\ \preceq\ \|x-y\|$$

Soit : $\quad x = x - y + y \ \Longrightarrow \|x\| = \|x - y + y\| \preceq \|x - y\| + \|y\|$

d'où :

$$\|x\| - \|y\| \preceq \|x - y\|$$

De la mème manière $y = y - x + x \Longrightarrow \|y\| = \|y - x + x\| \preceq \|y - x\| + \|x\|$

Ce qui donne : $\|y\| - \|x\| \preceq \|x - y\| \Longrightarrow - \|x - y\| \preceq \|x\| - \|y\|$ **cqfd.**

– **4)**

**a)** Soit : $2x = (x + y) + (x - y)$, on a :

$$\boxed{2\|x\| = \|(x + y) + (x - y)\| \leq \|x + y\| + \|x - y\|}$$

On a aussi : $2y = (x + y) + (y - x) \Longrightarrow$

$$\boxed{2\|y\| = \|(x + y) + (y - x)\| \leq \|x + y\| + \|x - y\|}$$

en additionnant les deux inégalités, on obtient :

$$\boxed{\|x\| + \|y\| \leq \|x + y\| + \|x - y\|}$$

d'où l'inégalité demandée

$$\boxed{\|x\| + \|y\| \leq 2\max\left(\|x + y\|, \|x - y\|\right)}.$$

**b)** Dans $\mathbb{R}^2$, muni de la norme $\|\|_\infty$ pour $x = (1, 0)$ *et* $y = (0, 1)$

on a l'égalité.

**c) Norme euclidienne** $\|x\|_2 = \|(x_1, x_2, \ ...., x_n)\| = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} x_i^2}$

Pour $2x = (x + y) + (x - y)$

On a :

$$\begin{aligned}
\|2x\|^2 &= 4\sum_{i=0}^{n} x_i^2 \\
&= \sum_{i=0}^{n} \left[(x_i + y_i) + (x_i - y_i)\right]^2 \\
&= \sum_{i=0}^{n} (x_i + y_i)^2 + \sum_{i=0}^{n} (x_i - y_i)^2 + 2\sum_{i=0}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=0}^{n} y_i^2
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{4\|x\|^2 = \sum_{i=0}^{n} x_i^2 = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 + 2\|x\|^2 - 2\|y\|^2}$$

Pour $2y = (x+y) + (y-x)$

On a :

$$\boxed{4\|y\|^2 = \sum_{i=0}^{n} x_i^2 = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 + 2\|y\|^2 - 2\|x\|^2}$$

Par addition, on obtient :

$$\boxed{2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right)}$$

Sachant que : $\|x\|^2 - 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \succeq 0 \Longrightarrow 2\|x\|\|y\| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2$

On a ainsi : $\boxed{(\|x\| + \|y\|)^2 \leq 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2}$

Ce qui donne :

$$\boxed{(\|x\| + \|y\|)^2 \leq 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2}$$

d'où : $\boxed{(\ \|x\| + \|y\|)^2 \leq 2\max\left(\|x+y\|^2, \|x-y\|^2\right)}$

Finalement, on a :

$$\boxed{\|x\| + \|y\| \quad \leq \sqrt{2}\max\left(\|x+y\|, \|x-y\|\right)}.$$

– **5)** $\mathbf{N(x,y)} = \max \ \{|x|\,,\ |2x+y|\}$

**a) N** *est une norme sur* $\mathbf{R}^2$.

* **Séparation :**

$$\mathbf{N}(x,y) = \max \ \{|x|\,,\ |2x+y|\} = 0 \Longrightarrow x = y = 0.$$

* **Homogénéité :**

$$\mathbf{N}(\lambda x, \lambda y) = \max \ \{|\lambda x|\,,\ |2\lambda x + \lambda y|\} = |\lambda| \max \ \{|x|\,,\ |2x+y|\} = |\lambda|\, \mathbf{N}(x,y)$$

* **Inégalité triangulaire** :

Soit :

$$\mathbf{N}\left((x_1,y_1)+(x_2,y_2)\right) = \max\left\{|x_1+x_2|\,,\ |2\,(x_1+x_2)+y_1+y_2|\right\}$$

On a :

$$|x_1+x_2| \preceq |x_1| + |x_2| \preceq \ \mathbf{N}\,(x_1,y_1) + \mathbf{N}\,(x_2,y_2)$$

Et aussi :

$$|2\,(x_1+x_2)+y_1+y_2| \preceq |2x_1+y_1| + |2x_2+y_2| \preceq \mathbf{N}\,(x_1,y_1) + \mathbf{N}\,(x_2,y_2)$$

**b) Equivalence entre les normes N** et $\mathbf{N}_1$

$$\mathbf{N}(x,y) = \max \ \{|x|\,,\ |2x+y|\} \preceq |x| + \ |2x+y| \preceq |x| + \ |2x| + |y|$$
$$\preceq 3\,|x| + 3\,|y| \preceq 3\mathbf{N}_1\,(x,y)$$

$$\mathbf{N}_1\,(x,y) = |x| + |y| = |x| + |2x+y-2x| \preceq 3\,|x| + |2x+y|$$
$$\preceq 4\max \ \{|x|\,,\ |2x+y|\} \preceq 4\mathbf{N}(x,y)$$

Ce qui donne :

$$\frac{1}{4}\,\|\|_1 \preceq \mathbf{N} \preceq 3\,\|\|_1$$

– **6)** On a

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+x}, & si \ \ x \geq 0 \\ \dfrac{x}{1-x} & si \ x \leq 0 \end{cases}$$

Graphe de $f$

:/swp55/temp/graphics/swp0000$_{4.pdf}$

$$f\,'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1+x)^2}, & si \ \ x \geq 0 \\ \dfrac{1}{(1-x)^2} & si \ x \leq 0 \end{cases}$$

$f\,'(x) > 0 \Longrightarrow f$ est strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $I = \left]-1,1\right[$.

$f$ est alors bijective de $\mathbb{R}$ sur $I = \left]-1,1\right[$.

**b)** $\delta\,(x,y){=}\,|f(x)-f(y)|$ .

i) **Séparation :**

$$\delta\,(x,y)=|f(x)-f(y)|=0\Longrightarrow f(x)=f(y)$$

$f$ étant bijective $\Longrightarrow$ On a donc : $x=y$

ii) **Symétrie :**

$$\delta\,(x,y)=|f(x)-f(y)|=|f(y)-f(x)|=\delta(y,x)$$

iii) **Inégalité triangulaire**

$$\begin{aligned}\delta\,(x,y) &= |f(x)-f(y)|=|f(x)-f(z)+f(z)-f(y)|\preceq|f(x)-f(z)|+|f(z)-f(y)|\\ &\preceq \delta\,(x,z)+\ \delta\,(z,y)\end{aligned}$$

– **7)** $\mathbf{N(x,y)}=\sqrt{a^2x^2+b^2y^2}$
**Séparation** :

$$N(x,y)=0\iff(x,y)=(0,0)$$

**Homogénéité :**

$$N(\lambda x,\lambda y)=\sqrt{a^2\lambda^2x^2+b^2\lambda^2y^2}=|\lambda|\sqrt{a^2x^2+b^2y^2}=|\lambda|\,\mathbf{N(x,y)}$$

**Inégalité triangulaire** :

$\mathbf{N}^2(\mathbf{x}_1 + x_2, \mathbf{y}_1 + y_2) = a^2 \left(\mathbf{x}_1 + x_2\right)^2 + b^2 \left(\mathbf{y}_1 + y_2\right)^2$

$= (a^2x_1^2 + b^2y_1^2) + (a^2x_2^2 + b^2y_2^2) + 2\,(ax_1)\,(ax_2) + 2\,(by_1)\,(by_2)$

$\leq (a^2x_1^2 + b^2y_1^2) + (a^2x_2^2 + b^2y_2^2) + 2\sqrt{(a^2x_1^2 + b^2y_1^2)\,(a^2x_2^2 + b^2y_2^2)}$

$\leq \left(\sqrt{(a^2x_1^2 + b^2y_1^2)} + \sqrt{(a^2x_2^2 + b^2y_2^2)}\right)^2$

( Utilisation de l'inégalité de **Cauchy-Schwarz** )

Ce qui donne :

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}_1 + x_2, \mathbf{y}_1 + y_2) \leq \mathbf{N}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) + \mathbf{N}(x_2, y_2)$$

**2)** $a^2x^2 + b^2y^2 \leq 1 \Longrightarrow$

$$\frac{x^2}{\frac{1}{a^2}} + \frac{y^2}{\frac{1}{b^2}} \leq 1,$$

La boule unité ouverte est donc l'intérieur de l'ellipse.

:/swp55/temp/graphics/swp0000$_{5.pdf}$

Graphe

**3)** Il est facile de majorer et minorer la norme donnée, en effet on a

$$min\left(|a|, |b|\right)\mathbf{N}_2\left(x, y\right) \leq \ \mathbf{N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \max\left(|a|, |b|\right)\mathbf{N}_2\left(x, y\right)$$

ce qui donne l'équivalence : $\quad \mathbf{N} \approx \mathbf{N}_2$.

– **8) i)** $\mathbf{N}(x, y) = \sup\limits_{t \,\in\, \mathbb{R}} \dfrac{|\ tx + y|}{\sqrt{1 + t^2}}$

**Séparation :**

$$N(x,y)=0 \iff |\ tx+y|\,, \forall t\in\mathbb{R}.\text{Pour } t=0 \Longrightarrow y=0 \Longrightarrow x=0$$

**Homogénéité :**

$$N(\lambda x,\lambda y)=\sup_{t\ \in\ \mathbb{R}}\frac{|\ t\lambda x+\lambda y|}{\sqrt{1+t^2}}=|\lambda|\,\mathbf{N}(x,y)$$

**Inégalité triangulaire :**

$\mathbf{N}(\mathbf{x}_1+x_2,\mathbf{y}_1+y_2)=\sup\limits_{t\ \in\ \mathbb{R}}\dfrac{|\ t\,(x_1+x_2)+(y_1+y_2)|}{\sqrt{1+t^2}}$

$=\sup\limits_{t\ \in\ \mathbb{R}}\dfrac{|\ (tx_1+y_1)+(tx_2+y_2)|}{\sqrt{1+t^2}}$

$\leq \sup\limits_{t\ \in\ \mathbb{R}}\dfrac{|\ tx_1+y_1|}{\sqrt{1+t^2}}+\sup\limits_{t\ \in\ \mathbb{R}}\dfrac{|\ tx_2+y_2|}{\sqrt{1+t^2}}\leq \mathbf{N}(\mathbf{x}_1,\mathbf{y}_1)+\mathbf{N}(x_2,y_2).$

**ii) Inégalité de Schwarz :**

$$|tx+y|\leq\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2+y^2}\Longrightarrow\frac{|tx+y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leq\sqrt{x^2+y^2}$$

$\Longrightarrow\quad \mathbf{N}\leq\mathbf{N}_2.$

**iii) On a :** $d(M_0,\ \Delta)=\dfrac{|\ tx_0+y_0|}{\sqrt{1+t^2}}$

Soit $h$ la projection orthogonale du point $M_0$ sur la droite $\Delta$

On a : $d(M_0,\ \Delta)=\dfrac{|\ tx_0+y_0|}{\sqrt{1+t^2}}=d\,(h,M_0)$

Comme la droite $\Delta$ passe par l′origine, cette distance $d\,(h,M_0)$

sera maximale lorsque $h$ se confondra avec l'origine.

On aura alors $d\,(0,M_0)=\sqrt{x_0^2+y_0^2}=\sup\limits_{t\ \in\ \mathbb{R}}\dfrac{|\ tx_0+y_0|}{\sqrt{1+t^2}}$

On a ainisi l'équivalence des deux normes $\mathbf{N}$ et $\mathbf{N}_2$ .

**iv)** Soit

$$f(t) = \frac{(tx+y)^2}{1+t^2}$$

$$f\,'(t) = \frac{2x\,(tx+y)\,(1+t^2) - 2t\,(tx+y)^2}{(1+t^2)^2} = \frac{2\,(tx+y)\,[x-ty]}{(1+t^2)^2}$$

La fonction $f$ admet un maximum pour : $t = \dfrac{x}{y} \Longrightarrow$

$f(\dfrac{x}{y}) = x^2 + y^2 = \sup\limits_{t\,\in\,\mathbb{R}} \dfrac{(tx+y)^2}{1+t^2}$ donc $\mathbf{N} \approx \mathbf{N}_2$

– **9)** $\|f_n\|_1 = \int_{-1}^{1} |f_n(x)|\,dx = \int_{-1}^{-\frac{1}{n}} 1dx + \int_{-\frac{1}{n}}^{0} (-nx)\,dx + \int_{0}^{\frac{1}{n}} nxdx + \int_{\frac{1}{n}}^{1} 1dx = 2 - \dfrac{1}{n}$

$\|f_n\|_2 = \sqrt{\int_{-1}^{1} {f_n}^2(x)dx} = \sqrt{\int_{-1}^{-\frac{1}{n}} 1dx + \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} x^2n^2dx + \int_{\frac{1}{n}}^{1} 1dx} = \sqrt{2 - \dfrac{4}{3n}}$ : $\|f_n\|_\infty = \sup\limits_{x\in[-1,1]} |f_n(x)| = 1$